INTRODUCTION AUX THEORIES QUANTIQUES DES CHAMPS TOPOLOGIQUES

H. Abchir
Université Hassan II
Ecole supérieure de Technologie.
Route d'El Jadida. B.P. 8012. Oasis.
20100 Casablanca. Maroc
E-mail: abchir@est-uh2c.ac.ma

16/01/2010

1 Définition d'une TQFT

Les variétés considérées sont différentielles.
Si M est une variété orientée, on note $\overline{M}$, la variété M munie de l'orientation inverse.

1.1 Catégorie de cobordisme

Si X et Y sont deux n-variétés compactes orientées sans bord, on appelle ***cobordisme*** de X vers Y, une $n+1$-variété compacte orientée M dont le bord s'écrit $\partial M = \overline{X} \amalg Y$.

Deux cobordismes M et M' sont dits ***équivalents***, s'il existe un difféomorphisme de M vers M' relatif au bord, i.e. qui soit l'identité sur X et Y.

Soit n un entier naturel, $n \geq 1$. On considère la catégorie C_n suivante :

- **Objets** : n-variétés différentielles compactes orientées sans bord.
- **Morphismes** : Soient X et Y deux objets de C_n. Un morphisme de X vers Y est une classe d'équivalence d'un cobordisme de X vers Y.
- **Composition des morphismes** : Soit M_1 un morphisme de X vers Y et M_2 un morphisme de Y vers Z. En recollant M_1 et M_2 le long de Y, on obtient un morphisme de X vers Z.
- **Morphisme identité** : La variété produit $[0,1] \times X$ est le morphisme identité de l'objet X.
- **associativité de la composition** : on vérifie aisément que la composition introduite est associative.

Remarque :

1. La catégorie C_n a une ***involution*** donnée par l'orientation inverse.
2. La catégorie C_n a une ***somme finie*** donnée par la réunion disjointe.

1.2 TQFT

Soit k un anneau commutatif unitaire muni d'une conjugaison $\lambda \longmapsto \overline{\lambda}$.
Soit un foncteur $V : C_n \longrightarrow k$-modules, tel que :

$$V(\emptyset) = k. \tag{1}$$

Notations :

- Si M est un cobordisme, on note

$$Z_M := V(M).$$

- Si M est considérée comme un cobordisme de $\emptyset$ vers ∂M, on note

$$Z(M) := Z_M(1) \in V(\partial M).$$

- Si M est un cobordisme sans bord, i.e. $\partial M = \emptyset$, on note

$$\langle M \rangle := Z(M) \in k.$$

Remarque : Puisqu'on considère des cobordismes à équivalence près, $\langle M \rangle$ est un invariant des cobordismes sans bord

On dit que l'invariant $\langle\ \rangle$ est ***multiplicatif*** si

$$\begin{aligned} \langle M_1 \amalg M_2 \rangle &= \langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle \\ \text{et} \qquad \langle \emptyset \rangle &= 1 \end{aligned}$$

On dit que l'invariant $\langle\ \rangle$ est ***involutif*** si

$$\langle \overline{M} \rangle = \overline{\langle M \rangle}$$

On dit que V est un foncteur de ***quantification*** s'il vérifie (1) ci-dessus et la condition suivante :
Il existe sur $V(\Sigma)$ une forme hermitienne sesquilinéaire non dégénérée $\langle\ ,\ \rangle_\Sigma$ telle que si $\partial M_1 = \partial M_2 = \Sigma$, alors

$$\langle Z(M_1), Z(M_2)\rangle_\Sigma \quad = \quad \langle M_1 \cup_\Sigma \overline{M_2}\rangle. \tag{2}$$

On dit que V est C_n***-engendré*** si les éléments $Z(M)$ tels que $\partial M = \Sigma$ engendrent $V(\Sigma)$.

Quelle est la relation entre les foncteurs de quantification et les invariants ?

Proposition 1 • *Si V est un foncteur de quantification sur la catégorie de cobordisme C_n, alors l'association $M \longmapsto \langle M \rangle$ est un invariant multiplicatif et involutif.*

• *Inversement, étant donné un invariant multiplicatif et involutif sur l'ensemble des cobordismes fermés de C_n, alors il existe un unique foncteur de quantification C_n-engendré qui l'étend.*

Proof :

On a aussi la proposition suivante :

Proposition 2 *Soit V un cobordisme de quantification C_n-engendré. Alors $V(\overline{\Sigma})$ est le module conjugué de $V(\Sigma)$, et on a l'application naturelle $V(\overline{\Sigma}) \longrightarrow V(\Sigma)^*$ où $V(\Sigma)^*$ désigne le module dual. De plus, il existe une application naturelle $V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2) \longrightarrow V(\Sigma_1 \amalg \Sigma_2)$.*

Maintenant on dit que *le foncteur* de quantification V est :

- ***involutif*** si l'application $V(\overline{\Sigma}) \longrightarrow V(\Sigma)^*$ est un isomorphisme.
- ***multiplicatif*** si application $V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2) \longrightarrow V(\Sigma_1 \amalg \Sigma_2)$ est un isomorphisme.

On considère aussi la propriété de finitude suivante :
Pour tout Σ***,*** $V(\Sigma)$ ***est libre de rang fini et la forme*** $\langle\ ,\ \rangle_\Sigma$ ***est unimodulaire.***
Remarque : La propriété de finitude entraîne que le foncteur V est involutif.

Définition 1 *Une TQFT sur une catégorie de cobordisme C_n est un foncteur de quantification multiplicatif C_n-engendré qui satisfait la propriété de finitude.*

Remarques :

1. $$\langle \emptyset \rangle = 1$$

   car
   $\langle \emptyset \rangle = Z(\emptyset) = Z_{I\times\emptyset}(1) = V(I\times\emptyset)(1) = id_{V(\emptyset)}(1) = id_k(1) = 1.$

2. $$\langle 1, 1\rangle_{\emptyset} = 1.$$

3. On a souvent besoin de considérer des catégories de cobordisme avec structures pour lever certaines ambiguités.

1.3 Exemples de TQFT

Soit $C_2^{p_1}$ la catégorie dont

- les objets sont les 2-variétés orientées compactes sans bord avec p_1-structure et contenant un entrelacs en bandes (i.e. un ensemble d'intervalles orientés plongés).
- les cobordismes sont les 3-variétés compactes orientées avec p_1-structure et contenant un entrelacs en bandes (i.e. un ensemble de surfaces orientées plongées difféomorphes au produit d'une 1-variété avec un intervalle).
- La notion d'équivalence appropriée sur les cobordismes : deux cobordismes sont dits équivalents s'il existe un difféomorphisme relatif au bord de l'un sur l'autre qui préserve l'orientation, qui se restreint à un difféomorphisme qui préserve l'orientation des entrelacs en bandes et tel que sur le mapping cylindre du difféomorphisme, il existe une p_1-structure qui étend celle donnée sur le bord.

On note k_p, $p \in \mathbb{N}$, l'anneau obtenu après un changement adéquat de l'anneau des coefficients k.

Théorème 1 *Il existe une suite d'invariants multiplicatifs et involutifs $\langle\ \rangle_p$, où p est un entier naturel, défini sur les cobordismes sans bord de la catégorie $C_2^{p_1}$ et prenant valeur dans l'anneau k_p.*

Ainsi, d'après la proposition 1, l'invariant $\langle\ \rangle_p$ détermine un foncteur de quantification $C_2^{p_1}$-engendré V_p.

Théorème 2 *Soit p un entier naturel, $n \geq 3$. Le foncteur de quantification V_p vérifie l'axiome de finitude. Si p est pair, l'axiome de multiplicativité est satisfait et donc V_p satisfait les axiomes de TQFT. Si p est impair, l'axiome de multiplicativité est vérifié pourvu que l'entrelacs en bande de l'une des surfaces $\Sigma_i, i = 1, 2$, comporte un nombre imorie sur la catégionpeur de quantificatair de composantes. En particulier, V_p est une TQFT sur la sous catégorie $C_2^{p_1}(pair)$ dont les objets sont les surfaces avec un entrelacs en bandes comportant un nombre pair de composantes.*

1.4 Relations du crochet de Kauffman et axiomes de chirurgie

1.4.1 Relations du crochet de Kauffman

Définition 2 *Soit M une 3-variété compacte et soit l un entrelacs en bandes dans ∂M. Soit k un anneau commutatif contenant un élément inversible A. On pose $\delta = -A^2 - A^{-2}$. Le**module skein de Jones-Kauffman** (à coeficients dans k) est le k-module engendré par l'ensemble des classes d'isotopie des entrelacs en bandes L dans M qui rencontrent ∂M transversalement en l, quotienté par les relations suivantes :*

Remarque : L'anneau des coefficients universel pour les modules de Jones-Kauffman est $k = \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$.

Notation : on suppose que M est munie d'une p_1-structure. On note $\mathcal{L}(M,l)$ le k-module libre engendré par l'ensemble des classes d'isotopie des entrelacs en bandes dans M qui rencontrent Σ en l.

Définition 3 *Soit V un foncteur de quantification sur la catégorie $C_2^{p_1}$. On dit que V satisfait les relations du crochet de Kauffman (pour un élément A dans k) si pour tout M, l'application linéaire*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(M,l) & \longrightarrow & V(\Sigma,l) \\ L & \longmapsto & Z(M,L) \end{array}$$

se factorise à travers $K(M,l)$.

1.4.2 Axiomes de chirurgie

Soit V un foncteur de quantification sur la catégorie $C_2^{p_1}$. On dit que V satisfait les axiomes de chirurgie si les axiomes $(S0)$, $(S1)$ et $(S2)$ suivants sont satisfaits :

- On désigne par S^3 la 3-sphère munie de la p_1-structure standard, celle qui s'étend à D^4.

  $(S0)$. $\langle S^3 \rangle$ est inversible dans k.

- Supposons que $S^0 \times D^3$ et $D^1 \times S^2$ soient munies de leurs orientations produit (et d'une p_1-sructure fixée qui est le restriction d'une p_1-structure sur $D^1 \times D^3$) telles que $\partial(S^0 \times D^3) = \partial(D^1 \times S^2) = S^0 \times S^2$.

  $(S1)$. (chirurgie d'ince 1) Il existe un élément $\eta \in k$, tel que $Z(S^0 \times D^3) = \eta Z(D^1 \times S^2)$ dans $V(S^0 \times S^2)$ telles que $\partial \overline{S^1 \times D^2} = \partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1$.

- Supposons que $S^1 \times D^2$ et $D^2 \times S^1$ soient munies de leurs orientations produit (et d'une p_1-sructure fixée qui est le restriction d'une p_1-structure sur $D^2 \times D^2$).

  $(S2)$ (chirurgie d'indice 2). L'élément $Z(D^2 \times S^1) \in V(S^1 \times S^1)$ appartient au sous module engendré par les entrelacs en bandes dans le tore solide $\overline{S^1 \times D^2}$.