INVARIANTS DES VARIETES ISSUS DU CROCHET DE KAUFFMAN

H. Abchir

Equipe de Géométrie, Topologie et Applications de l'université de Marrakech

FST de Marrakech.

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

1. Introduction.

Plan de l'exposé

1. Introduction.
2. Notion de chirurgie et théorème de Lickorish.

Plan de l'exposé

1. Introduction.
2. Notion de chirurgie et théorème de Lickorish.
3. Théorème de Kirby.

Plan de l'exposé

1. Introduction.
2. Notion de chirurgie et théorème de Lickorish.
3. Théorème de Kirby.
4. Algèbre de Temperley-Lieb.

Plan de l'exposé

1. Introduction.
2. Notion de chirurgie et théorème de Lickorish.
3. Théorème de Kirby.
4. Algèbre de Temperley-Lieb.
5. Idempotents de Jones Wenzl.

Plan de l'exposé

1. Introduction.
2. Notion de chirurgie et théorème de Lickorish.
3. Théorème de Kirby.
4. Algèbre de Temperley-Lieb.
5. Idempotents de Jones Wenzl.
6. L'invariant

Introduction

Introduction

- Rappels sur la TQFT.

Introduction

- Rappels sur la TQFT.
- Rappels sur le crochet de Kauffman.

THEOREME DE LICKORISH

THEOREME DE LICKORISH

- Chirurgie :

THEOREME DE LICKORISH

- Chirurgie :
- Théorème de Lickorish :

THEOREME DE LICKORISH

- Chirurgie :

- Théorème de Lickorish :

Theorem

(W. B. R. Lickorish, Ann. of Math. 1962) Toute 3*-variété compacte connexe orientable sans bord* M *peut être obtenue par chirurgie à partir de* S^3 *le long d'un entrelacs pondéré* $L = \bigsqcup_{i=1}^{n}(K_i, n_i)$*,* $n_i \in \mathbb{Z}$*.*

THEOREME DE KIRBY

THEOREME DE KIRBY

- Mouvements de Kirby :

THEOREME DE KIRBY

- Mouvements de Kirby :
- Théorème de Kirby :

THEOREME DE KIRBY

- Mouvements de Kirby :

- Théorème de Kirby :

Theorem

(R. Kirby, Invent. Math. 1978) Deux entrelacs pondérés dans S^3 donnent par chirurgie la même 3-variété orientée si et seulement si l'un peut être obtenu à partir de l'autre par une suite finie de mouvements K_1 et K_2.

ALGEBRE DE TEMPERLEY-LIEB

ALGEBRE DE TEMPERLEY-LIEB

- Soit Σ une surface compacte orientée avec un ensemble fini de points spécifiés sur $\partial\Sigma$. Cet ensemble peut être vide.

ALGEBRE DE TEMPERLEY-LIEB

- Soit Σ une surface compacte orientée avec un ensemble fini de points spécifiés sur $\partial\Sigma$. Cet ensemble peut être vide.
- Un diagramme d'entrelacs dans Σ est un ensemble fini d'arcs, de courbes fermées dans Σ, avec un nombre fini de croisements transverses comportant l'information dessus dessous. Les points bords des arcs doivent être exactement les points spécifiés sur $\partial\Sigma$.

ALGEBRE DE TEMPERLEY-LIEB

- Soit Σ une surface compacte orientée avec un ensemble fini de points spécifiés sur $\partial\Sigma$. Cet ensemble peut être vide.
- Un diagramme d'entrelacs dans Σ est un ensemble fini d'arcs, de courbes fermées dans Σ, avec un nombre fini de croisements transverses comportant l'information dessus dessous. Les points bords des arcs doivent être exactement les points spécifiés sur $\partial\Sigma$.
- Deux diagrammes sont supposés identiques si l'un d'eux est image de l'autre par un homéomorphisme de Σ sur Σ qui est isotope à l'identité et dont la restriction à $\partial\Sigma$ est l'identité.

Definition

Soit $A \in \mathbb{C}$ fixé. On note $S(\Sigma)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par les diagrammes d'entrelacs dans Σ quotienté par les relations suivantes :

Definition

Soit $A \in \mathbb{C}$ fixé. On note $S(\Sigma)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par les diagrammes d'entrelacs dans Σ quotienté par les relations suivantes :

1. $D \cup (\text{ une courbe triviale fermee}) = (-A^{-2} - A^2)D.$

Definition

Soit $A \in \mathbb{C}$ fixé. On note $S(\Sigma)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par les diagrammes d'entrelacs dans Σ quotienté par les relations suivantes :

1. $D \cup (\text{ une courbe triviale fermee}) = (-A^{-2} - A^2)D$.
2. Figure 1

Definition

Soit $A \in \mathbb{C}$ fixé. On note $S(\Sigma)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par les diagrammes d'entrelacs dans Σ quotienté par les relations suivantes :

1. $D \cup (\text{ une courbe triviale fermee}) = (-A^{-2} - A^2)D.$
2. Figure 1

On appelle $S(\Sigma)$ l'espace skein de Σ.

Definition

Soit $A \in \mathbb{C}$ fixé. On note $S(\Sigma)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par les diagrammes d'entrelacs dans Σ quotienté par les relations suivantes :

1. $D \cup (\text{ une courbe triviale fermee}) = (-A^{-2} - A^2)D$.
2. Figure 1

On appelle $S(\Sigma)$ l'espace skein de Σ.

Exemples :

Definition

Soit $A \in \mathbb{C}$ fixé. On note $S(\Sigma)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par les diagrammes d'entrelacs dans Σ quotienté par les relations suivantes :

1. $D \cup (\text{ une courbe triviale fermee}) = (-A^{-2} - A^2)D$.
2. Figure 1

On appelle $S(\Sigma)$ l'espace skein de Σ.

Exemples :

1. $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$. Générateur : le diagramme vide.

Definition

Soit $A \in \mathbb{C}$ fixé. On note $S(\Sigma)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par les diagrammes d'entrelacs dans Σ quotienté par les relations suivantes :

1. $D \cup (\text{ une courbe triviale fermee}) = (-A^{-2} - A^2)D$.
2. Figure 1

On appelle $S(\Sigma)$ l'espace skein de Σ.

Exemples :

1. $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$. Générateur : le diagramme vide.
2. $S(S^1 \times I) = \mathbb{C}[\alpha]$, qui est une algèbre. Etant donnés deux diagrammes dans deux anneaux. On identifie une composante du bord de l'un des deux anneaux à une composante du bord de l'autre. On obtient ainsi un nouvel anneau. On définit le produit des deux diagrammes comme étant leur réunion. L'élément α engendre l'algèbre et α^0 désigne le diagramme vide dans l'anneau.

Cas Particulier :

Cas Particulier :

- On note $(D^2, 2n)$ le rectangle avec n points spécifiés sur chacune de ses largeurs.

Cas Particulier :

- On note $(D^2, 2n)$ le rectangle avec n points spécifiés sur chacune de ses largeurs.
- L'espace skein $S(D^2, 2n)$ est engendré par tous les diagrammes sans croisements et sans courbes fermées. On montre qu'il est de dimension $\frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$ (nombre de Catalan).

Cas Particulier :

- On note $(D^2, 2n)$ le rectangle avec n points spécifiés sur chacune de ses largeurs.
- L'espace skein $S(D^2, 2n)$ est engendré par tous les diagrammes sans croisements et sans courbes fermées. On montre qu'il est de dimension $\frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$ (nombre de Catalan).
- On définit dans $S(D^2, 2n)$ un produit de diagrammes par juxtaposition des rectangles en identifiants les points bords (Figure 2).

Cas Particulier :

- On note $(D^2, 2n)$ le rectangle avec n points spécifiés sur chacune de ses largeurs.
- L'espace skein $S(D^2, 2n)$ est engendré par tous les diagrammes sans croisements et sans courbes fermées. On montre qu'il est de dimension $\frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$ (nombre de Catalan).
- On définit dans $S(D^2, 2n)$ un produit de diagrammes par juxtaposition des rectangles en identifiants les points bords (Figure 2).
- Ce produit se prolonge en une application bilinéaire bien définie qui fait de $S(D^2, 2n)$ une algèbre notée TL_n dite n^{ieme} algèbre de Temperley-Lieb.

Cas Particulier :

- On note $(D^2, 2n)$ le rectangle avec n points spécifiés sur chacune de ses largeurs.
- L'espace skein $S(D^2, 2n)$ est engendré par tous les diagrammes sans croisements et sans courbes fermées. On montre qu'il est de dimension $\frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$ (nombre de Catalan).
- On définit dans $S(D^2, 2n)$ un produit de diagrammes par juxtaposition des rectangles en identifiants les points bords (Figure 2).
- Ce produit se prolonge en une application bilinéaire bien définie qui fait de $S(D^2, 2n)$ une algèbre notée TL_n dite n^{ieme} algèbre de Temperley-Lieb.
- TL_n est engendré par les n éléments $\{1, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ de la Figure 3.

IDEMPOTENTS DE JONES-WENZL

Etant donné un diagramme dans TL_n. Si on le regarde dans le plan $\mathbb{R}^2$ puis on le ferme en joignant les points du bord gauche à ceux du bord droit par n arcs parallèles, on obtient un élément de $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$. Cette opération définit une application linéaire de TL_n dans $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$

$$TL_n \longrightarrow S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}.$$

IDEMPOTENTS DE JONES-WENZL

Etant donné un diagramme dans TL_n. Si on le regarde dans le plan $\mathbb{R}^2$ puis on le ferme en joignant les points du bord gauche à ceux du bord droit par n arcs parallèles, on obtient un élément de $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$. Cette opération définit une application linéaire de TL_n dans $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$

$$TL_n \longrightarrow S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}.$$

Lemma

On suppose que pour tout entier k, $k \leq n$, A n'est pas une racine $4k$-ième de l'unité. Alors il existe un unique élément $f^{(n)} \in TL_n$ tel que :

IDEMPOTENTS DE JONES-WENZL

Etant donné un diagramme dans TL_n. Si on le regarde dans le plan $\mathbb{R}^2$ puis on le ferme en joignant les points du bord gauche à ceux du bord droit par n arcs parallèles, on obtient un élément de $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$. Cette opération définit une application linéaire de TL_n dans $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$

$$TL_n \longrightarrow S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}.$$

Lemma

On suppose que pour tout entier k, $k \leq n$, A n'est pas une racine $4k$-ième de l'unité. Alors il existe un unique élément $f^{(n)} \in TL_n$ tel que :

1. $f^{(n)} e_i = 0 = e_i f^{(n)}$ *pour tout* $1 \leq i \leq (n-1)$,

IDEMPOTENTS DE JONES-WENZL

Etant donné un diagramme dans TL_n. Si on le regarde dans le plan $\mathbb{R}^2$ puis on le ferme en joignant les points du bord gauche à ceux du bord droit par n arcs parallèles, on obtient un élément de $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$. Cette opération définit une application linéaire de TL_n dans $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$

$$TL_n \longrightarrow S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}.$$

Lemma

On suppose que pour tout entier k, $k \leq n$, A n'est pas une racine $4k$-ième de l'unité. Alors il existe un unique élément $f^{(n)} \in TL_n$ tel que :

1. $f^{(n)} e_i = 0 = e_i f^{(n)}$ *pour tout* $1 \leq i \leq (n-1)$,
2. $(f^{(n)} - 1)$ *appartient à la sous algèbre engendrée par* $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$,

IDEMPOTENTS DE JONES-WENZL

Etant donné un diagramme dans TL_n. Si on le regarde dans le plan $\mathbb{R}^2$ puis on le ferme en joignant les points du bord gauche à ceux du bord droit par n arcs parallèles, on obtient un élément de $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$. Cette opération définit une application linéaire de TL_n dans $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$

$$TL_n \longrightarrow S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}.$$

Lemma

On suppose que pour tout entier k, $k \leq n$, A n'est pas une racine $4k$-ième de l'unité. Alors il existe un unique élément $f^{(n)} \in TL_n$ tel que :

1. $f^{(n)} e_i = 0 = e_i f^{(n)}$ *pour tout* $1 \leq i \leq (n-1)$,
2. $(f^{(n)} - 1)$ *appartient à la sous algèbre engendrée par* $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$,
3. $f^{(n)} f^{(n)} = f^{(n)}$,

IDEMPOTENTS DE JONES-WENZL

Etant donné un diagramme dans TL_n. Si on le regarde dans le plan $\mathbb{R}^2$ puis on le ferme en joignant les points du bord gauche à ceux du bord droit par n arcs parallèles, on obtient un élément de $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$. Cette opération définit une application linéaire de TL_n dans $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$

$$TL_n \longrightarrow S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}.$$

Lemma

On suppose que pour tout entier k, $k \leq n$, A n'est pas une racine $4k$-ième de l'unité. Alors il existe un unique élément $f^{(n)} \in TL_n$ tel que :

1. $f^{(n)} e_i = 0 = e_i f^{(n)}$ *pour tout* $1 \leq i \leq (n-1)$,
2. $(f^{(n)} - 1)$ *appartient à la sous algèbre engendrée par* $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$,
3. $f^{(n)} f^{(n)} = f^{(n)}$,
4. *et* $\Delta_n = (-1)^n (A^{2(n+1)} - A^{-2(n+1)})/(A^2 - A^{-2})$, *où* Δ_n *désigne la fermeture de* $f^{(n)}$ *dans le plan.*

Preuve :

Preuve :

- si $f^{(n)}$ existe alors $(1 - f^{(n)})$ est l'identité de la sous algèbre engendrée par $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$. Donc $f^{(n)}$ est unique.

Preuve :

- si $f^{(n)}$ existe alors $(1 - f^{(n)})$ est l'identité de la sous algèbre engendrée par $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$. Donc $f^{(n)}$ est unique.
- Soit $f^{(0)}$ le diagramme vide ($TL_0 = S(D^2, 0) = \mathbb{C}$). On a $\Delta_0 = 1$. Soit $f^{(1)} = 1$ et par récurrence, supposons que $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}$ ont été définis avec les propriétés énoncées.

Preuve :

- si $f^{(n)}$ existe alors $(1 - f^{(n)})$ est l'identité de la sous algèbre engendrée par $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$. Donc $f^{(n)}$ est unique.
- Soit $f^{(0)}$ le diagramme vide ($TL_0 = S(D^2, 0) = \mathbb{C}$). On a $\Delta_0 = 1$. Soit $f^{(1)} = 1$ et par récurrence, supposons que $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}$ ont été définis avec les propriétés énoncées.
- On suppose que $A^{4k} \neq 1$ pour tout entier $k \leq n+1$, ainsi $\Delta_k \neq 0$ pour $k \leq n$. On définit $f^{(n+1)} \in TL_{n+1}$ par la relation Figure 4.

Soit l'opération qui consiste à placer le rectangle dans l'anneau et joindre les n points du bord gauche aux n points du bord droit par n arcs parallèles encerclant l'anneau. Cette opération induit une application linéaire

$$TL_k \longrightarrow S(S^1 \times I) = \mathbb{C}[\alpha]$$

On note $S_k(\alpha)$ le polynôme image de $f^{(k)}$. On a $S_0(\alpha) = 1$, $S_1(\alpha) = \alpha$.
On montre la relation

$$S_{n+1}(\alpha) = \alpha S_n(\alpha) - S_{n-1}(\alpha)$$

C'est la relation de récurrence des polynômes de Chebyshev.

On note $S_k(\alpha)$ le polynôme image de $f^{(k)}$. On a $S_0(\alpha) = 1$, $S_1(\alpha) = \alpha$. On montre la relation

$$S_{n+1}(\alpha) = \alpha S_n(\alpha) - S_{n-1}(\alpha)$$

C'est la relation de récurrence des polynômes de Chebyshev. Si maintenant on envoie tout dans $S(\mathbb{R}^2)$, la relation devient

$$\Delta_{n+1} = (-A^2 - A^{-2})\Delta_n - \Delta_{n-1}$$

D'ou on tire la dernière relation du lemme.

$\square$

L'INVARIANT

L'INVARIANT

Definition

Pour tout entier r donné, $r \leq 2$, soit $\omega \in S(S^1 \times I)$ l'élément défini par

$$\omega = \sum_{n=0}^{r-2} \Delta_n S_n(\alpha)$$

L'INVARIANT

Definition

Pour tout entier r donné, $r \leq 2$, soit $\omega \in S(S^1 \times I)$ l'élément défini par

$$\omega = \sum_{n=0}^{r-2} \Delta_n S_n(\alpha)$$

Si D est un diagramme planaire d'un entrelacs à n composantes ordonnées, D définit une application multilinéaire

$$\langle\, ,\ ,\dots,\ \rangle_D : S(S^1 \times I) \times S(S^1 \times I) \times \dots S(S^1 \times I) \longrightarrow S(\mathbb{R}^2)$$

Figure 5.

L'INVARIANT

Definition

Pour tout entier r donné, $r \leq 2$, soit $\omega \in S(S^1 \times I)$ l'élément défini par

$$\omega = \sum_{n=0}^{r-2} \Delta_n S_n(\alpha)$$

Si D est un diagramme planaire d'un entrelacs à n composantes ordonnées, D définit une application multilinéaire

$$\langle\ ,\ ,\dots,\ \rangle_D : S(S^1 \times I) \times S(S^1 \times I) \times \dots S(S^1 \times I) \longrightarrow S(\mathbb{R}^2)$$

Figure 5.

Lemma

Soit A est une racine 4r-ième de l'unité, $r \geq 3$. Si D et D' sont deux diagrammes reliés par une suite de mouvements de Kirby 2, alors

$$\langle \omega, \omega, \dots, \omega \rangle_D = \langle \omega, \omega, \dots, \omega \rangle_{D'}$$

On désigne par U_-, U et U_+ le nœud trivial respectivement pondéré par -1, 0 et $+1$.

On désigne par U_-, U et U_+ le nœud trivial respectivement pondéré par -1, 0 et $+1$.

Definition

Enlacement de deux courbes simples fermées orientées et matrice d'enlacement d'un entrelacs L.

On désigne par U_-, U et U_+ le nœud trivial respectivement pondéré par -1, 0 et $+1$.

Definition

Enlacement de deux courbes simples fermées orientées et matrice d'enlacement d'un entrelacs L.

Theorem

Si M est une 3-variété compacte sans bord orientée est obtenue par chirurgie le long d'un entrelacs pondéré L de diagramme planaire D. Si $r \geq 3$ et A est une racine $4r$-ième de l'unité, alors

$$\langle \omega, \omega, \ldots, \omega \rangle_D \langle \omega \rangle_{U^+}^{-b_+} \langle \omega \rangle_{U^-}^{-b_-}$$

est un invariant bien défini de M, où b_+ et b_- sont respectivement les nombres de valeurs propres positives et négatives de la matrice d'enlacement de L.

On renormalise en substituant à ω, $\mu\omega$ où $\mu = \langle\omega\rangle_{U^+}\langle\omega\rangle_{U^-}$. On obtient un nouvel invariant $I_A(M)$

On renormalise en substituant à ω, $\mu\omega$ où $\mu = \langle\omega\rangle_{U^+}\langle\omega\rangle_{U^-}$. On obtient un nouvel invariant $I_A(M)$

$$I_A(S^3) = \frac{A^2 - A^{-2}}{\sqrt{-2r}}, \quad I_A(S^1 \times S^2) = 1$$