THEORIE DE MORSE ET DECOMPOSITION DES 3-VARIETES

H. Abchir

Equipe de Géométrie, Topologie et Applications de l'université de Marrakech

Séminaire de Géométrie et Toplogie

Plan de l’exposé

Plan de l'exposé

1. Problème

Plan de l'exposé

1. Problème
2. Décompositions et diagrammes de Heegaard.

Plan de l'exposé

1. Problème
2. Décompositions et diagrammes de Heegaard.
3. Théorie de Morse.

Plan de l'exposé

1. Problème
2. Décompositions et diagrammes de Heegaard.
3. Théorie de Morse.
4. Fonctions de Morse et diagrammes de Heegaard.

Problème

Problème

On se propose de comparer les 3-variétés topologiques .

Problème

On se propose de comparer les 3**-variétés topologiques .**

Une 3- variété topologique peut être munie d'une structure

Problème

On se propose de comparer les 3-variétés topologiques .

Une 3- variété topologique peut être munie d'une structure

1. pseudo-linéaire (i.e. objets de la catégorie PL),

Problème

On se propose de comparer les 3**-variétés topologiques** .

Une 3- variété topologique peut être munie d'une structure

1. pseudo-linéaire (i.e. objets de la catégorie PL),
2. ou différentielle **??**.

Problème

On se propose de comparer les 3**-variétés topologiques** .

Une 3- variété topologique peut être munie d'une structure

1. pseudo-linéaire (i.e. objets de la catégorie PL),
2. ou différentielle **??**.

Remarques :

1. Une 3-variété topologique ne supporte qu'une seule structure différentielle.

Problème

On se propose de comparer les 3**-variétés topologiques** .

Une 3- variété topologique peut être munie d'une structure

1. pseudo-linéaire (i.e. objets de la catégorie PL),
2. ou différentielle **??**.

Remarques :

1. Une 3-variété topologique ne supporte qu'une seule structure différentielle.
2. En dimensions 3 et 4 les structures PL et différentielles sont équivalentes, au sens que chaque structure différentielle détermine une structure PL et inversement.

Un pas vers la réponse : la conjecture de Poincaré

Un pas vers la réponse : la conjecture de Poincaré

1. 1900 : H. Poincaré conjecture que toute 3-variété M compacte connexe sans bord qui est une sphère d'homologie (i.e. a les mêmes groupes d'homologie que la sphère ou encore, vérifie $H_1(M) = 0$) est homéomorphe à S^3.

Un pas vers la réponse : la conjecture de Poincaré

1. 1900 : H. Poincaré conjecture que toute 3-variété M compacte connexe sans bord qui est une sphère d'homologie (i.e. a les mêmes groupes d'homologie que la sphère ou encore, vérifie $H_1(M) = 0$) est homéomorphe à S^3.
2. 1904 : H. Poincaré publia un contre exemple à sa conjecture initiale.

Un pas vers la réponse : la conjecture de Poincaré

1. 1900 : H. Poincaré conjecture que toute 3-variété M compacte connexe sans bord qui est une sphère d'homologie (i.e. a les mêmes groupes d'homologie que la sphère ou encore, vérifie $H_1(M) = 0$) est homéomorphe à S^3.
2. 1904 : H. Poincaré publia un contre exemple à sa conjecture initiale.
3. Forme finale de la conjecture :

Un pas vers la réponse : la conjecture de Poincaré

1. 1900 : H. Poincaré conjecture que toute 3-variété M compacte connexe sans bord qui est une sphère d'homologie (i.e. a les mêmes groupes d'homologie que la sphère ou encore, vérifie $H_1(M) = 0$) est homéomorphe à S^3.
2. 1904 : H. Poincaré publia un contre exemple à sa conjecture initiale.
3. Forme finale de la conjecture :
   On dit qu'une 3-variété M compacte connexe sans bord est une sphère d'homotopie si $\pi_1(M) = 0$ (et donc $\pi_i(M) = \pi_i(S^3)\ \forall i$).

Un pas vers la réponse : la conjecture de Poincaré

1. 1900 : H. Poincaré conjecture que toute 3-variété M compacte connexe sans bord qui est une sphère d'homologie (i.e. a les mêmes groupes d'homologie que la sphère ou encore, vérifie $H_1(M) = 0$) est homéomorphe à S^3.
2. 1904 : H. Poincaré publia un contre exemple à sa conjecture initiale.
3. Forme finale de la conjecture :
   On dit qu'une 3-variété M compacte connexe sans bord est une sphère d'homotopie si $\pi_1(M) = 0$ (et donc $\pi_i(M) = \pi_i(S^3)\ \forall i$).
4. **Remarque** : toute sphère d'homotopie est une sphère d'homologie.

Un pas vers la réponse : la conjecture de Poincaré

1. 1900 : H. Poincaré conjecture que toute 3-variété M compacte connexe sans bord qui est une sphère d'homologie (i.e. a les mêmes groupes d'homologie que la sphère ou encore, vérifie $H_1(M) = 0$) est homéomorphe à S^3.
2. 1904 : H. Poincaré publia un contre exemple à sa conjecture initiale.
3. Forme finale de la conjecture :
   On dit qu'une 3-variété M compacte connexe sans bord est une sphère d'homotopie si $\pi_1(M) = 0$ (et donc $\pi_i(M) = \pi_i(S^3)\ \forall i$).
4. **Remarque** : toute sphère d'homotopie est une sphère d'homologie.

Theorem

ancienne conjecture de Poincaré : *Toute sphère d'homotopie est homéomorphe à la sphère S^3.*

Les trois principales directions de recherche

Les trois principales directions de recherche

1. Décomposition de Heegaard,

Les trois principales directions de recherche

1. Décomposition de Heegaard,
2. Théorème de Kirby :

Les trois principales directions de recherche

1. Décomposition de Heegaard,
2. Théorème de Kirby :

Theorem

Il y a une correspondance biunivoque entre les classes de difféomorphismes des 3-variétés compactes connexes orientées sans bord et les classes d'équivalence des entrelacs pondérés dans la sphère S^3 *modulo une relation d'équivalence engendrée par les isotopies ambiantes et des mouvements dits de Kirby.*

Les trois principales directions de recherche

1. Décomposition de Heegaard,
2. Théorème de Kirby :

Theorem

Il y a une correspondance biunivoque entre les classes de difféomorphismes des 3*-variétés compactes connexes orientées sans bord et les classes d'équivalence des entrelacs pondérés dans la sphre* S^3 *modulo une relation d'équivalence engendrée par les isotopies ambiantes et des mouvements dits de Kirby.*

3. Théorème de Hilden-Montesinos :

Les trois principales directions de recherche

1. Décomposition de Heegaard,
2. Théorème de Kirby :

Theorem

Il y a une correspondance biunivoque entre les classes de difféomorphismes des 3-variétés compactes connexes orientées sans bord et les classes d'équivalence des entrelacs pondérés dans la sphère S^3 modulo une relation d'équivalence engendrée par les isotopies ambiantes et des mouvements dits de Kirby.

3. Théorème de Hilden-Montesinos :

Theorem

Pour toute 3-variété compacte orientée sans bord, il existe un revêtement cyclique ramifié d'ordre 3, $p : M \longrightarrow S^3$ de la sphère S^3 ramifié le long d'un nœud.

Décompositions de Heegaard et diagrammes

Décompositions de Heegaard et diagrammes

On commence par décrire des 3-variétés élémentaires appelés **corps en anses ou handlebodies**.

Décompositions de Heegaard et diagrammes

On commence par décrire des 3-variétés élémentaires appelés **corps en anses ou handlebodies**.

Definition

On appelle corps en anses de genre g, $g \in \mathbb{N}$, et on note H_g toute variété difféomorphe à un voisinage régulier d'un bouquet de g cercles dans $\mathbb{R}^3$.

Décompositions de Heegaard et diagrammes

On commence par décrire des 3-variétés élémentaires appelés **corps en anses ou handlebodies**.

Definition

On appelle corps en anses de genre g, $g \in \mathbb{N}$, et on note H_g toute variété difféomorphe à un voisinage régulier d'un bouquet de g cercles dans $\mathbb{R}^3$.

Remarques :

Décompositions de Heegaard et diagrammes

On commence par décrire des 3-variétés élémentaires appelés **corps en anses ou handlebodies**.

Definition

On appelle corps en anses de genre g, $g \in \mathbb{N}$, et on note H_g toute variété difféomorphe à un voisinage régulier d'un bouquet de g cercles dans $\mathbb{R}^3$.

Remarques :

1. Le bord d'un corps en anses H_g est la surface compacte connexe orientée sans bord de genre g notée Σ_g.

Décompositions de Heegaard et diagrammes

On commence par décrire des 3-variétés élémentaires appelés **corps en anses ou handlebodies**.

Definition

On appelle corps en anses de genre g, $g \in \mathbb{N}$, et on note H_g toute variété difféomorphe à un voisinage régulier d'un bouquet de g cercles dans $\mathbb{R}^3$.

Remarques :

1. Le bord d'un corps en anses H_g est la surface compacte connexe orientée sans bord de genre g notée Σ_g.
2. Un corps en anses de genre g est difféomorphe à g tores solides recollés.

Décompositions de Heegaard et diagrammes

On commence par décrire des 3-variétés élémentaires appelés **corps en anses ou handlebodies**.

Definition

On appelle corps en anses de genre g, $g \in \mathbb{N}$, et on note H_g toute variété difféomorphe à un voisinage régulier d'un bouquet de g cercles dans $\mathbb{R}^3$.

Remarques :

1. Le bord d'un corps en anses H_g est la surface compacte connexe orientée sans bord de genre g notée Σ_g.
2. Un corps en anses de genre g est difféomorphe à g tores solides recollés.
3. Le recollement de deux corps en anses de même genre g le long de leurs bords donne une 3-variété M compacte connexe orientée sans bord.

$$M = H_g^0 \cup_{\Sigma_g} H_g^1.$$

Cette description de M est une décomposition de Heegaard de M.

Exemples :

Exemples :

1. Décomposition de genre 0 de S^3,

$$S^3 = B^3 \cup_{S^2} B^3$$

Exemples :

1. Décomposition de genre 0 de S^3,

$$S^3 = B^3 \cup_{S^2} B^3$$

2. Décomposition de genre 1 de S^3,

$$S^3 = (S^1 \times B^2) \cup_{S^1 \times S^1} (B^2 \times S^1)$$

Exemples :

1. Décomposition de genre 0 de S^3,
$$S^3 = B^3 \cup_{S^2} B^3$$
2. Décomposition de genre 1 de S^3,
$$S^3 = (S^1 \times B^2) \cup_{S^1 \times S^1} (B^2 \times S^1)$$
3. L'espace lenticullaire $L(p, q)$ admet une décomposition de Heegaard de genre 1.

Theorem

Toute 3-variété compacte orientée sans bord admet une décomposition de Heegaard.

Theorem

Toute 3-variété compacte orientée sans bord admet une décomposition de Heegaard.

Preuve :

Theorem

Toute 3-variété compacte orientée sans bord admet une décomposition de Heegaard.

Preuve :

Remarques :

Theorem

Toute 3-variété compacte orientée sans bord admet une décomposition de Heegaard.

Preuve :

Remarques :

1. Une même 3-variété M admet différentes décompositions de Heegaard.

Theorem

Toute 3-variété compacte orientée sans bord admet une décomposition de Heegaard.

Preuve :

Remarques :

1. Une même 3-variété M admet différentes décompositions de Heegaard.
2. Etant donnée une décomposition de Heegaard de genre g,

$$M = H_g^0 \cup_{\Sigma_g} H_g^1,$$

On peut construire une autre décomposition de Heegaard de genre $g+1$,

$$M = H_{g+1}^0 \cup_{\Sigma_{g+1}} H_{g+1}^1.$$

Theorem

Toute 3-variété compacte orientée sans bord admet une décomposition de Heegaard.

Preuve :

Remarques :

1. Une même 3-variété M admet différentes décompositions de Heegaard.
2. Etant donnée une décomposition de Heegaard de genre g,

$$M = H_g^0 \cup_{\Sigma_g} H_g^1,$$

   On peut construire une autre décomposition de Heegaard de genre $g+1$,

$$M = H_{g+1}^0 \cup_{\Sigma_{g+1}} H_{g+1}^1.$$

   Preuve :

Definition

On dit que

$$H^0_{g+1} \cup_{\Sigma_{g+1}} H^1_{g+1}$$

est une stabilisation de $M = H^0_g \cup_{\Sigma_g} H^1_g$.

Definition

On dit que

$$H^0_{g+1} \cup_{\Sigma_{g+1}} H^1_{g+1}$$

est une stabilisation de $M = H^0_g \cup_{\Sigma_g} H^1_g$.

Exemple : La décomposition de genre 1 de S^3 décrite précedemment est la stabilisation de la décomposition de genre 0.

Definition

On dit que

$$H^0_{g+1} \cup_{\Sigma_{g+1}} H^1_{g+1}$$

est une stabilisation de $M = H^0_g \cup_{\Sigma_g} H^1_g$.

Exemple : La décomposition de genre 1 de S^3 décrite précedemment est la stabilisation de la décomposition de genre 0.
Remarque : Pour tout entier naturel g, il existe une décomposition de Heegaard de genre g de la sphère S^3.

Theorem

(Théorème de Singer) Soient (M, H_0, H_1) et (M, H'_0, H'_1) deux décompositions de Heegaard de M de genres respectif g et g'. Alors pour un entier k assez grand, la $(k-g)$-ième stabilisation de la première décomposition est difféomorphe à la $(k-g')$-ième stabilisation de la seconde décomposition.

Diagrammes de Heegaard

Diagrammes de Heegaard

Remarque : D'après le Théorème précédent, un invariant des décompositions de Heegaard qui ne change pas par stabilisation est en fait un invariant de 3-variété. Cependant pour un usage future, nous aurons besoin d'informations supplémentaires données par ce qu'on appelera les diagrammes.

Diagrammes de Heegaard

Remarque : D'après le Théorème précédent, un invariant des décompositions de Heegaard qui ne change pas par stabilisation est en fait un invariant de 3-variété. Cependant pour un usage future, nous aurons besoin d'informations supplémentaires données par ce qu'on appelera les diagrammes.

Soit H un corps en anses de genre g.

Diagrammes de Heegaard

Remarque : D'après le Théorème précédent, un invariant des décompositions de Heegaard qui ne change pas par stabilisation est en fait un invariant de 3-variété. Cependant pour un usage future, nous aurons besoin d'informations supplémentaires données par ce qu'on appelera les diagrammes.
Soit H un corps en anses de genre g.

Definition

On appelle cercles d'attachements pour H un ensemble de courbes fermées $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_g\}$ plongées dans $\Sigma_g = \partial H$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. Les courbes γ_i sont deux à deux disjointes.
2. $\Sigma_g \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_g\}$ est connexe.
3. Les courbes γ_i bordent des disques disjoints plongés dans H.

Diagrammes de Heegaard

Remarque : D'après le Théorème précédent, un invariant des décompositions de Heegaard qui ne change pas par stabilisation est en fait un invariant de 3-variété. Cependant pour un usage future, nous aurons besoin d'informations supplémentaires données par ce qu'on appelera les diagrammes.
Soit H un corps en anses de genre g.

Definition

On appelle cercles d'attachements pour H un ensemble de courbes fermées $\{\gamma_1, \dots, \gamma_g\}$ plongées dans $\Sigma_g = \partial H$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. Les courbes γ_i sont deux à deux disjointes.
2. $\Sigma_g \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_g\}$ est connexe.
3. Les courbes γ_i bordent des disques disjoints plongés dans H.

Exemple :

Exercice : la deuxième condition dans la définition est équivalente à $\{[\gamma_1], \cdots, [\gamma_g]\}$ est libre dans $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$.

Exercice : la deuxième condition dans la définition est équivalente à $\{[\gamma_1], \cdots, [\gamma_g]\}$ est libre dans $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$.

Definition

Soit (Σ_g, H_0, H_1) une décomposition de Heegaard de genre g de la 3-variété M. Un diagramme de Heegaard compatible est donné par Σ_g avec une collection de courbes $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ telle que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g\}$ est un ensemble de cercles d'attachements pour H_0 et $\{\beta_1, \ldots, \beta_g\}$ est un ensemble de cercles d'attachements pour H_1.

Exercice : la deuxième condition dans la définition est équivalente à $\{[\gamma_1], \cdots, [\gamma_g]\}$ est libre dans $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$.

Definition

Soit (Σ_g, H_0, H_1) une décomposition de Heegaard de genre g de la 3-variété M. Un diagramme de Heegaard compatible est donné par Σ_g avec une collection de courbes $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ telle que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g\}$ est un ensemble de cercles d'attachements pour H_0 et $\{\beta_1, \ldots, \beta_g\}$ est un ensemble de cercles d'attachements pour H_1.

Remarque :

Exercice : la deuxième condition dans la définition est équivalente à $\{[\gamma_1], \cdots, [\gamma_g]\}$ est libre dans $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$.

Definition

Soit (Σ_g, H_0, H_1) une décomposition de Heegaard de genre g de la 3-variété M. Un diagramme de Heegaard compatible est donné par Σ_g avec une collection de courbes $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ telle que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g\}$ est un ensemble de cercles d'attachements pour H_0 et $\{\beta_1, \ldots, \beta_g\}$ est un ensemble de cercles d'attachements pour H_1.

Remarque :

1. une décomposition de Heegaard de genre $g > 1$ admet plusieurs diagrammes de Heegaard compatibles distincts.

Exercice : la deuxième condition dans la définition est équivalente à $\{[\gamma_1], \cdots, [\gamma_g]\}$ est libre dans $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$.

Definition

Soit (Σ_g, H_0, H_1) une décomposition de Heegaard de genre g de la 3-variété M. Un diagramme de Heegaard compatible est donné par Σ_g avec une collection de courbes $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ telle que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g\}$ est un ensemble de cercles d'attachements pour H_0 et $\{\beta_1, \ldots, \beta_g\}$ est un ensemble de cercles d'attachements pour H_1.

Remarque :

1. une décomposition de Heegaard de genre $g > 1$ admet plusieurs diagrammes de Heegaard compatibles distincts.
2. Réciproquement, un diagramme $\{\Sigma_g, \alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ où les ensembles $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g\}$ et $\{\beta_1, \ldots, \beta_g\}$ vérifient les deux premières conditions de la définition des cercles d'attachements détermine de manière unique un diagramme de Heegaard et donc une 3-variété.

Exemples :

Exemples :

1. La décomposition de Heegaard de genre 1 de S^3 correspond au diagramme $\{\Sigma_1, \alpha, \beta\}$, où α et β sont respectivement méridien et parallèle de Σ_1.

Exemples :

1. La décomposition de Heegaard de genre 1 de S^3 correspond au diagramme $\{\Sigma_1, \alpha, \beta\}$, où α et β sont respectivement méridien et parallèle de Σ_1.
2. La décomposition de Heegaard de genre 1 de $S^1 \times S^2$ correspond au diagramme $\{\Sigma_1, \alpha, \alpha\}$, où α est le méridien de Σ_1.

Exemples :

1. La décomposition de Heegaard de genre 1 de S^3 correspond au diagramme $\{\Sigma_1, \alpha, \beta\}$, où α et β sont respectivement méridien et parallèle de Σ_1.
2. La décomposition de Heegaard de genre 1 de $S^1 \times S^2$ correspond au diagramme $\{\Sigma_1, \alpha, \alpha\}$, où α est le méridien de Σ_1.
3. L'espace lenticullaire $L(p, q)$ a un diagramme $\{\Sigma_1, \alpha, \beta\}$, où α rencontre β en p points tels que dans une base standard $\{x, y\}$ de $H_1(\Sigma_1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $[\alpha] = y$ et $[\beta] = px + qy$.

Mouvements de Heegaard

Alors qu'un diagramme de Heegaard est un bon outil pour déterminer une 3-variété, une même 3-variété a plusieurs diagrammes distincts.

Mouvements de Heegaard

Alors qu'un diagramme de Heegaard est un bon outil pour déterminer une 3-variété, une même 3-variété a plusieurs diagrammes distincts. Il y a trois mouvements basiques sur les diagrammes qui ne modifient pas la 3-variété sous-jacente :

Mouvements de Heegaard

Alors qu'un diagramme de Heegaard est un bon outil pour déterminer une 3-variété, une même 3-variété a plusieurs diagrammes distincts. Il y a trois mouvements basiques sur les diagrammes qui ne modifient pas la 3-variété sous-jacente :

1. **les isotopies** : deux diagrammes de Heegaard $\{\Sigma_g, A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_g), B = (\beta_1, \ldots, \beta_g)\}$ et $B = \{\Sigma_g, A' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_g), B' = (\beta'_1, \ldots, \beta'_g)\}$ sont dits isotopes s'il existe une isotopie F_t de Σ_g, $t \in [0, 1]$, telle que $F_0 = id_\Sigma$, $F_1(A) = A'$ et $F_1(B) = B'$.

Mouvements de Heegaard

Alors qu'un diagramme de Heegaard est un bon outil pour déterminer une 3-variété, une même 3-variété a plusieurs diagrammes distincts. Il y a trois mouvements basiques sur les diagrammes qui ne modifient pas la 3-variété sous-jacente :

1. **les isotopies** : deux diagrammes de Heegaard $\{\Sigma_g, A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_g), B = (\beta_1, \ldots, \beta_g)\}$ et $B = \{\Sigma_g, A' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_g), B' = (\beta'_1, \ldots, \beta'_g)\}$ sont dits isotopes s'il existe une isotopie F_t de Σ_g, $t \in [0, 1]$, telle que $F_0 = id_\Sigma$, $F_1(A) = A'$ et $F_1(B) = B'$.
2. **les glissements d'anses** : un tel mouvement consiste en le choix de deux courbes dans A (ou B), par exemple α_1 et α_2, puis le remplacement de α_1 par une courbe simple fermée $\tilde{\alpha_1}$ disjointe de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g\}$ telle que $\tilde{\alpha_1}$, α_1 et α_2 bordent une paire de pantalons dans $\Sigma \setminus \{\alpha_3 \cup \cdots \cup \alpha_g\}$.

Mouvements de Heegaard

Alors qu'un diagramme de Heegaard est un bon outil pour déterminer une 3-variété, une même 3-variété a plusieurs diagrammes distincts. Il y a trois mouvements basiques sur les diagrammes qui ne modifient pas la 3-variété sous-jacente :

1. **les isotopies** : deux diagrammes de Heegaard $\{\Sigma_g, A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_g), B = (\beta_1, \ldots, \beta_g)\}$ et $B = \{\Sigma_g, A' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_g), B' = (\beta'_1, \ldots, \beta'_g)\}$ sont dits isotopes s'il existe une isotopie F_t de Σ_g, $t \in [0, 1]$, telle que $F_0 = id_\Sigma$, $F_1(A) = A'$ et $F_1(B) = B'$.
2. **les glissements d'anses** : un tel mouvement consiste en le choix de deux courbes dans A (ou B), par exemple α_1 et α_2, puis le remplacement de α_1 par une courbe simple fermée $\tilde{\alpha_1}$ disjointe de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g\}$ telle que $\tilde{\alpha_1}$, α_1 et α_2 bordent une paire de pantalons dans $\Sigma \setminus \{\alpha_3 \cup \cdots \cup \alpha_g\}$.
   Exemple :

3 et **les stabilsations.**

3 et **les stabilsations.**
La stabilisation dans le contexte des diagrammes de Heegaard est définie comme suit :
On étend la surface Σ en considérant la somme connexe $\Sigma' = \Sigma \cup E$ où E est une surface de genre 1 et on remplace $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g\}$ et $\{\beta_1, \ldots, \beta_g\}$ respectivement par $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{g+1}\}$ et $\{\beta_1, \ldots, \beta_{g+1}\}$ où α_{g+1} et β_{g+1} est une paire de courbes dans E qui s'intersectent transversalement en un seul point.

3 et **les stabilsations.**
La stabilisation dans le contexte des diagrammes de Heegaard est définie comme suit :
On étend la surface Σ en considérant la somme connexe $\Sigma' = \Sigma \cup E$ où E est une surface de genre 1 et on remplace $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g\}$ et $\{\beta_1, \ldots, \beta_g\}$ respectivement par $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{g+1}\}$ et $\{\beta_1, \ldots, \beta_{g+1}\}$ où α_{g+1} et β_{g+1} est une paire de courbes dans E qui s'intersectent transversalement en un seul point.

Proposition

Soit H un corps en anses de genre g. Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_g)$ *et* $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_g)$ *deux ensembles de cercles d'attachements pour H. Alors les deux familles sont reliées par une suite d'isotopies et de glissements d'anses.*

Proposition

Soit H un corps en anses de genre g. Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_g)$ et $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_g)$ deux ensembles de cercles d'attachements pour H. Alors les deux familles sont reliées par une suite d'isotopies et de glissements d'anses.

Theorem

Soit M une 3-variété compacte orientée sans bord. Soient :

$$\{\Sigma_g, \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}, \ \{\Sigma_{g'}, \alpha'_1, \dots, \alpha'_g, \beta'_1, \dots, \beta'_g\}$$

deux diagrammes de Heegaard de M. En appliquant une suite d'isotopies de glissements d'anses et de stabilisations on peut changer les diagrammes ci-dessus tels que les nouveaux diagrammes soient difféomorpheS.

Théorie de Morse

Théorie de Morse

Théorie de Morse

Soit $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable (i.e. C^∞).

Théorie de Morse

Soit $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable (i.e. C^∞).
La différentielle DF définit en tout point $x \in M$ une application linéaire

$$DF_x : T_x M \longrightarrow T_{F(x)} N.$$

Théorie de Morse

Soit $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable (i.e. C^∞).
La différentielle DF définit en tout point $x \in M$ une application linéaire

$$DF_x : T_x M \longrightarrow T_{F(x)} N.$$

Definition

Théorie de Morse

Soit $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable (i.e. C^∞).
La différentielle DF définit en tout point $x \in M$ une application linéaire

$$DF_x : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N.$$

Definition

1. Un élémentt $x \in M$ est dit point critique de F si

$$rang\, D_xF < min(dim\, M, dim\, N).$$

Théorie de Morse

Soit $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable (i.e. C^∞).
La différentielle DF définit en tout point $x \in M$ une application linéaire

$$DF_x : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N.$$

Definition

1. Un élémentt $x \in M$ est dit point critique de F si

$$rang\, D_xF < min(dim\, M, dim\, N).$$

Un élément $x \in M$ est dit point régulier s'il n'est pas critique.

Théorie de Morse

Soit $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable (i.e. C^∞).
La différentielle DF définit en tout point $x \in M$ une application linéaire

$$DF_x : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N.$$

Definition

1. Un élémentt $x \in M$ est dit point critique de F si

$$rang\, D_xF < min(dim\, M, dim\, N).$$

   Un élément $x \in M$ est dit point régulier s'il n'est pas critique.
2. Un élément $y \in N$ est dit valeur critique de F si $F^{-1}(y)$ contient un point critique de F.

Théorie de Morse

Soit $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable (i.e. C^∞).
La différentielle DF définit en tout point $x \in M$ une application linéaire

$$DF_x : T_x M \longrightarrow T_{F(x)} N.$$

Definition

1. Un élémentt $x \in M$ est dit point critique de F si

$$rang\, D_x F < min(dim\, M, dim\, N).$$

   Un élément $x \in M$ est dit point régulier s'il n'est pas critique.

2. Un élément $y \in N$ est dit valeur critique de F si $F^{-1}(y)$ contient un point critique de F.
   Un élément $y \in N$ est dit valeur régulière de F s'il n'est pas une valeur critique de F.

Definition

Un sous ensemble S de N est dit négligeable si pour tout plongement ouvert différentiable $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow N$, où $n = dimN$, l'image réciproque $\Phi^{-1}(S)$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

Definition

Un sous ensemble S de N est dit négligeable si pour tout plongement ouvert différentiable $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow N$, où $n = dimN$, l'image réciproque $\Phi^{-1}(S)$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

Notations :

Definition

Un sous ensemble S de N est dit négligeable si pour tout plongement ouvert différentiable $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow N$, où $n = dimN$, l'image réciproque $\Phi^{-1}(S)$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

Notations :

- $\mathbf{Cr}_F$: ensemble des points critiques de F.

Definition

Un sous ensemble S de N est dit négligeable si pour tout plongement ouvert différentiable $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow N$, où $n = dimN$, l'image réciproque $\Phi^{-1}(S)$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

Notations :

- $\mathbf{Cr}_F$: ensemble des points critiques de F.
- Δ_F : ensemble des valeurs critiques de F, dit discriminant de F.

Theorem

(Morse-Sard-Federer). Soit $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable avec $n = \dim N$. Alors la dimension de Hausdorff de l'ensemble discriminant Δ_F est au plus $n - 1$. En particulier l'ensemble discriminant est négligeable dans N. De plus si $F(M)$ est d'intérieur non vide, alors l'ensemble des valeurs régulières est dense dans $F(M)$.

Soit M une variété différentielle. Soit X un champ de vecteurs sur M. Si $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application différentiable, on appelle dérivée de la fonction f le long de X, la fonction Xf définie par

$$Xf(p) = X_p f = \sum_{i=1}^{m} X^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

dans une carte de coordonnées $(U, (x^i))$.

Soit M une variété différentielle. Soit X un champ de vecteurs sur M. Si $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application différentiable, on appelle dérivée de la fonction f le long de X, la fonction Xf définie par

$$Xf(p) = X_p f = \sum_{i=1}^{m} X^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

dans une carte de coordonnées $(U, (x^i))$.

Lemma

Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable et soit $p_0 \in M$ un point critique de f. Alors, pour tous champs de vecteurs X, X', Y et Y' sur M tels que

$$X(p_0) = X'(p_0), \; Y(p_0) = Y'(p_0),$$

On a

$$(XYf)(p_0) = (X'Y'f)(p_0) = (YXf)(p_0)$$

Si p_0 est un point critique d'une fonction différentiable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, alors on définit la Hessienne de f en p_0 comme étant l'application

$$H_{f,p_0} : T_{p_0}M \times T_{p_0}M \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$H_{f,p_0}(X_0, Y_0) = (XYf)(p_0),$$

où X et Y sont des champs de vecteurs sur M tels que $X(p_0) = X_0$ et $Y(p_0) = Y_0$.

1. The set of the critical points of a Morse function is closed discrete in M. So, it is finite if M is compact.

1. The set of the critical points of a Morse function is closed discrete in M. So, it is finite if M is compact.
2. If $p \in M$ is a critical point, the matrix $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j(p))_{1 \leq i,j \leq n}$ is symmetric.

Definition

Let p be a critical point of M. The index of f at p is the number of strictly negative eigenvalues of the matrix $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j(p))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Definition

Let p be a critical point of M. The index of f at p is the number of strictly negative eigenvalues of the matrix $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j(p))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Lemma

Let $p \in M$ be a non degenerate critical point for f. Then there is a chart $(x = (x_1, \dots, x_n), U)$ of M at p with $x(p) = 0$ and such that the identity

$$f = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2$$

holds throughout U, where k is the index of f at p.

Fonctions de Morse et diagrammes de Heegaard

Fonctions de Morse et diagrammes de Heegaard

Definition

Une fonction de Morse est dite auto-indéxante si, pour pour tout point critique P, on a $f(P) = indice(P)$.

Fonctions de Morse et diagrammes de Heegaard

Definition

Une fonction de Morse est dite auto-indéxante si, pour pour tout point critique P, on a $f(P) = indice(P)$.

Proposition

Toute variété différentielle M de dimension n admet une fonction de Morse auto-indexante. De plus si M est connexe sans bord, alors on peut choisir f qui possède un seul point critique d'indice 0 et un seul point critique d'indice n.

Fonctions de Morse et diagrammes de Heegaard

Definition

Une fonction de Morse est dite auto-indéxante si, pour pour tout point critique P, on a $f(P) = indice(P)$.

Proposition

Toute variété différentielle M de dimension n admet une fonction de Morse auto-indexante. De plus si M est connexe sans bord, alors on peut choisir f qui possède un seul point critique d'indice 0 et un seul point critique d'indice n.

Proposition

Si $f : M \longrightarrow [0,3]$ est une fonction auto-indexante sur M avec un seul minimum et un seul maximum, alors f induit une décomposition de Heegaard avec comme surface $\Sigma = f^{-1}(3/2)$ et comme corps en anses $H_0 = f^{-1}([0,3/2])$ et $H_1 = f^{-1}([3/2,3])$

Remarque : Si la surface Σ est de genre g, alors f a g points critiques d'indice 1 et g points critiques d'indice 2.

Remarque : Si la surface Σ est de genre g, alors f a g points critiques d'indice 1 et g points critiques d'indice 2.

Lemma

La fonction de Morse et une métrique Riemannienne sur une 3*-variété* M *induisent un diagramme de Heegaard pour* M.