Introduction à l'optimisation à deux niveaux : approche topologique et dualité utilisant la conjugaison

A. ABOUSSOROR

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Laboratoire LMC

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Introduction : Interprétation en théorie des jeux

Définition 1

On appelle problème d'optimisation à deux niveaux tout problème d'optimisation dont les contraintes et/ou la fonction-objectif dépendent de l'ensemble des solutions ou de la valeur optimale d'un autre problème d'optimisation.

Applications : Problèmes d'ingénierie, problèmes d'économie, problèmes de planification, problèmes d'allocation de ressources,....

Interprétation en théorie des jeux

Jeu de Stackelberg à deux joueurs

- Problème d'optimisation à deux niveaux à formulations forte et faible :

Considérons un jeu à deux joueurs J_1 et J_2.

$$J_1 \ : \ \text{meneur} \longrightarrow \begin{cases} F \ \text{fonction-objectif} \\ X \ \text{ensemble des stratégies} \end{cases}$$

$$J_2 \ : \ \text{suiveur} \longrightarrow \begin{cases} f \ \text{fonction-objectif} \\ Y \ \text{ensemble des stratégies} \end{cases}$$

- J_1 cherche à minimiser F
- J_2 cherche à minimiser f

où $X \subset \mathbb{R}^p$, $Y \subset \mathbb{R}^q$, $F, f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$.

J_1 est supposé avoir toutes les informations sur J_2, i.e., il connait la fonction-objectif et les contraintes de J_2.

Quand J_1 lance une stratégie $x \in X$, le problème considéré par J_2 est :

$$\mathcal{P}(x): \qquad \operatorname*{Min}_{y \in Y} f(x, y)$$

dont $M(x)$ est l'ensemble des solutions.

Interprétation en théorie des jeux

Quand J_1 évalue la performance du suiveur par ses solutions

Deux cas extrêmes se présentent

-Vision pessimiste (formulation faible) : Dans ce cas le jeu est non coopératif

$$J_1 \xrightarrow{\text{minimise}} \sup_{y \in \mathcal{M}(x)} F(x,y) \longrightarrow (S_p): \quad \min_{x \in X} \sup_{y \in \mathcal{M}(x)} F(x,y)$$

(S_p) est appelé un problème de Stackelberg faible (weak Stackelberg problem), ou problème d'optimisation à deux niveaux à formulation faible.

Interprétation en théorie des jeux

-Vision optimiste (formulation forte) : Dans ce cas le jeu est coopératif

$$J_1 \xrightarrow{\text{minimise}} \inf_{y \in \mathcal{M}(x)} F(x,y) \longrightarrow (S_O) : \quad \min_{x \in X} \inf_{y \in \mathcal{M}(x)} F(x,y)$$

(S_O) est appelé un problème de Stackelberg fort (strong Stackelberg problem), ou problème d'optimisation à deux niveaux à formulation forte.

Troisième cas : Coopération partielle [2]

Supposons que'il existe une coopération partielle entre le meneur et le suiveur. Dans ce cas, le meneur minimise la fonction

$$\alpha \inf_{y \in M(x)} F(x,y) + (1-\alpha) \sup_{z \in M(x)} F(x,z)$$

où $\alpha \in]0,1[$. Alors, le probème considéré par le meneur est

$$(S_{op}) : \qquad \min_{x \in X} \left\{ \alpha \inf_{y \in M(x)} F(x,y) + (1-\alpha) \sup_{z \in M(x)} F(x,z) \right\}.$$

Ce problème est appelé un problème de Stackelberg fort-faible, ou problème d'optimisation à deux niveaux fort-faible.

Interprétation en théorie des jeux

Quand J_1 évalue la performance du suiveur par sa fonction valeur minimale

$$J_1 \ : \ \text{meneur} \longrightarrow \begin{cases} \hat{F} \ \text{fonction-objectif} \\ X \ \text{ensemble des stratégies} \end{cases}$$

$$J_2 \ : \ \text{suiveur} \longrightarrow \begin{cases} f \ \text{fonction-objectif} \\ Y \ \text{ensemble des stratégies} \end{cases}$$

où $X \subset \mathbb{R}^p$, $Y \subset \mathbb{R}^q$, $\hat{F} : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$.

Soit $v(x)$ la valeur infimale du problème

$$\mathcal{P}(x) : \qquad \min_{y \in Y} f(x, y)$$

$$J_1 \xrightarrow{\text{minimise}} \hat{F}(x, v(x)) \quad \longrightarrow \quad (S_v) : \qquad \min_{x \in X} \hat{F}(x, v(x))$$

(S_v) est appelé un problème de Stackelberg à fonction valeur minimale.

Interprétation en théorie des jeux

(S_p), (S_o), (S_{op}) et (S_v) sont appelés problèmes de premier niveau

$\mathcal{P}(x)$ est appelé problème de second niveau (pour une stratégie x lancée par le meneur).

Les problèmes de la forme de (S_O), (S_p) et (S_{op}) sont en général non convexes (mêmes si les données sont linéaires) et non différentiables. Ils font donc partie de l'optimisation globale non différentiable.

En particulier, il est difficile de trouver des conditions suffisantes assurant l'existence de solutions pour les problèmes de Stackelberg faibles. Même dans le cas où les fonctions-objectifs sont continues et les ensembles des contraintes sont des compacts, ces problèmes peuvent ne pas avoir des solutions.

Exemple

Soient $X = [0,1]$, $Y = [0,1]$, $f(x,y) = (x - \frac{1}{2})y$ et $F(x,y) = -xy$. Alors, X et Y sont des compacts, F et f sont des fonctions continues, mais le problème

$$(S) \qquad \min_{x \in X} \sup_{y \in \mathcal{M}(x)} F(x,y)$$

n'admet pas de solutions. En effet, on a

$$\mathcal{M}(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ [0,1], & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ \{0\}, & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$w(x) = \sup_{y \in \mathcal{M}(x)} F(x,y) = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

et $v = \inf_{x \in X} w(x) = -\dfrac{1}{2}$, mais il n'existe pas de $x \in X$ réalisant cette valeur infimale. On note que la fonction marginale $w(.)$ n'est pas semicontinue inférieurement en $x = \frac{1}{2}$.

Chapitre 1

Problèmes d'optimisation à deux niveaux à formulation faible : approche topologique

Ce chapitre présente une méthode de régularisation donnée dans la littérature de l'optimisation à deux niveaux par Loridan et Morgan dans [4]. On note que plusieurs résultats importants en optimisation à deux niveaux concernant l'existence de solutions, des approximations et des conditions d'optimalité sont obtenus en utilisant cette sorte de régularisation. D'où l'importance de son étude.

1.1 Introduction

Soient X et Y deux espaces topologiques séparés, $F, f : X \times Y \to \mathbb{R}$, des fonctions. On considère le problème d'optimisation à deux niveaux faible suivant

$$(S) \qquad \min_{x \in X} \sup_{y \in M(x)} F(x, y)$$

où $M(x)$ est l'ensemble des solutions du problème du second niveau, supposé non réduit à un singleton

$$P(x) \qquad \min_{y \in Y} f(x, y).$$

Pour $x \in X$, on pose

$$v(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y) \qquad w(x) = \sup_{y \in M(x)} F(x, y),$$

$$v_S = \inf_{x \in X} w(x).$$

On suppose que pour tout $x \in X$, $v(x) \in \mathbb{R}$. On a

$$M(x) = \{y \in Y / f(x, y) = v(x)\}.$$

Dans la suite, nous essayons de donner une régularisation du problème (S) qui consiste à remplacer l'ensemble des solutions $M(x)$ par l'ensemble des ϵ-solutions approchées du problème $P(x)$. Cette régularisation nous permettra d'avoir l'existence de solutions du problème régularisé (S_ϵ) sous des hypothèses non fortes. Ensuite, nous donnons des résultats d'approximation pour le problème initial (S).

1.2 Rappels topologiques

Soit X un espace topologique séparé.

Définition 1.1

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction.
1) On dit que f est séquentiellement semicontinue inférieurement en $x \in X$, si pour toute suite (x_k) qui converge vers x dans X, on a

$$\liminf_{k \to +\infty} f(x_k) \geq f(x).$$

2) On dit que f est séquentiellement semicontinue supérieurement en $x \in X$, si pour toute suite (x_k) qui converge vers x dans X, on a

$$\limsup_{k \to +\infty} f(x_k) \leq f(x).$$

3) On dit que f est séquentiellement continue en $x \in X$, si pour toute suite (x_k) qui converge vers x dans X, on a

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = f(x).$$

Définition 1.2

On dit que X est séquentiellement compact si de toute suite (x_k) de X, on peut extraire une sous-suite qui converge dans X.

Remarque 1.1.

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. Il n'est pas difficile de montrer que si X est séquentiellement compact et f est séquentiellement semicontinue inférieurement sur X, alors le problème de minimisation

$$\min_{x \in X} f(x)$$

admet au moins une solution.

Définition 1.3

Soit (A_k) une suite de sous-ensembles non vides de X. On définit

i) $\liminf\limits_{k \to +\infty} A_k = \left\{x \in X / \exists x_k \to x, \text{ quand } k \to +\infty, x_k \in A_k, \forall k \in \mathbb{N}\right\}$

ii) $\limsup\limits_{k \to +\infty} A_k = \left\{x \in X / \exists x_{k_j} \to x, \text{ quand } j \to +\infty, x_{k_j} \in A_{k_j}, \forall j \in \mathbb{N}\right\}$

Définition 1.4

Soit A une partie non vide de X. On définit l'ensemble

$$\overline{A}^s = \left\{x \in X / \, \exists x_k \in A, x_k \to x, \text{ quand } k \to +\infty\right\}$$

appelé fermeture séquentielle de A.
On dit que A est séquentiellement fermé si $A = \overline{A}^s$.

Il est simple de voir que

$$A \subset \overline{A}^s \subset \overline{A}.$$

On a $\overline{A}^s = \overline{A}$ si X vérifie le premier axiome de dénombrabilité.

1.3 Régularisation

Pour $\epsilon > 0$, on considère le problème régularisé suivant de (S)

$$(S_\epsilon) \qquad \min_{x\in X} \sup_{y\in M(\epsilon,x)} F(x,y)$$

où $M(\epsilon, x)$ est l'ensemble des ϵ-solutions approchées du problème $P(x)$, i.e.,

$$M(\epsilon, x) = \big\{ y \in Y / \, f(x,y) \leq v(x) + \epsilon \big\}.$$

Posons

$$w(\epsilon, x) = \sup_{y\in M(\epsilon,x)} F(x,y)$$

et

$$v_S(\epsilon) = \inf_{x\in X} w(\epsilon, x)$$

la valeur infimale du problème (S_ϵ).

On considère les hypothèses suivantes

- (H_1) La fonction f est séquentiellement semicontinue inférieurement (seq s.c.i.) sur $X \times Y$
- (H_2) Pour tout $(x, y) \in X \times Y$, pour toute suite (x_k) qui converge vers x dans X, il existe une suite (y_k) qui converge vers y dans Y telle que
$$\limsup_{k \to +\infty} f(x_k, y_k) \leq f(x, y)$$
- (H_3) Y est un sous-ensemble convexe et séquentiellement compact d'un espace vectoriel topologique séparé
- (H_4) Pour tout $x \in X$, la fonction $f(x, .) : y \to f(x, y)$ est strictement quasi-convexe sur Y, i.e.,

$$f(x, \alpha y + (1-\alpha)z) < \max\{f(x, y), f(x, z)\} \quad \forall \alpha \in]0, 1[, \ \forall y, z \in Y, y \neq z.$$

Lemme 1.1

Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) sont satisfaites et que Y est séquentiellement compact. Alors, pour tout $x \in X$ et toute suite (x_k) qui converge vers x dans X, on a

$$\lim_{k \to +\infty} v(x_k) = v(x).$$

Preuve. Remarquons d'abord que d'après l'hypopthèse (H_1) et la séquentielle compacité de Y, l'ensemble $M(x)$ est non vide et que $v(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in X$. Soit $y \in Y$. D'après (H_2), il existe (y_k) qui converge vers y dans Y telle que

$$\limsup_{k \to +\infty} f(x_k, y_k) \leq f(x, y).$$

Donc

$$\limsup_{k \to +\infty} v(x_k) \leq f(x, y).$$

Puisque y est arbitraire dans Y, on obtient alors

$$\limsup_{k \to +\infty} v(x_k) \leq v(x).$$

De plus

$$\liminf_{k\to+\infty} v(x_k) \geq v(x).$$

Sinon, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\liminf_{k\to+\infty} v(x_k) < \alpha < v(x). \tag{1.1}$$

Posons

$$\liminf_{k\to+\infty} v(x_k) = \lim_{\substack{k\to+\infty \\ k\in\mathcal{N}}} v(x_k)$$

où $\mathcal{N}$ est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. Il existe alors $k_0 \in \mathcal{N}$ tel que

$$v(x_k) < \alpha, \forall k \geq k_0, k \in \mathcal{N}.$$

Pour $k \geq k_0$, $k \in \mathcal{N}$, il existe $y_k \in Y$, tel que

$$f(x_k, y_k) < \alpha.$$

Puisque Y est séquentiellement compact, il existe $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ infini tel que $y_k \to \bar{y} \in Y$, quand $k \to +\infty$, $k \in \mathcal{N}'$. Par suite l'hypothèse (H_1) implique que

$$v(x) \leq f(x, \bar{y}) \leq \liminf_{\substack{k \to +\infty \\ k \in \mathcal{N}'}} f(x_k, y_k) \leq \alpha$$

ce qui donne une contradiction avec la deuxième stricte inégalité dans (1.1). Donc, on a

$$\lim_{k \to +\infty} v(x_k) = v(x). \qquad \square$$

Proposition 1.1

Supposons que les hypothèses (H_1)-(H_4) sont satisfaites. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, tout $x \in X$ et toute suite (x_k) qui converge vers x dans X, on a

$$M(\epsilon, x) \subset \overline{\liminf_{k\to+\infty} M(\epsilon, x_k)}^{s}.$$

Preuve.
Soit $y \in M(\epsilon, x)$. On distingue les cas suivants.

Cas 1. Si $f(x,y) < v(x) + \epsilon$.
D'après l'hypothèse (H_2), il existe une suite (y_k) qui converge vers y telle que

$$\limsup_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) \leq f(x,y).$$

En utilisant l'hypothèse (H_1), on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) = f(x,y).$$

De plus, on a $\lim_{k\to+\infty} v(x_k) = v(x)$ (Lemme 1.1).

D'où

$$f(x_k, y_k) < v(x_k) + \epsilon$$

pour k assez grand, i.e., $y_k \in M(\epsilon, x_k)$ pour k assez grand. D'où

$$y \in \liminf_{k \to +\infty} M(\epsilon, x_k) \subset \overline{\liminf_{k \to +\infty} M(\epsilon, x_k)}^s.$$

Cas 2. Si $f(x, y) = v(x) + \epsilon$.

Soit $z \in Y$ tel que $f(x, z) < v(x) + \epsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$\bar{y}_n = (1 - \frac{1}{n})y + \frac{1}{n}z.$$

Alors, $\bar{y}_n \to y$ quand $n \to +\infty$ et

$$f(x, \bar{y}_n) < \max\{f(x, y), f(x, z)\} = v(x) + \epsilon.$$

D'après le premier cas, on a

$$\bar{y}_n \in \liminf_{k \to +\infty} M(\epsilon, x_k).$$

Puisque $\bar{y}_n \to y$ quand $n \to +\infty$, alors

$$y \in \overline{\liminf_{k \to +\infty} M(\epsilon, x_k)}^s. \qquad \square$$

Théorème 1.1

Soit $\epsilon > 0$. Supposons que les hypothèses (H_1)-(H_4) sont satisfaites. Si de plus, X est séquentiellement compact et F est séquentiellement s.c.i. sur $X \times Y$, alors le problème (S_ϵ) admet au moins une solution.

Preuve. Montrons que la fonction marginale $w(\epsilon, .)$ est séquentiellement s.c.i. sur X. Soit $x \in X$ et (x_k) une suite qui converge vers x dans X. Montrons que

$$\liminf_{k \to +\infty} w(\epsilon, x_k) \geq w(\epsilon, x).$$

Soit $y \in M(\epsilon, x)$. D'après la Proposition 1.1, il existe une suite (y_n) dans Y qui convege vers y et

$$y_n \in \liminf_{k \to +\infty} M(\epsilon, x_k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour chaque n, il existe une suite $(y_{n,k})_k$ qui converge vers y_n quand $k \to +\infty$, avec $y_{n,k} \in M(\epsilon, x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$w(\epsilon, x_k) = \sup_{y \in M(\epsilon, x_k)} F(x_k, y) \geq F(x_k, y_{n,k}).$$

Donc

$$\liminf_{k\to+\infty} w(\epsilon, x_k) \geq \liminf_{k\to+\infty} F(x_k, y_{n,k}) \geq F(x, y_n).$$

Par suite

$$\liminf_{k\to+\infty} w(\epsilon, x_k) \geq \liminf_{n\to+\infty} F(x, y_n) \geq F(x, y).$$

Puisque y est arbitraire dans $M(\epsilon, x)$, on obtient

$$\liminf_{k\to+\infty} w(\epsilon, x_k) \geq w(\epsilon, x).$$

D'après la séquentielle compacité de X, on déduit l'existence de solutions pour le problème régularisé (S_ϵ). $\square$

1.4 Résultats d'approximation

Afin de donner un résultat d'approximation pour le problème (S), nous établissons le résultat intermédiaire suivant.

Proposition 1.2

Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) sont satisfaites et que Y est séquentiellement compact. Alors, pour tout $x \in X$, toute suite (x_k) qui converge vers x dans X et toute suite $\epsilon_k \searrow 0^+$, on a

$$\limsup_{k \to +\infty} M(\epsilon_k, x_k) \subset M(x).$$

Preuve. Soit $y \in \limsup_{k \to +\infty} M(\epsilon_k, x_k)$. Il existe $(y_{k_j})_j$ qui converge vers y quand $j \to +\infty$ avec $y_{k_j} \in M(\epsilon_{k_j}, x_{k_j})$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$f(x_{k_j}, y_{k_j}) \leq v(x_{k_j}) + \epsilon_{k_j}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x,y) &\leq \liminf_{j \to +\infty} f(x_{k_j}, y_{k_j}) \\ &\leq \limsup_{j \to +\infty} (v(x_{k_j}) + \epsilon_{k_j}) \\ &= v(x) \end{aligned}$$

i.e., $y \in M(x)$. $\square$

Théorème 1.2

Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) sont satisfaites, Y est séquentiellement compact et que l'hypothèse suivante est satisfaite

(H_5) Pour tout $x \in X$, il existe une suite (x_k) qui converge vers x dans X, telle que pour tout $y \in Y$ et toute suite (y_k) qui converge vers y dans Y, on a

$$\limsup_{k \to +\infty} F(x_k, y_k) \leq F(x, y)$$

Alors

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} v_S(\epsilon) = v_S.$$

Preuve. Soient $x \in X$ et $\epsilon_k \to 0^+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $M(x) \subset M(\epsilon_k, x)$. Donc

$$\sup_{y \in M(x)} F(x,y) \leq \sup_{y \in M(\epsilon_k, x)} F(x,y)$$

i.e.,

$$w(x) \leq w(\epsilon_k, x).$$

Par suite $v_S \leq v_S(\epsilon_k)$ et

$$v_S \leq \liminf_{k \to +\infty} v_S(\epsilon_k).$$

Montrons que

$$\limsup_{k \to +\infty} v_S(\epsilon_k) \leq v_S.$$

Pour cela, montrons d'abord que

$$\limsup_{k \to +\infty} w(\epsilon_k, x_k) \leq w(x)$$

où (x_k) est la suite donnée par l'hypothèse (H_5).

Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$w(x) < \alpha < \limsup_{k \to +\infty} w(\epsilon_k, x_k).$$

Posons

$$\limsup_{k \to +\infty} w(\epsilon_k, x_k) = \lim_{\substack{k \to +\infty \\ k \in \mathcal{N}}} w(\epsilon_k, x_k)$$

où $\mathcal{N}$ est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. Il existe alors $k_0 \in \mathcal{N}$ tel que

$$w(\epsilon_k, x_k) = \sup_{y \in M(\epsilon_k, x_k)} F(x_k, y) > \alpha \qquad \forall k \geq k_0, k \in \mathcal{N}.$$

Pour chaque $k \in \mathcal{N}$, $k \geq k_0$, il existe $y_k \in M(\epsilon_k, x_k)$ tel que

$$F(x_k, y_k) > \alpha.$$

Puisque Y est séquentiellement compact, il existe $\mathcal{N}^{'} \subset \mathcal{N}$, tel que la sous-suite $(y_k)_{k \in \mathcal{N}'}$ qui converge vers $\bar{y} \in Y$.

De plus,

$$\bar{y} \in \limsup_{k \to +\infty} M(\epsilon_k, y_k) \subset M(x).$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} w(x) < \alpha \quad &\leq \quad \limsup_{\substack{k \to +\infty \\ k \in \mathcal{N}'}} F(x_k, y_k) \\ &\leq \quad F(x, \bar{y}) \leq w(x) \end{aligned}$$

ce qui donne une contradiction. Donc

$$\limsup_{k \to +\infty} w(\epsilon_k, x_k) \leq w(x)$$

et par suite

$$\limsup_{k \to +\infty} v_S(\epsilon_k) \leq w(x).$$

Puisque est x est arbitraire dans X, on déduit que

$$\limsup_{k \to +\infty} v_S(\epsilon_k) \leq v_S.$$

D'où $\lim_{k \to +\infty} v_S(\epsilon_k) = v_S$. □

Régularisation utilisant les ϵ-solutions strictes

Cette régularisation va nous permettre d'éviter les hypothèses de convexité utilisées dans la régularisation précédente. Pour $\epsilon > 0$ et une stratégie $x \in X$ lancée par le meneur, soit

$$N(\epsilon, x) = \left\{ y \in Y / \, f(x, y) < v(x) + \epsilon \right\}$$

l'ensemble des ϵ-solutions strictes du problème $P(x)$ du suiveur. Le nouveau problème régularisé qu'on considère est

$$(\tilde{S}_\epsilon) \qquad \min_{x \in X} \sup_{y \in N(\epsilon, x)} F(x, y).$$

Posons

$$\tilde{w}(x, \epsilon) = \sup_{y \in N(\epsilon, x)} F(x, y) \quad \text{et} \quad \tilde{v}(\epsilon) = \inf_{x \in X} \tilde{w}(x, \epsilon)$$

la valeur optimale du problème $(\tilde{S}_\epsilon)$.

Théorème 1.3

Supposons que les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_5) sont satisfaites et que Y est séquentiellement compact. Alors

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \tilde{v}(\epsilon) = v_S.$$

Preuve. D'après le Théorème 1.2, on a

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} v_S(\epsilon) = v_S.$$

Or pour tout $x \in X$, on a

$$M(x) \subset N(\epsilon, x) \subset M(\epsilon, x).$$

Par suite

$$\sup_{y \in M(x)} F(x,y) \leq \sup_{y \in N(\epsilon,x)} F(x,y) \leq \sup_{y \in M(\epsilon,x)} F(x,y)$$

et

$$w(x) \leq \tilde{w}(\epsilon, x) \leq w(\epsilon, x).$$

Donc

$$v_S \leq \tilde{v}(\epsilon) \leq v_S(\epsilon).$$

D'où

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \tilde{v}_\epsilon = v_S. \qquad \square$$

Proposition 1.3

Supposons que les hypothèses (H_1), (H_2) sont satisfaites et que Y est séquentiellement compact. Alors, pour tout $x \in X$, toute suite (x_k) qui converge vers x dans X et toute suite $\epsilon_k \searrow 0^+$, on a

$$N(\epsilon, x) \subset \liminf_{k \to +\infty} N(\epsilon, x_k).$$

Preuve. D'après le Lemme 1.1, on

$$\lim_{k\to+\infty} v(x_k) = v(x).$$

Soit $y \in N(\epsilon, x)$. Donc

$$f(x,y) < v(x) + \epsilon. \tag{1.2}$$

D'après l'hypothèse (H_2), il existe une suite (y_k) qui converge vers y dans Y telle que

$$\limsup_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) \leq f(x,y).$$

En utilisant (H_1), on a

$$f(x,y) \leq \liminf_{k\to+\infty} f(x_k, y_k).$$

Par suite
$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) = f(x, y).$$
Finalement, d'après (1.2), on déduit que
$$f(x_k, y_k) < v(x_k) + \epsilon, \text{ pour } k \text{ assez grand}$$
i.e., $y_k \in N(\epsilon, x_k)$, pour k assez grand. D'où
$$N(\epsilon, x) \subset \liminf_{k\to+\infty} N(\epsilon, x_k).$$
□

Théorème 1.4

Supposons que les hypothèses (H_1), (H_2) sont satisfaites, X et Y sont séquentiellement compacts et F séquentiellement s.c.i. sur $X \times Y$. Alors, le problème $(\tilde{S}_\epsilon)$ admet au moins une solution.

Preuve. Montrons que la fonction marginale $\tilde{w}(\epsilon, .)$ est séquentiellement s.c.i. sur X. Soit $x \in X$ et (x_k) une suite qui converge vers x dans X. Montrons que
$$\liminf_{k\to+\infty} \tilde{w}(\epsilon, x_k) \geq \tilde{w}(x, \epsilon).$$
Soit $y \in N(\epsilon, x)$. D'après la Proposition 1.3, il existe une suite (y_k) dans Y qui converge vers y, $y_k \in N(\epsilon, x_k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Donc

$$\tilde{w}(\epsilon, x_k) \geq F(x_k, y_k), \forall k$$

et

$$\begin{aligned}\liminf_{k \to +\infty} \tilde{w}(\epsilon, x_k) &\geq \liminf_{k \to +\infty} F(x_k, y_k) \\ &\geq F(x, y).\end{aligned}$$

Puisque y est arbitraire dans $N(\epsilon, x)$, on déduit alors que

$$\begin{aligned}\liminf_{k \to +\infty} \tilde{w}(\epsilon, x_k) &\geq \sup_{y \in N(\epsilon, x)} F(x, y) \\ &= \tilde{w}(\epsilon, x).\end{aligned}$$

Le résultat se déduit alors de la séquentielle compacité de X. $\square$

Chapitre 2

Problèmes d'optimisation à deux niveaux à fonction valeur minimale : dualité utilisant la conjugaison

Ce chapitre est extrait du travail considéré dans [3].

2.1 Introduction

Soient X et Y deux sous-ensembles convexes et compacts non vides de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement,

$$F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$$

des fonctions. On considère le problème d'optimisation à deux niveaux suivant

$$\min_{x \in X} F(x, v(x))$$

où $v(x)$ est la valeur infimale du problème du second niveau

$$P(x) \qquad \min_{y \in Y} f(x, y).$$

Rappelons que le problème (S) correspond à un jeu de deux joueurs dont le meneur évalue la performance du suiveur par sa valeur optimale. Remarquons que (S) est un problème non différentiable en général à cause de la présence de la fonction marginal $v(.)$ dans sa formulation. Dans ce chapitre, nous donnons des conditions d'optimalité pour le problème (S) via une dualité composée utilisant les conjuguées des fonctions F et f. Notre étude utilise quelques résultats et outils d'analyse convexe que nous rappelons dans la section suivante. Enfin, nous montrons que la résolution du problème biniveaux (S) peut se ramèner à la résolution de deux problèmes à un seul niveau via la dualité.

2.2 Rappels d'analyse convexe

Définition 2.1

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. On appelle conjuguée de g relative à l'ensemble A, notée g_A^*, la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$g_A^*(p) = \sup_{x \in A} \left\{ \langle p, x \rangle - g(x) \right\}.$$

Quand $A = \mathbb{R}^n$, on obtient la fonction conjuguée de Legendre-Fenchel g, notée g^*.

Remarque 2.1

On a l'inégalité suivante

$$g_A^*(p) + g(x) \geq \langle p, x \rangle, \forall (p, x) \in \mathbb{R}^n \times A$$

appelée inégalité de Fenchel.

Définition 2.2

Soient $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ des fonctions. On appelle inf-convolution de f_1 et f_2 la fonction notée $f_1 \Box f_2 : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$f_1 \Box f_2(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{f_1(y) + f_2(x-y)\} = \inf_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \\ x_1 + x_2 = x}} \{f_1(x_1) + f_2(x_2)\}$$

L'inf-convolution est dite exacte en x si

$$f_1 \Box f_2(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \{f_1(y) + f_2(x-y)\}$$

Définition 2.3

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. Soit $\bar{x} \in \mathrm{dom} g = \{x \in \mathbb{R}^n / \, g(x) < +\infty\}$. On appelle sous-différentiel de g en $\bar{x}$ noté par $\partial g(\bar{x})$ l'ensemble défini par

$$\partial g(\bar{x}) = \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n / \, g(x) \geq g(\bar{x}) + \langle x^*, x - \bar{x} \rangle, \; \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Définition 2.4

Soient A un sous-ensemble non vide convexe de $\mathbb{R}^n$ et $\bar{x} \in A$. Le cône normal à A en $\bar{x}$ noté par $\mathcal{N}_A(\bar{x})$ est l'ensemble défini par

$$\mathcal{N}_A(\bar{x}) = \Big\{ x^* \in \mathbb{R}^n / \langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \, \forall\, x \in A \Big\}.$$

On a $\partial \psi_A(\bar{x}) = \mathcal{N}_A(\bar{x})$.

Une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite propre si $g(x) > -\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(\bar{x}) < +\infty$.

Théorème 2.1

Soient $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions convexes et propres. On suppose que $\bigcap_{i=1}^m \mathrm{ri}(\mathrm{dom} f_i) \neq \emptyset$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^m f_i)^*(x) &= (f_1^* \Box \ldots \Box f_m^*)(x) \\ &= \inf_{\substack{x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n \\ x_1 + \ldots + x_m = x}} \{\sum_{i=1}^m f_i^*(x_i)\}\end{aligned}$$

et l'inf-convolution est exacte en x, où pour un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{ri} A$ désigne l'intérieur de A pour la topologie induite sur le plus petit sous-espace affine contenant A.

Définition 2.5

Soient $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction et $\hat{X}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ avec $\mathrm{dom}\hat{f} = \hat{X}$. On considère le problème de minimisation suivant

$$(\hat{P}) \qquad \min_{\substack{x \in \hat{X} \\ \hat{g}(x) \leq 0}} \hat{f}(x)$$

où $\hat{g} = (\hat{g}_1, ..., \hat{g}_k)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ une fonction, $k \geq 1$. Le dual de Fenchel-Lagrange du problème $(\hat{P})$ est défini par

$$(\hat{D}) \qquad \max_{\substack{p \in \mathbb{R}^n \\ q \in \mathbb{R}^k_+}} \{-\hat{f}^*(p) - (q^T \hat{g})^*_{\hat{X}}(-p)\}$$

avec $(q^T \hat{g})(x) = \sum_{i=1}^k \hat{g}_i(x)$, $q = (q_1, ..., q_k)^T$.

2.3 Dualité de Fenchel-Lagrange pour le problème biniveaux (S)

Dans cette section, avant de définir le dual de Fenchel-Lagrange de (S), nous donnons des résultats préliminaires.
Soit $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p+1}$, la fonction définie par

$$h(x) = (h_1(x), ..., h_p(x), h_{p+1}(x))^T$$

où pour $x = (x_1, ..., x_p)^T$, $h_i(x) = x_i$, $i = 1, ..., p$ et $h_{p+1}(x) = v(x)$.
Alors, le problème (S) s'écrit sous la forme

$$(S) \qquad \min_{x \in X} (F \circ h)(x).$$

Définition 2.6

Soit $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit f est $\mathbb{R}^n_+$-croissante si pour tous $x = (x_1, ..., x_n)^T, y = (y_1, ..., y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, avec $x_i \geq y_i$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a $\tilde{f}(x) \geq \tilde{f}(y)$.

On considère le problème de minimisation suivant

$$(S^{'}) \qquad \min_{\substack{x \in X, y \in \mathbb{R}^{p+1} \\ h(x) \leq y}} F(y)$$

et les hypothèses suivantes

- $(\hat{H}_1)$ La fonction F est $\mathbb{R}^{p+1}_+$-croissante
- $(\hat{H}_2)$ La fonction F est convexe sur $\mathbb{R}^{p+1}$
- $(\hat{H}_3)$ La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$

Remarque 2.2

Supposons que les hypothèses $(\hat{H}_1)$-$(\hat{H}_3)$ sont satisfaites.

1) La fonction marginale $v(.)$ est convexe à valeurs finies. Par suite, c'est une fonction continue.
2) Puisque h est convexe, alors les hypothèses $(\hat{H}_1)$ et $(\hat{H}_2)$ entrainent que le problème (S) est convexe.

Alors, les problèmes (S) et $(S^{'})$ sont liés par les résultats suivants

Proposition 2.1

Supposons ques les hypothèses $(\hat{H}_1)$- $(\hat{H}_3)$ sont satisfaites. Alors $\inf(S)$ est fini et

1) $\inf(S) = \inf(S^{'})$

2)

i) Si $\bar{x}$ est solution de (S), alors $(\bar{x}, h(\bar{x}))$ est solution de $(S^{'})$

ii) Si $(\bar{x}, \bar{y})$ est solution de $(S^{'})$, alors $\bar{x}$ est solution de (S).

Preuve. D'après la convexité de F et h et l'hypothèse $(\hat{H}_1)$, la fonction $F \circ h$ est convexe. De plus, elle est à valeurs finies. Par suite, elle est continue. D'après la compacité de X, le problème (S) admet au moins une solution. Il en résulte que $\inf(S) \in \mathbb{R}$.

1) Soit $x \in X$. Alors $(x, h(x))$ est un point réalisable de $(S^{'})$. Donc

$$\inf(S^{'}) \leq F(h(x)).$$

Par suite

$$\inf(S^{'}) \leq \inf_{x \in X} F(h(x)) = \inf(S).$$

Soit maintenant (x, y) un point réalisable de $(S^{'})$. Alors $x \in X$. Or $h(x) \leq y$. Donc $F(h(x)) \leq F(y)$. Or $\inf(S) \leq F(h(x))$. Puisque (x, y) est un point réalisable arbitraire de $(S^{'})$, alors

$$\inf(S) \leq \inf(S^{'}).$$

2)

i) Supposons que $\bar{x}$ est solution de (S). Donc $(\bar{x}, h(\bar{x}))$ est un point réalisable de $(S^{'})$. Soit (x, y) un point réalisable de $(S^{'})$. Donc $h(x) \leq y$. L'hypothèse $(\hat{H}_1)$ entraine que $F(h(x)) \leq F(y)$. Puisque $\bar{x}$ est solution de (S) et $x \in X$, alors $F(h(\bar{x})) \leq F(h(x)) \leq F(y)$. D'où $F(h(\bar{x})) \leq \inf(S^{'})$. On déduit que $(\bar{x}, h(\bar{x}))$ est solution de $(S^{'})$.

ii) Supposons que $(\bar{x}, \bar{y})$ est solution de $(S^{'})$. Soit $x \in X$. Alors, $(x, h(x))$ est un point réalisable de $(S^{'})$. Donc $F(\bar{y}) \leq F(h(x))$. Or $h(\bar{x}) \leq \bar{y}$. L'hypothèse $(\hat{H}_1)$ entraine que $F(h(\bar{x})) \leq F(\bar{y}) \leq F(h(x))$. Puisque x est arbitraire dans X, on déduit que

$$F(h(\bar{x})) \leq inf(S).$$

Par suite, $\bar{x}$ est solution de (S). $\square$

Soit (D) le dual lagrangien de $(S^{'})$, i.e.,

$$(D) \qquad \sup_{\substack{\alpha \geq 0 \\ \alpha \in \mathbb{R}^{p+1}}} \inf_{\substack{x \in X \\ y \in \mathbb{R}^{p+1}}} \{F(y) + \langle \alpha, h(x) - y \rangle\}.$$

Exercice. Montrer que le dual de Fenchel-Lagrange de $(S^{'})$ a la forme suivante

$$(D^*) \qquad \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{R}^{p+1} \\ \beta \in \mathbb{R}^{p}}} \{-F^*(\alpha) - (\alpha^T h)^*(\beta) - \psi_X^*(-\beta)\}$$

où ψ_X est la fonction indicatrice de X, i.e.,

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \\ +\infty & \text{si } x \notin X \end{cases}$$

Remarque 2.3

D'après la dualité Lagrangienne faible, on a $\inf(S^{'}) \geq \sup(D)$.

Proposition 2.2

Supposons ques les hypothèses $(\hat{H}_1)$-$(\hat{H}_3)$ sont satisfaites. Alors

$$\sup(D) = \sup(D^*).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in X, y\in\mathbb{R}^{p+1}} \{F(y) + \langle \alpha, h(x) - y\rangle\} \\
&= \inf_{x\in X} (\alpha^T h)(x) + \inf_{y\in\mathbb{R}^{p+1}} \{F(y) - \langle \alpha, y\rangle\} \\
&= -\sup_{x\in X}\{\langle 0, x\rangle - (\alpha^T h)(x)\} - \sup_{y\in\mathbb{R}^{p+1}} \{\langle \alpha, y\rangle - F(y)\} \\
&= -F^*(\alpha) - (\alpha^T h)^*_X(0).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque X est convexe, alors $\mathrm{ri}X \neq \emptyset$ et

$$\mathrm{ri}(\mathrm{dom}(\alpha^T h)) \cap \mathrm{ri}(\mathrm{dom}\psi_X) = \mathbb{R}^p \cap \mathrm{ri}X \neq \emptyset.$$

Le Théorème 2.1 entraine que

$$\begin{aligned}(\alpha^T h)^*_X(0) = (\alpha^T h + \psi_X)^*(0) &= (\alpha^T h)^* \Box (\psi_X)^*(0)\\ &= \inf_{\beta\in\mathbb{R}^p}\{(\alpha^T h)^*(\beta) + (\psi_X)^*(-\beta)\}\\ &= \inf_{\beta\in\mathbb{R}^p}\{(\alpha^T h)^*(\beta) + \sigma_X(-\beta)\}\end{aligned}$$

Par suite

$$\sup_{\substack{\alpha\geq 0\\ \alpha\in\mathbb{R}^{p+1}}} \inf_{\substack{x\in X\\ y\in\mathbb{R}^{p+1}}} \{F(y) + \langle \alpha, h(x) - y\rangle\}$$

$$\begin{aligned}&= \sup_{\substack{\alpha\geq 0\\ \alpha\in\mathbb{R}^{p+1}}} \{-F^*(\alpha) - \inf_{\beta\in\mathbb{R}^p}\{(\alpha^T h)^*(\beta) + \sigma_X(-\beta)\}\\ &= \sup_{\substack{\beta\in\mathbb{R}^p\\ \alpha\in\mathbb{R}^{p+1}_+}} \{-F^*(\alpha) - (\alpha^T h)^*(\beta) - \psi^*_X(-\beta)\}\end{aligned}$$

i.e., $\sup(D) = \sup(D^*)$. $\Box$

Corollaire 2.1

Supposons ques les hypothèses $(\hat{H}_1)$- $(\hat{H}_3)$ sont satisfaites. Alors, les problèmes (S) et (D^*) sont en dualité faible.

Preuve. D'après les Propositions 2.1 et 2.2, on a respectivement

$$\inf(S) = \inf(S^{'}) \quad \text{et} \quad \sup(D) = \sup(D^*).$$

Or la dualité lagrangienne faible entraine que $\inf(S^{'}) \geq \sup(D)$. D'où $\inf(S) \geq \sup(D^*)$. □

Posons

$$g(x,y) = (g_1(x,y), ..., g_p(x,y), g_{p+1}(x,y))^T = h(x) - y$$

i.e.,

$$g_i(x,y) = x_i - y_i, i = 1, ..., p \quad \text{et} \quad g_{p+1}(x,y) = v(x) - y_{p+1}.$$

Soient

$$\mathcal{L} = \left\{ i \in \{1, ..., p+1\} / \, g_i \text{ est affine} \right\}$$

et

$$\mathcal{N} = \left\{ i \in \{1, ..., p+1\} / \, g_i \text{ est convexe et non affine} \right\}.$$

Considérons les conditions de qualification des contraintes suivantes

$\overline{(CQ)}$ $\exists x = (x_1, ..., x_p)^T \in \mathrm{ri}X$, $\exists y = (y_1, ..., y_p, y_{p+1})^T \in \mathbb{R}^{p+1}$, $\exists z \in Y$, tels que

$$x_i \leq y_i, i = 1, ..., p \quad \text{et} \quad f(x, z) < y_{p+1}$$

(CQ) $\exists x = (x_1, ..., x_p)^T \in \mathrm{ri}X$, $\exists y = (y_1, ..., y_p, y_{p+1})^T \in \mathbb{R}^{p+1}$, $\exists z \in Y$, tels que

$$g_i(x, y) \leq 0, \forall i \in \mathcal{L} \quad \text{et} \quad g_i(x, y) < 0, \forall i \in \mathcal{N}.$$

Dans notre cas, on a $\mathcal{L} = \{1, ..., p\}$ et $\mathcal{N} = \{p + 1\}$.

Remarque 2.4

La condition (CQ) est utilisée dans la littérature pour obtenir la dualité Lagrangienne forte pour les problèmes convexes.

Exercice Montrer que les conditions (CQ) et $\overline{(CQ)}$ sont équivalentes.

Théorème 2.2.

Supposons ques les hypothèses $(\hat{H}_1)$- $(\hat{H}_3)$ sont satisfaites. Alors, les problèmes (S) et (D^*) sont en dualité forte de Fenchel-Lagrange.

Preuve. Montrons que $\inf(S) = \sup(D^*)$ et que le problème (D^*) admet des solutions. D'après la Proposition 2.1, on a

$$\inf(S) = \inf(S^{'}) > -\infty.$$

La condition (CQ) entraine que $(S^{'})$ et (D) sont en dualité lagrangienne forte. Donc

$$\inf(S^{'}) = \sup(D)$$

et le problème dual (D) admet une solution.

Il existe alors $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}_+^{p+1}$ tel que
$\inf(S^{'}) = \sup(D)$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\substack{\alpha \geq 0 \\ \alpha \in \mathbb{R}^{p+1}}} \inf_{\substack{x \in X \\ y \in \mathbb{R}^{p+1}}} \{F(y) + \langle \alpha, h(x) - y \rangle\} \\
&= \inf_{\substack{x \in X \\ y \in \mathbb{R}^{p+1}}} \{F(y) + \langle \bar{\alpha}, h(x) - y \rangle\} \\
&= -\sup_{\substack{x \in X \\ y \in \mathbb{R}^{p+1}}} \{\bar{\alpha}^T y - F(y) - \bar{\alpha}^T h(x)\} \\
&= -\sup_{y \in \mathbb{R}^{p+1}} \{\bar{\alpha}^T y - F(y)\} - \sup_{x \in \mathbb{R}^p} \{\langle 0, x \rangle - \bar{\alpha}^T h(x) - \psi_X(x)\} \\
&= -F^*(\bar{\alpha}) - (\bar{\alpha}^T h + \psi_X)^*(0).
\end{aligned}
$$

Or $\mathrm{ri}(\mathrm{dom}(\alpha^T h)) \cap \mathrm{ri}(\mathrm{dom}\psi_X) = \mathrm{ri}X \neq \emptyset$. D'après le Theéorème 2.1, on a

$$\begin{array}{rcl} \inf(S^{'}) & = & -F^*(\bar{\alpha}) - (\bar{\alpha}^T h)^* \Box (\psi_X)^*(0) \\ & = & -F^*(\bar{\alpha}) - \inf_{\beta \in \mathbb{R}^p} \{(\bar{\alpha}^T h)^*(\beta) + (\psi_X)^*(-\beta)\} \\ & = & -F^*(\bar{\alpha}) - \inf_{\beta \in \mathbb{R}^p} \{(\bar{\alpha}^T h)^*(\beta) + \sigma_X(-\beta)\} \end{array}$$

et l'infimum de la partie droite est atteint en un certain $\bar{\beta}$. Par suite, on a

$$\inf(S^{'}) = \sup(D) = -F^*(\bar{\alpha}) - (\bar{\alpha}^T h)^*(\bar{\beta}) - \sigma_X(-\bar{\beta}) = \sup(D^*).$$

où la dernière égalité découle de la Proposition 2.2. Donc $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ est solution du problème (D^*). Finalement, en utilisant le fait que $\inf(S^{'}) = \inf(S)$, on obtient $\inf(S) = \sup(D^*)$. On déduit alors qu'on a une dualité forte de Fenchel-Lagrange entre (S) et (D^*). $\square$

2.4 Conditions d'optimalité pour le problème biniveaux (S)

Dans cette section, on donne des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour le problème d'optimisation à deux niveaux (S) via la dualité de Fenchel-Lagrange.
Nous donnons les conditions nécessaires d'optimalité suivantes

Théorème 2.2.

Supposons ques les hypothèses $(\hat{H}_1)$- $(\hat{H}_3)$ sont satisfaites. Soit $\bar{x}$ une solution de (S). Alors, il existe $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \mathbb{R}_+^{p+1} \times \mathbb{R}^p$ solution de (D^*) vérifiant les conditions suivantes avec $\bar{x}$

i) $\bar{\alpha} \in \partial F(h(\bar{x}))$

i) $(\bar{\alpha}^T h)(\bar{x}) + (\bar{\alpha}^T h)^*(\bar{\beta}) = \langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle$

iii) $\sigma_X(-\bar{\beta}) + \langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle = 0.$

Preuve. D'après le Théorème 2.2, les problèmes (S) et (D^*) sont en dualité forte de Fenchel-Lagrange. Il existe alors $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^p$ tel que

$$F(h(\bar{x})) = -F^*(\bar{\alpha}) - (\bar{\alpha}^T h)^*(\bar{\beta}) - \sigma_X(-\bar{\beta})$$

Donc

$$\underbrace{\{F(h(\bar{x})) + F^*(\bar{\alpha}) - \langle \bar{\alpha}, h(\bar{x}) \rangle\}}_{\geq 0 \ \text{ inégalité de Fenchel}} + \underbrace{\{\langle \bar{\alpha}, h(\bar{x}) \rangle + (\bar{\alpha}^T h)^*(\bar{\beta}) - \langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle\}}_{\geq 0}$$

$$\underbrace{\{\langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle + \sigma_X(-\bar{\beta})}_{\geq 0} = 0.$$

Par suite

i) $F(h(\bar{x})) + F^*(\bar{\alpha}) - \langle \bar{\alpha}, h(\bar{x}) \rangle = 0$

i) $(\bar{\alpha}^T h)(\bar{x}) + (\bar{\alpha}^T h)^*(\bar{\beta}) = \langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle$

iii) $\sigma_X(-\bar{\beta}) + \langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle = 0$

En utilisant le fait que

$$F(h(\bar{x})) + F^*(\bar{\alpha}) - \langle \bar{\alpha}, h(\bar{x}) \rangle = 0 \Longleftrightarrow \bar{\alpha} \in \partial F(h(\bar{x}))$$

on obtient le résultat. $\square$

Nous donnons les conditions suffisantes d'optimalité suivantes.

Théorème 2.3.

Supposons que les hypothèses $(\hat{H}_1)$- $(\hat{H}_3)$ sont satisfaites. Soient $\bar{x}$ et $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ des points réalisables de (S) et (D^*) respectivement. Supposons de plus que les conditions $i) - iii)$ dans le Théorème 2.2 sont satisfaites par $\bar{x}$ et $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$. Alors, $\bar{x}$ et $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ sont solutions de (S) et (D^*) respectivement.

Preuve. Les propriétés $i) - iii)$ entrainent que

$$F(h(\bar{x})) + F^*(\bar{\alpha}) + (\bar{\alpha}^T h)^*(\bar{\beta}) + \sigma_X(-\bar{\beta}) = 0.$$

Donc

$$\sup(D^*) \geq -F^*(\bar{\alpha}) - (\bar{\alpha}^T h)^*(\bar{\beta}) - \sigma_X(-\bar{\beta}) = F(h(\bar{x})) \geq \inf(S).$$

De plus, d'après la dualité faible, on a $\inf(S) \geq \sup(D^*)$.

Par suite

$$\inf(S) = \sup(D^*) = -F^*(\bar{\alpha}) - (\bar{\alpha}^T h)^*(\bar{\beta}) - \sigma_X(-\bar{\beta}) = F(h(\bar{x})).$$

On déduit que $\bar{x}$ est solution de (S) et $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ est solution de (D^*). $\square$

Corollaire 2.2.

Supposons ques les hypothèses $(\hat{H}_1)$-$(\hat{H}_3)$ sont satisfaites. Soient $\bar{x}$ et $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ des points réalisables de (S) et (D^*) respectivement. Alors, $\bar{x}$ et $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ sont solutions de (S) et (D^*) respectivement si et seulement si ils satisfont les conditions $i) - iii)$ du Théorème 2.2.

Preuve. Le résultat découle des Théorèmes 2.2 et 2.3. $\square$

2.5 Passage de l'optimisation à deux niveaux à l'optimisation à un seul niveau

Proposition 2.3

Supposons que l'hypothèse $(\hat{H}_3)$ est satisfaite. Soit $x^* \in \mathbb{R}^p$. Alors

$$v^*(x^*) = f^*_{\mathbb{R}\times Y}(x^*, 0).$$

Preuve. Notons d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $v(x)$ est un réel fini. Soit $x^* \in \mathbb{R}^p$. On a

$$\begin{aligned} v^*(x^*) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^p} \left\{\langle x^*, x\rangle - v(x)\right\} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^p} \left\{\langle x^*, x\rangle - \inf_{y\in Y} f(x,y)\right\} \\ &= \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^p\times Y} \left\{\left\langle \begin{pmatrix} x^* \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle - f(x,y)\right\} = f^*_{\mathbb{R}^p\times Y}(x^*, 0). \end{aligned}$$

Proposition 2.4

Supposons ques les hypothèses $(\hat{H}_1)$- $(\hat{H}_3)$ sont satisfaites. Alors, la résolution du dual (D^*) est équivalente à la résolution des problèmes à un seul niveau suivants

$$(D_1^*) : \max_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\alpha_{p+1})^T \\ \alpha\geq 0,\alpha_{p+1}=0 \\ \beta=(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)}} \left\{ -F^*(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,0) - \sigma_X(-\beta) \right\}$$

et

$$(D_2^*) : \max_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\alpha_{p+1})^T \\ \alpha\geq 0,\alpha_{p+1}>0, \\ \beta\in\mathbb{R}^p}} \left\{ -F^*(\alpha) - \alpha_{p+1} f^*_{\mathbb{R}^p\times Y}\left(\frac{\beta-(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)}{\alpha_{p+1}}, 0\right) - \sigma_X(-\beta) \right\}$$

dans le sens que $\sup(\mathcal{D}^*) = \max\left\{\sup(\mathcal{D}_1^*), \sup(\mathcal{D}_2^*)\right\}$, et que (α,β) est solution de $(\mathcal{D}^*)$, si et seulement si (α,β) est solution de $(\mathcal{D}_i^*)$, avec, $\sup(\mathcal{D}_i^*) \geq \sup(\mathcal{D}_j^*)$, $i \neq j$, $i,j \in \{1,2\}$.

Preuve. En remplaçant $h(x)$ par son expression $(x, v(x))$ dans la formulation du problème dual $(\mathcal{D}^*)$, on obtient

$$(\mathcal{D}^*) \qquad \max_{\substack{\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_p \geq 0 \\ \alpha_{p+1} \geq 0 \\ \beta \in \mathbb{R}^p}} \left\{ -F^*(\alpha) - (\alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_p h_p + \alpha_{p+1} v(.))^*(\beta) - \sigma_X(-\beta) \right\}.$$

Donc
$\sup(\mathcal{D}^*) =$

$$\sup \left\{ \sup_{\substack{\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_p \geq 0 \\ \alpha_{p+1} = 0 \\ \beta \in \mathbb{R}^p}} \left\{ -F^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 0) - \underbrace{(\alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_p h_p)^*(\beta)}_{\mathcal{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta)} - \sigma_X(-\beta) \right\}, \right.$$

$$\left. \sup_{\substack{\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_p \geq 0 \\ \alpha_{p+1} > 0 \\ \beta \in \mathbb{R}^p}} \left\{ -F^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}) - (\alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_p h_p + \alpha_{p+1} v(.))^*(\beta) - \sigma_X(-\beta) \right\} \right\}$$

Calculons la valeur $\mathcal{A}(\alpha_1, ..., \alpha_p, \beta)$. On a

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{A}(\alpha_1, ..., \alpha_p, \beta) & = & \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^p} \left\{ \langle \beta, t \rangle - (\alpha_1 h_1 + ... + \alpha_p h_p)(t) \right\} \\ & = & \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^p} \left\{ \langle \beta, t \rangle - (\alpha_1 t_1 + ... + \alpha_p t_p) \right\} \\ & = & \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^p} \left\langle \beta - (\alpha_1, ..., \alpha_p)^T, t \right\rangle \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & \text{si } \beta \neq (\alpha_1, ..., \alpha_p) \\ 0 & \text{si } \beta = (\alpha_1, ..., \alpha_p) \end{array} \right. \end{array}$$

avec $t = (t_1, ..., t_p)^T$. Par suite

$$\sup(\mathcal{D}^*) = \sup\left\{ \sup_{\substack{\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_p \geq 0 \\ \alpha_{p+1} = 0 \\ \beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)^T}} \left\{ -F^*(\alpha_1, ..., \alpha_p, 0) - \sigma_X(-\beta) \right\}, \right.$$

$$\left. \sup_{\substack{\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_p \geq 0 \\ \alpha_{p+1} > 0 \\ \beta \in \mathbb{R}^p}} \left\{ -F^*(\alpha_1, ..., \alpha_p, \alpha_{p+1}) - (\alpha_1 h_1 + ... + \alpha_p h_p + \alpha_{p+1} v(.))^*(\beta) - \sigma_X(-\beta) \right\} \right\}.$$

Par ailleurs, pour $\alpha_{p+1} > 0$, on a

$$(\alpha_1 h_1 + ... + \alpha_p h_p + \alpha_{p+1} v(.))^*(\beta)$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{t\in\mathbb{R}^p} \left\{ \langle \beta, t\rangle - \alpha_1 t_1 ... - \alpha_p t_p - \alpha_{p+1} v(t) \right\} \\
&= \alpha_{p+1} \sup_{t\in\mathbb{R}^p} \left\{ \left\langle \frac{\beta - (\alpha_1, ..., \alpha_p)^T}{\alpha_{p+1}}, t \right\rangle - v(t) \right\} \\
&= \alpha_{p+1} v^* \left(\frac{\beta - (\alpha_1, ..., \alpha_p)^T}{\alpha_{p+1}} \right) \\
&= \alpha_{p+1} f^*_{\mathbb{R}^p \times Y} \left(\frac{\beta - (\alpha_1, ..., \alpha_p)^T}{\alpha_{p+1}}, 0 \right)
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de la Proposition 2.3. Considérons maintenant les problèmes de maximisation suivants

$$(\mathcal{D}_1^*) \qquad \max_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_p,\alpha_{p+1})^T \\ \beta=(\alpha_1,\dots,\alpha_p) \\ \alpha_1\geq 0,\dots,\alpha_p\geq 0,\alpha_{p+1}=0}} \Big\{ -F^*(\alpha) - \sigma_X(-\beta) \Big\}$$

et

$$(\mathcal{D}_2^*) \qquad \max_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_p,\alpha_{p+1})^T \\ \beta\in\mathbb{R}^p \\ \alpha_1\geq 0,\dots,\alpha_p\geq 0,\alpha_{p+1}>0}} \Big\{ -F^*(\alpha) - \alpha_{p+1} f^*_{\mathbb{R}^p\times Y}\Big(\frac{\beta-(\alpha_1,\dots,\alpha_p)}{\alpha_{p+1}},0\Big) - \sigma_X(-\beta)$$

Alors, on a

$$\sup(\mathcal{D}^*) = \max\big\{\sup(\mathcal{D}_1^*), \sup(\mathcal{D}_2^*)\big\}.$$

Par suite (α,β) est solution de $(\mathcal{D}^*)$, si et seulement si (α,β) est solution de $(\mathcal{D}_i^*)$, avec, $\sup(\mathcal{D}_i^*) \geq \sup(\mathcal{D}_j^*)$, $i\neq j$, $i,j\in\{1,2\}$. $\square$

Par conséquent, via cette dualité forte, la résolution du problème (S) est équivalente à la résolution des deux problèmes à un seul niveau $(\mathcal{D}_1^*)$ et $(\mathcal{D}_2^*)$.

Example Soient $X = Y = [0, 1]$, f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$, par

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y + \frac{1}{4}y^4 \quad \text{et} \quad F(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}t^2 & \text{si } x \geq 0, t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, les hypothèses $(\hat{H}_1)$- $(\hat{H}_3)$ sont satisfaites. Pour $x \in X$, on a

$$\inf \mathcal{P}(x) = v(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Le problème d'optimisation à deux niveaux qu'on considère est

$$(S) \qquad \operatorname*{Min}_{x \in X} F(x, v(x)) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4$$

qui admet la solution unique $\bar{x} = 0$, et $\inf(S) = 0$. Vérifions ce résultat en utilisant notre approche. Notons qu'on a dualité forte de Fenchel-Lagrange entre (S) et $(\mathcal{D}^*)$ (Theorem 2.2). Calculons $f^*_{\mathbb{R}\times Y}$ et F^*.

On trouve

$$f^*_{\mathbb{R}\times Y}(x^*,y^*) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^{*2} + y^* - \frac{5}{4} & \text{if } \; y^* > 2,\, x^* \in \mathbb{R} \\ \\ \frac{1}{2}x^{*2} + \frac{5}{4}(y^*-1)^{\frac{4}{3}} & \text{si } \; 1 \le y^* \le 2,\, x^* \in \mathbb{R} \\ \\ \frac{1}{2}x^{*2} & \text{si } y^* < 1,\, x^* \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et

$$F^*(x^*,t^*) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \; (x^*,t^*) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } \; (x^*,t^*) = (0,0). \end{cases}$$

Par ailleurs, pour les problèmes $(\mathcal{D}_i^*)$, $i = 1, 2$, on a

$$\sup(\mathcal{D}_2^*) = -\infty \quad \text{and} \quad \sup(\mathcal{D}_1^*) = 0$$

où $\sup(\mathcal{D}_1^*)$ est atteint en $\binom{(\bar\alpha_1,\bar\alpha_2)^T}{\bar\beta}$. Par suite $\sup(\mathcal{D}^*) = \sup(\mathcal{D}_1^*) = 0$, est atteint en $\binom{(\bar\alpha_1,\bar\alpha_2)^T}{\bar\beta} = \binom{(0,0)^T}{0}$. Par dualité forte on a $\sup(\mathcal{D}^*) = \inf(S) = 0$.
Calculons la solution de (S) en utilisant les conditions d'optimalité. On a $h(x) = (x, \frac{1}{2}x^2)^T$.

Alors, $\bar{x} \in X$, est solution de (S) si et seulement si

1) $F(h(\bar{x})) + F^*(\bar{\alpha}) = \langle \bar{\alpha}, h(\bar{x}) \rangle$,

2) $\langle \bar{\alpha}, h(\bar{x}) \rangle + (\bar{\alpha}^T h)^*(\bar{\beta}) = \langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle$,

3) $\sigma_{[0,1]}(-\bar{\beta}) + \langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle = 0$,

avec $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)^T$. D'après la première équation, on a

$$\bar{x}^2 \left(1 + \frac{1}{4} \bar{x}^2 \right) = 0$$

qui admet la solution unique $\bar{x} = 0$. De plus, $\bar{x}$ satisfait avec $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ les équations 2) et 3). Donc, $\bar{x}$ est solution unique de (S).

[1] A. Aboussoror and P. Loridan, *Existence and approximation results involving regularized constrained Stackelberg problems*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *188 (1994), pp 101-117.*

[2] A. Aboussoror, S. Adly and F. E. Saissi, *An Extended Fenchel-Lagrange Duality Approach and Optimality Conditions for Strong Bilevel Programming Problems, to appear in SIAM Journal on Optimization.*

[3] A. Aboussoror and S. Adly, *A Fenchel-Lagrange duality approach for a bilevel programming problem with extremal value function*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, *149 (2011), pp. 254-268.*

[4] P. Loridan and J. Morgan, *On strict ϵ-solutions for two-level optimisation problem*,Operations Research 90 in Vinna (Eds. W. Buhler, G. Feichtinger, F. Hartl, F. J. Radermacher and P. Stahly), pp. 165-172, Springer Verlag, Berlin 1992.

[5] G. Wanka, R. I. Boţ, *On the relations between different dual problems in convex mathematical programming, In P. Chamoni, R. Leisten, A. Martin, J. Minnermann, H. Stadtler (Eds.)*., Operations Research Proceeding 2001, 255-262, Springer, Berlin 2002.