THÈSE

Présenté à la faculté des sciences et techniques
pour obtenir le grade de :

Docteur

Spécialité: Mathématiques et Applications

TITRE

On Riemann-Poisson Lie groups

par :

Alioune OULD BRAHIM

(Master : Mathématiques et Applications)

Directeurs de Thèse
Mohamed BOUCETTA (FATG-Université Cadi-Ayyad, Marrakech)
Lessiad AHMED SIDAHMED (FSTG-Université de Nouakchott Al-Assriya)

Soutenue le (.....) devant la commission d'examen:

Président	....	....
Rapporteur	....	....
Encadrant	Lessiad Ahmed SIDAHMED	Université de Nouakchott Al-Assriya, Nktt-Mauritanie
Co-Encadrant	Mohamed BOUCETTA	Université Cadi-Ayyad, Marrakech-Maroc
Examinateurs	....	....

On Riemann-Poisson Lie groups

Alioune OULD BRAHIM

October 11, 2020

Contents

Remerciement

Je voudrais tout d'abord remercier grandement mon co-encadreur Monsieur Mohamed Boucetta, Professeur à l'Université Cadi-Ayyad, qui m'a encadré tout au long de cette thèse et qui m'a aussi accueilli pendant toutes ces années au sein de son laboratoire, C'est grâce à lui que j'ai pu concilier avec bonheur recherche théorique et appliquée pendant cette thèse, Qu'il soit aussi remercié pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodiguée, Cette thèse est le fruit d'une collaboration de plus de cinq années avec lui, C'est à ses côtés que j'ai compris ce que rigueur et précision voulaient dire.

Je tiens aussi à remercier mon directeur de thèse, Monsieur Lessiad Ahmed Sidahmed, pour toute son aide. Je suis ravi d'avoir travaillé en sa compagnie car outre son appui scientifique, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse.

Je tiens à remercier particulièrement mon ami et grand frère monsieur Boubacar Brahim, qui m'a pris en charge durant toutes ces années de thèse, Qu'il soit aussi remercié pour toutes nos discussions et ses conseils qui m'ont accompagné tout au long de mon cursus.

Enfin, je dédie cette thèse ainsi que toute réussite future à ma famille, pour leur amour et soutien inconditionnels, pour avoir toujours cru en moi et m'aider de manière désintéressée dans chaque décision avec toutes les ressources possibles. Je ne peux pas citer suffisamment de raisons plus j'essaye, de simples mots ne peuvent exprimer une vie de gratitude. À cet égard, je considère cette thèse être la leur autant que la mienne et j'espère être à la hauteur de leurs attentes.

Résumé

Un groupe de Lie de Riemann-Poisson est un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche et un tenseur de Poisson invariant à gauche qui sont compatible dans le sens introduit dans [3]. Nous étudions ces groupes de Lie et nous donnons une caractérisation de leurs algèbres de Lie. Nous donnons aussi une méthode de construction de ces algèbres de Lie et nous terminons par donner une liste des algèbres de Lie de Riemann-Poisson jusqu'au dimension 5.

Le point de départ de cette thèse est l'étude des interactions entre la géométrie riemannienne et la géométrie de Poisson telles qu'elles apparaissent dans [1], [2], [3], [4]. Plus précisément, on s'est intéressé aux groupes de Lie muni d'une métrique Riemannienne invariante à gauche et d'un tenseur de Poisson invariant à gauche satisfaisant la condition de compatibilité qu'on va définir plus tard. Ils constituent une sous-classe de classe des variétés de Riemann-Poisson introduit et étudié par Boucetta dans [1], [2], [3], [4].
Soit $(M, \pi, \langle\ ,\ \rangle)$ une variété lisse muni d'un tenseur de Poisson π et d'une métrique Riemannienne $\langle\ ,\ \rangle$. Notons par $\langle\ ,\ \rangle^*$ le produit Euclidien sur T^*M naturellement associé à la métrique $\langle\ ,\ \rangle$. Le tenseur de Poisson définit une structure d'algebroïde de Lie sur T^*M où l'application d'encrage est la contraction $\#_\pi : T^*M \longrightarrow TM$ donnée par $\prec \beta, \#_\pi(\alpha) \succ = \pi(\alpha, \beta)$ et le crochet de Lie sur $\Omega^1(M)$ est le crochet de Koszul donnée par 2.26.
Cette structure d'algebroïde de Lie et la métrique $\langle\ ,\ \rangle^*$ définissent une connexion contravariante $\mathcal{D} : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ par la formule de Koszul

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma \rangle^* &= \#_\pi(\alpha).\langle \beta, \gamma \rangle^* + \#_\pi(\beta).\langle \alpha, \gamma \rangle^* - \#_\pi.\langle \alpha, \beta \rangle^* \\ &+ \langle [\alpha, \beta]_\pi, \gamma \rangle^* - \langle [\beta, \gamma]_\pi, \alpha \rangle^* + \langle [\gamma, \alpha]_\pi, \beta \rangle^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Elle est l'unique connexion contravariante sans torsion qui est métrique, i.e, pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$

$$\mathcal{D}_\alpha \beta - D_\beta \alpha = [\alpha, \beta]_\pi \quad \text{et} \quad \#_\pi(\alpha).\langle \beta, \gamma \rangle^* = \langle \mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma \rangle^* + \langle \beta, \mathcal{D}_\alpha \gamma \rangle^*.$$

La notion de connexion contravariante à été introduit par Vaisman dans [10] et étudié en plus détail par Fernandes dans le contexte d'algebroïde de Lie [7]. la connexion $\mathcal{D}$ définie ci-dessus est appelée la connexion de Levi-Civita contravariante associée aux couple $(\pi, \langle\ ,\ \rangle)$ et elle est apparu en premier dans [2]. Le triplet $(M, \pi, \langle\ ,\ \rangle)$ est appelée une variété de Riemann-Poisson si

$$\mathcal{D}\pi(\alpha, \beta, \gamma) := \#_\pi(\alpha).\pi(\beta, \gamma) - \pi(\mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma) - \pi(\beta, \mathcal{D}_\alpha \gamma) = 0. \quad (2)$$

Cette notion a été introduite par le deuxième auteur dans [2]. Les variétés de Riemann-Poisson se sont révélées d'avoir des propriétés géométriques intéressantes (voir [1], [2], [3], [4]). Mentionnons certains d'entre eux.

1. La condition de compatibilité 2 est plus faible que la condition $\nabla\pi = 0$ où ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à $\langle\ ,\ \rangle$. En effet, la condition 2 permet

au tenseur de Poisson d'avoir un rang variable. Par exemple, les structures de Poisson linéaire qui sont de Riemann-Poisson existe et sont caractérisées dans [5]. En outre, soit $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ une variété Riemannienne et $(X_1, ..., X_r)$ une famille des champs de vecteurs qui commutent. Posons

$$\pi = \sum_{i,j} X_i \wedge X_j.$$

Alors $(M, \pi, \langle\ ,\ \rangle)$ est une variété de Riemann-Poisson. Cet exemple illustre également la faiblesse de la condition 2 et, plus important encore, c'est le modèle local de la géométrie de non commutatif déformation étudié par Hawkins (voir [[8], Theorem 6.6]).

2. Les variétés de Riemann-Poisson peuvent être considérés comme une généralisation des variétés Kähleriennes. En effet, soit $(M, \pi, \langle\ ,\ \rangle)$ une variété de Poisson muni d'une métrique Riemannienne tel que π est inversible. On note par ω la forme symplectique inverse de π. Alors $(M, \pi, \langle\ ,\ \rangle)$ est une variété de Riemann-Poisson si et seulement si $\nabla\omega = 0$ où ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à $\langle\ ,\ \rangle$. Dans ce cas, si on définit $A : TM \longrightarrow TM$ par $\omega(u, v) = \langle Au, v\rangle$ alors $-A^2$ est symétrique définie positive et donc il existe $Q : TM \longrightarrow TM$ symétrique définie positive telle que $Q^2 = A^2$. Il s'ensuite que $J = AQ^{-1}$ satisfait $J^2 = -Id_{TM}$ est antisymétrique par apport à $\langle\ ,\ \rangle$ et $\nabla J = 0$. Donc $(M, J, \langle\ ,\ \rangle)$ est une variété Kählerienne et sa forme de Kähler $\omega_J(u, v) = \langle Ju, v\rangle$ est lié à ω par la formule suivante:

$$\omega(u, v) = -\omega_J(\sqrt{-A^2}u, v), \quad u, v \in TM. \tag{3}$$

Comte tenu de cette construction, nous appellerons q'une variété de Kähler est un triplet $(M, \langle\ ,\ \rangle, \omega)$ où $\langle\ ,\ \rangle$ est une métrique Riemannienne et ω est une 2-forme non dégénérée telle que $\nabla\omega = 0$ où ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à $\langle\ ,\ \rangle$.

3. Le feuilletage symplectique d'une variété de Riemann-Poisson lorsque π est de rang constant à une importante propriété à savoir qu'il est à la fois un feuilletage symplectique et un feuilletage de Kähler.
Rappelons q'un feuilletage symplectique est une variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ muni d'une métrique Riemannienne $\langle\ ,\ \rangle$ telle que la distribution $T^\perp\mathcal{F}$ est totalement géodésique.
Les feuilletages Symplectique sont une généralisation des variétés Kählerienne (voir [6]) et comme pour la notion de variété de Kähler, on appel dans ce travail un feuilletage de Kähler une variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ muni métrique foliaire $\langle\ ,\ \rangle_\mathcal{F} \in \Gamma(\otimes^2 T^*\mathcal{F})$ et une 2-forme différentielle foliaire $\omega_\mathcal{F} \in \Gamma(\otimes^2 T^*\mathcal{F})$ telle que toute feuille muni des restrictions $\langle\ ,\ \rangle_\mathcal{F}$ et $\omega_\mathcal{F}$ est une variété Kählerienne.

Theorem 0.0.1 *([4]). Soit $(M, \langle\ ,\ \rangle, \pi)$ une variété de Riemann-Poisson, π est de rang constant. Alors son feuilletage symplectique est à la fois Riemannien et Kählerien.*

Compte tenu de ces propriétés particulièrement le théorème 0.0.1, il sera intéressant de trouver une grande classe d'exemples des variétés de Riemann-Poisson. Dans ce travail nous allons décrit une riche collection d'exemples obtenus en fournissant un

groupe Lie arbitraire G muni d'une métrique riemannienne $\langle\ ,\ \rangle$ et d'un tenseur de Poisson π invariants sous les translations à gauche et telle que $(G, \langle\ ,\ \rangle, \pi)$ est groupe de Lie de Riemann-Poisson. On appel $(G, \langle\ ,\ \rangle, \pi)$ un groupe de Riemann-Poisson. cette classe d'exemples peut être élargie substantiellement, sans travail supplémentaire, comme suit. Si $(G, \langle\ ,\ \rangle, \pi)$ est un groupe de Lie de Riemann-Poisson et Γ est un sous groupe discret de G alors $\Gamma \setminus G$ carie naturellement une structure de variété de Riemann-Poisson.
Comme toutes les structures invariantes à gauche sur les groupes de Lie, les groupes de Lie de Riemann-Poison peuvent être caractérisés au niveau de leurs algèbres de Lie.
Soit $(G, \pi, \langle\ ,\ \rangle)$ un groupe de Lie muni d'un bivecteurs invariant à gauche et d'une métrique riemannienne invariante à gauche et $(\mathfrak{g} = T_eG, [\ ,\ ])$ son algèbre de Lie. On pose $r = \pi(e) \in \wedge^2\mathfrak{g}$, $\varrho = \langle\ ,\ \rangle_e$ et ϱ^* le produit Euclidien associé sur $\mathfrak{g}^*$. Alors $(G, \pi, \langle\ ,\ \rangle)$ est un groupe de Lie de Riemann-Poisson si et seulement si

- $[r, r] = 0$,
- pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{g}^*$, $r(A_\alpha\beta, \gamma) + r(\beta, A_\alpha\gamma) = 0$,

où A est le produit de Levi-Civita associé à $(\mathfrak{g}^*, [\ ,\ ]_r, \varrho^*)$.
Soit $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie, $r \in \wedge^2 g$ et ϱ un produit Euclidien sur $\mathfrak{g}$. On désigne par (S, ω_r) le sous-espace symplectique associé à r et par $\# : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ l'isomorphisme défini par ϱ. On note que le produit Euclidien sur $\mathfrak{g}^*$ est déterminée par $\varrho^*(\alpha, \beta) = \varrho(\#(\alpha), \#(\beta))$. On a

$$\mathfrak{g}^* = \mathcal{I} \oplus \mathcal{I}^\perp \quad \text{and} \quad \mathfrak{g} = S \oplus S^\perp,$$

où $\mathcal{I} = \ker r_\#, S = Imr_\#$. De plus, $r_\# : \mathcal{I}^\perp \longrightarrow S$ est un isomorphisme, on note par $\tau : S \longrightarrow \mathcal{I}^\perp$ son inverse. A partir de la relation

$$\varrho(\#(\alpha), r_\#(\beta)) = \prec \alpha, r_\#(\beta) \succ = r(\beta, \alpha),$$

nous déduisons que $\# : \mathcal{I} \longrightarrow S^\perp$ est un isomorphisme et donc $\# : \mathcal{I}^\perp \longrightarrow S$ est aussi un isomorphisme.

On considère l'isomorphisme $J : S \longrightarrow S$ reliant ω_r avec $\varrho_{|S}$, i.e.,

$$\omega_r(u, v) = \varrho(Ju, v), \quad u, v \in S.$$

On voit facilement que $J = -\# \circ \tau$.
Maintenant on est en mesure d'énoncer et de démontrer le résultat principal de ce travail.

Theorem 0.0.2 *Avec les notations ci-dessus,* $(\mathfrak{g}, r, \varrho)$ *est une algèbre de Lie de Riemann-Poisson si et seulement si les conditions suivantes sont remplies:*

1. $(S, \varrho_{|S}, \omega_r)$ *est une sous-algèbre de Lie kählerienne, i.e., pour tous* $s_1, s_2, s_3 \in S$,
$$\omega_r(\nabla_{s_1}s_2, s_3) + \omega_r(s_2, \nabla_{s_1}s_3) = 0, \tag{4}$$
où ∇ *est le produit de Levi-Civita associé à* $(S, [\ ,\ ], \varrho_{|S})$.
2. *pour tout* $s \in S$ *et tous* $u, v \in S^\perp$,
$$\varrho(\phi_S(s)(u), v) + \varrho(u, \phi_S(s)v) = 0. \tag{5}$$
où $\phi_S :\longrightarrow End(S^\perp), u \longmapsto pr_{S^\perp} \circ ad_u$ *et* $pr_{S^\perp} : \mathfrak{g} \longrightarrow S^\perp$ *est la projection orthogonal.*

3. *pour tout* $s_1, s_2 \in S$ *et tous* $u \in S^\perp$,

$$\omega_r(\phi_{S^\perp}(u)s_1, s_2) + \omega_r(s_1, \phi_{S^\perp}(u)s_2) = 0. \tag{6}$$

où $\phi_{S^\perp} :\longrightarrow End(S), u \longmapsto pr_S \circ ad_u$ *et* $pr_S : \mathfrak{g} \longrightarrow S$ *est la projection orthogonal.*

Nous allons utiliser ce théorème pour construire des algèbres de Lie de Riemann-Poisson pour cela nous cherchons à résoudre le problème suivant

Problem 1 *Nous recherchons:*

1. *Une algèbre de Lie kählerienne* $(\mathfrak{h}, [,]_\mathfrak{h}, \varrho_\mathfrak{h}, \omega)$,
2. *un espace vectoriel Euclidien* $(\mathfrak{p}, \varrho_\mathfrak{p})$,
3. *une application bilinéaire antisymétrique* $[,]_\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$,
4. *une application bilinéaire antisymétrique* $\mu : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{h}$,
5. *deux applications linéaires* $\phi_\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \longrightarrow sp(\mathfrak{h})$ *et* $\phi_: \mathfrak{p} \longrightarrow so(\mathfrak{p})$ *où* $sp(\mathfrak{h}, \omega) = \{J : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}, J^\omega + J = 0\}$ *et* $so(\mathfrak{p}) = \{A : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}, A^* + A = 0\}$, J^ω *est l'adjoint de* J *par apport à* ω *et* A^* *est l'adjoint par rapport à* $\varrho_\mathfrak{p}$.

tel que le crochet $[,]$ *sur* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ *définit, pour tout* $a, b \in \mathfrak{p}$ *et* $u, v \in \mathfrak{h}$, *par*

$$[u,v] = [u,v]_\mathfrak{h}, [a,b] = \mu(a,b) + [a,b]_\mathfrak{p}, [a,u] = -[u,a] = \phi_\mathfrak{p}(a)(u) - \phi_\mathfrak{h}(u)(a) \tag{7}$$

est un crochet de Lie.

Dans ce cas, $(\mathfrak{g}, [,])$ muni de $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ associé à $(\mathfrak{h}, \omega)$ et le produit Euclidien $\varrho = \varrho_\mathfrak{h} + \varrho_\mathfrak{p}$ devient, selon le théorème 0.0.2, une algèbre de Lie de Riemann-Poisson.
Cette thèse consiste en trois chapitres. Le premier chapitre est une introduction succincte à la géométrie de Poisson. On y donne les notions de base ainsi que quelque résultats fondamentaux en géométrie de Poisson, notamment le théorème de Weinstein, le feuilletage symplectique, le calcul de Poisson : algebroïde de Lie sur le fibrée cotangent d'une variété de Poisson, connexion contravariante, etc. Dans le deuxième chapitre nous donnons le matériel nécessaire pour ce chapitre et décrivons la contrepartie infinitésimale des groupes de Lie de Riemann-Poisson, appelées, Algèbres de Lie de Riemann-Poisson, nous démontrons aussi notre résultat principal qui donne une description utile des algèbres de Lie de Riemann-Poisson (voir 3.2.3), nous utilisons ce théorème pour donner une méthode de construction des algèbres de Lie de Riemann-Poisson et on explique cette méthode en donnant une liste des algèbres de Lie de Riemann-Poisson jusqu'à la dimension 5.

Notations

Toutes les structures qui apparaissent dans ce texte (variétés, fibrés, tenseurs, etc...) sont supposées de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Au long de ce texte nous utilisons les notations suivantes
M variété lisse de dimension d
TM fibré tangent de M
T^*M fibré cotangent de M
$\mathfrak{X}^k(M) := \Gamma(\Lambda^k TM)$ espace des champs de k-vecteurs sur M
$\Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k T^*M)$ espace des champs de k-formes différentiables sur M
$\mathfrak{X}^0(M) := \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ espace des fonctions lisses sur M à valeurs réelles
$\mathfrak{X}^*(M) := \oplus_{k=0}^d \mathfrak{X}^k(M)$ espace des champs de multivecteurs sur M
$\Omega^*(M) := \oplus_{k=0}^d \Omega^k(M)$ espace des formes différentielles sur M
$|\omega|$ degré d'une forme différentielle ω
$d\omega$ différentielle extérieure de ω
$X(f) = X.f = df(X)$ différentielle de f appliquée sur X
F_* application linéaire tangente de F
i_P produit intérieur par P
$\mathcal{L}_X$ dérivée de Lie dans la direction de X
Φ_X^t flot local de X
X_f champ hamiltonien d'une fonction f
$\oint_{i_1,\dots,i_s}$ somme circulaire sur $i_1, \dots, i_s$
Nous rappelons également quelques formules utiles du calcul différentiel.

1. Formule de Cartan pour la différentielle : pour tout $\omega \in \Omega^n(M)$, et tout $X_1, \dots, X_{n+1} \in \mathfrak{X}^1(M)$,

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} X_i.\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}), \end{aligned} \quad (8)$$

   où le chapeau $\widehat{}$ signifie que le terme correspondant est omis.

2. Dérivée de Lie : pour tout $\omega \in \Omega^n(M)$, et tout $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}^1(M)$,

$$\mathcal{L}_X \omega(X_1, \dots, X_n) = X.\omega(X_1, \dots, X_n) - \sum_{i=1}^{n} \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_n), \quad (9)$$

et pour tout $P \in \mathfrak{X}^n(M)$, et tout $\alpha_1, ..., \alpha_n$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X P(\alpha_1, ..., \alpha_n) &= X.P(\alpha_1, ..., \alpha_n) \\ &- \sum_{i=1}^{n} P(\alpha_1, ..., \mathcal{L}_X \alpha_i, ..., \alpha_n). \end{aligned} \tag{10}$$

3. Formule de Cartan pour la dérivée de Lie : pour tout $\omega \in \Omega^n(M)$, et tout $X_1, ..., X_n \in \mathfrak{X}^1(M)$,

$$\mathcal{L}_X \omega = i_X(d\omega) + d(i_X \omega). \tag{11}$$

Chapitre 1

Introduction à la géométrie riemannienne

Sommaire

Dans ce chapitre nous allons définir la notion de variété riemannienne, définir certains objets mathématiques naturellement associées à ces variétés (longueur de courbe, volume riemannien,gradient d'une fonction,divergence d'un champ de vecteur, laplacien, Connexion de Levi-Civita(Connexion linéaire)) et donner des exemples de base.

1.1 Généralités sur les variétés riemannienne

Nous allons commencer par préciser les notions et rappeler le théorème d'existence des partitions de l'unité.
Soit M une variété lisse de dimension n. Une carte locale de M est un couple (U, ϕ) où U est un ouvert de M et $\phi : U \longrightarrow V$ est un homéomorphisme de V vers un ouvert V de $\mathbf{R}^n$. On notera $\sigma = \phi^{-1}$ qui est un homéomorphisme de V vers U et sera quelquefois appelé paramétrisation de U. Les composantes de ϕ dans $\mathbf{R}^n$ seront notées $(x_1, ..., x_n)$ et sont appelées système local de coordonnées sur U. A ce système local de coordonnées est associé un repère local

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Cela signifie que pour tout point $p \in U$, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(p), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right)$ est une base de T_pM (l'espace tangent à M en p). Si $\gamma : (\alpha, \beta) \longrightarrow U$ est une courbe lisse dans M, on a pour tout $t \in (\alpha, \beta), \gamma(t) = \sigma(x_1(t), ...x_n(t)$ et

$$\tfrac{d}{dt}\gamma(t) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j(t)\frac{\partial}{\partial x_n}(\gamma(t)).$$

Noter que si $p \in M$, pour tout $j = 1, ..., n$,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p) = \frac{d}{dt}\sigma(\phi(p) + te_j)_{|t=0},$$

où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
On désignera par $(dx_1, ..., dx_n)$ la base dual de $(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$, cela signifie que pour tout $p \in U, (d_p x_1, ..., d_p x_n)$ est une base du dual T_p^*M de T_pM et, pour tout $i, j = 1, ..., n$,

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij},$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker valant 1 ou 2 suivant que $i = j$ ou non.
Nous allons maintenant préciser le cas particulier où M est une sous variété de dimension n lisse de $\mathbf{R}^{n+p}$. Si $\sigma : V \longrightarrow \mathbf{R}^{n+p}$ est une paramétrisation (régulière) de M, c'est à dire que $\sigma : V \longrightarrow W \cap M$ est un homéomorphisme avec W est un ouvert de $\mathbf{R}^{n+p}$, le système de coordonnées locales associé est $\sigma^{-1} = (x_1, ..., x_n)$ et, pour tout $p \in W \cap M, T_pM$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^{n+p}$ et, on a:

$$(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}) = (\frac{\partial \sigma}{\partial x_1}, ..., \tfrac{\partial \sigma}{\partial x_n}) = (\sigma_{x_1}, ..., \sigma_{x_n}).$$

Rappelons maintenant le théorème d'existence des partitions de l'unité. Soit M une variété lisse et $(U_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ un recouvrement ouvert de M. Alors, il existe une famille $(f_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ telle que

1. pour tout $\alpha \in I, f_\alpha : M \longrightarrow [0, 1]$ est une fonction lisse et $supp(f_\alpha) \subset U_\alpha$, où $supp(f_\alpha)$ est l'adhérence de l;ensemble $\{p \in M / f_\alpha(p) \neq 0)$;
2. pour tout $p \in M$, il existe un voisinage W_p de p tel que $(f_\alpha)_{|W_p} \neq 0$ pour un nombre fini d'indices $\alpha \in I$;
3. $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(p) = 1$ pour tout $p \in M$.

La famille $(f_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ est appelée partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Definition 1.1.1 *Une métrique riemannienne sur une variété lisse M est la donnée, pour tout $p \in M$, d'un produit scalaire $<,>_p$ sur T_pM de telle sort que la propriété suivante soit satisfaite*

- *Pour tout système local de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ sur un ouvert U de M, les fonctions $g_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tout $p \in M$, par $g_{ij}(p) = < \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} > (p)$ sont lisses pour tout $i, j = 1, ..., n$.*
  Une variété lisse muni d'une métrique riemannienne est appelée variété riemannienne.

Soit $(M, <, >)$ une variété riemannienne et soit $(x_1, ..., x_n)$ un système local de coordonnées sur un ouvert U. L'expression locale de $<, >$ dans $(x_1, ...x_n)$ est donnée par $<, > = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$ où le produit symétrique $dx_i dx_j$ est donnée par:

$$dx_i dx_j = \frac{1}{2}(dx_i \otimes dx_j + dx_j \otimes dx_i) \tag{1.1}$$

Une isométrie de $(M, <,>)$ est un difféomorphisme $F : M \longrightarrow M$ qui préserve la métrique, c'est-á-dire

$$< T_pF(u), T_pF(u) >=< u, u > \quad \text{pour tout } p \in M, u \in T_pM.$$

L'ensemble des isométries de M est un groupe noté $I(M, <,>)$.

Proposition 1.1.1 *Tout variété lisse admet une métrique riemannienne.*

Comme dans le cas la géométrie euclidienne, si p est un point dans une variété riemannienne $(M, <,>)$, on définit la longueur ou la norme d'un vecteur tangent $u \in T_pM$ par $\parallel u \parallel := < u, u >^{\frac{1}{2}}$ et la longueur d'une courbe lisse $\gamma : (\alpha, \beta) \longrightarrow M$ par

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \parallel \dot\gamma(t) \parallel dt.$$

Un repère local dans une variété riemannienne M est la donnée d'un ouvert U de M est d'une famille de champ de vecteurs $(X_1, ..., X_n)$ dans U telle que, pour tout $p \in U, (X_1(p), ..., X_n(p))$ est une base de T_pM. Noter que tout système local de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ définit un repère local $(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$.
Rappelons sans le démontrer le théorème suivant. Soit M une variété lisse et $(X_1, ..., X_n)$ un repère local de M. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

1. Il existe un système local de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ de M telle que

$$(X_1, ..., X_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

2. Pour tout $i, j = 1, ..., n, [X_i, X_j] = 0$.

Soit $(M, <,>)$ une variété riemannienne. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Shmidt permet de construire à partir d'un repère local $(X_1, ..., X_n)$ un repère local orthonormé $(E_1, ..., E_n)$, c'est à dire, pour tout $i, j = 1, ..., n$,

$$< E_i, E_j >= \delta_{i,j}.$$

Proposition 1.1.2 *Soit $(M, <,>)$ une variété riemannienne orientée. Alors, il existe sur M une forme volume $dV_{<,>}$ telle que pour tout repère local orthonormé direct $(E_1, ..., E_n)$*

$$dV_{<,>}(E_1, ..., E_n) = 1.$$

$dV_{<,>}$ appelé volume riemannienne associé à $<,>$

Proof 1.1.1 *Soit p un point de M. Choisissons un repère local orthonormé direct $(E_1, ..., E_n)$ sur un voisinage ouvert U de p et posons, pour tout $(u_1, ..., u_n) \in T_pM^n$,*

$$dV_{<,>}(u_1, ..., u_n) = det((a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}),$$

où $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice carrée d'ordre n dont le j-ième vecteur colonne est formé par les coordonnées de de u_j dans la base $(E_1, ..., E_n)$. Il est claire que $dV_{<,>}$ est une forme volume sur U et si $(E_1', ..., E_n')$ est un autre repère local orthonormé direct, on a

$$dV_{<,>}(E_1', ..., E_n') = det(P),$$

où P est la matrice de passage de $(E_1, ..., E_n)$ à $(E_1', ..., E_n')$. Or la matrice de passage entre deux bases orthonormées directes a un déterminant qui vaut 1 et ceci permet de montre que $dV_{<,>}$ est bien définie et vérifie la propriété requise.

□

Proposition 1.1.3 *Soit $(M,<,>)$ une variété riemannienne orientée. Pour tout système local de coordonnées $(x_1,...,x_n)$ oriente positivement, on a*

$$dV_{<,>} = \sqrt{det((g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n})}dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$$

où les $g_{i,j} =< \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} >$.

Proof 1.1.2 *Pour établir cette proposition, il suffit de montrer que*

$$\sqrt{det((g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n})} = dV_{<,>}(\frac{\partial}{\partial x_1,...,\frac{\partial}{\partial x_n}}).$$

Pour cela, notons $G = (g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, choisissons un repère local orthonormé direct $(E_1,...E_n)$ et remarquons que

$$dV_{<,>}(\frac{\partial}{\partial x_1,...,\frac{\partial}{\partial x_n}}) = detP,$$

où $P = \left(< E_i, \dfrac{\partial}{\partial x_j} >\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice de passage de $(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n})$ à $(E_1,...,E_n)$. Son inverse $P^{-1} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est donnée par

$$E_i = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1,...,n.$$

On a alors

$$< E_i, \frac{\partial}{\partial x_j} >= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki}g_{jk}, \quad i,j = 1,...,n.$$

Ces relations s'expriment matriciellement par

$$P = G(P^{-1})^t.$$

En passant au déterminant, on obtient

$$detG = (detP)^2.$$

Pour conclure, ll suffit de remarquer que $detP > 0$ puisque $(x_1,...,x_n)$ est orienté positivement.

□

Une forme volume sur une variété orientée M définit une mesure et permet d'intégrer des fonctions. Le volume riemannien $dV_{<,>}$ permet alors d'intégrer les fonctions sur M. Pour intégrer une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$, on choisit un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{(\alpha\in I)}$ de M tel que pour tout $\alpha \in I, U_\alpha$ est le domaine d'un système local de coordonnées $\phi_\alpha = (x_1^\alpha,...,x_n^\alpha)$ positivement orienté. Posons

$$\sigma^\alpha = \phi_\alpha^{-1} \text{ et } G^\alpha = \sqrt{det\left((g_{ij}^\alpha)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)}.$$

Finalement, on choisit une partition de l'unité $(f_\alpha)_{(\alpha\in I)}$ subordonnée au recouvrement et on pose

$$\int_M f dv_{<,>} := \sum_{\alpha \in I} \int_{\phi_i(U_\alpha)} f \circ \sigma^\alpha (f_\alpha \circ \sigma^\alpha G^\alpha \circ \sigma^\alpha) dx_1 ... dx_n \qquad (1.2)$$

où $dx_1...dx_n$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Noter que cette quantité peut être infinie. Par contre si f est une fonction continue à support compact cette intégrale est finie. Le volume riemannien d'une variété riemannienne compacte $(M, <,>)$ est

$$Vol(M) = \int_M dV_{<,>}.$$

La formule 1.2 n'est pas très commode pour calculer les intégrales sur une variété à cause de la difficulté de choisir la partition de l'unité. Néau-moins, si $(M, <,>)$ est une variété riemannienne compacte admettant un système local de coordonnées $\phi = (x_1, ..., x_n)$ défini sur un ouvert U tel que $M - U$ est de mesure nulle, alors

$$Vol(M) = \int_{\phi(U)} \sqrt{det\left((g_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right)} \circ \sigma dx_1 ... dx_n.$$

Pour finir cette section, nous allons introduire le gradient d'une fonction, la divergence d'un champ de vecteur et le Laplacien d'une fonction.
Soit $(M, <,>)$ une variété riemannienne et soit $f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction lisse sur M et X un champ de vecteur sur M.
Le gradient de f est le champ de vecteur noté **gradf** et défini par

$$< gradf, Y >= df(Y) \text{ pour tout } Y \in TM.$$

La forme différentielle $d(i_X dV_{<,>})$ est de degré maximal et il existe donc une fonction notée **divX** telle que

$$d(i_X dV_{<,>}) = (divX) dV_{<,>}.$$

$divX$ est appelée divergence de X.
Le laplacien de f es la fonction notée Δf est défini par

$$\Delta f = giv(gradf).$$

Proposition 1.1.4 *Soit $(M, <,>)$ une variété riemannienne et soit $(x_1, ..., x_n)$ un système local de coordonnées. Soient f et X, respectivement, une fonction et un champ de vecteur sur M. Alors*

$$gradf = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g^{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad (1.3)$$

$$divX = \frac{1}{\sqrt{det(g_{i,j})}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial (X_i \sqrt{det(g_{i,j})})}{\partial x_i} \qquad (1.4)$$

$$\Delta(f) = \frac{1}{\sqrt{det(g_{i,j})}} \sum_{k,l} \frac{\partial \left(\sqrt{det(g_{i,j})} g^{k,l} \frac{\partial f}{\partial x_l} \right)}{\partial x_k} \qquad (1.5)$$

où $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ *et* $(g^{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *est la matrice inverse de* $(g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

Proof 1.1.3 *Notons* $G = (g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *et, provisoirement,*

$$grad f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Nous avons, pour tout $i = 1, ..., n$,

$$< grad f, \frac{\partial}{\partial x_i} >= df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

soit

$$\sum_{j=1}^n g_{ij} f_j = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Ces relations s'écrivent matriciellement

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} f_1 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{pmatrix}$$

En multipliant les deux membres de cette relation par G^{-1}, *on trouve* 1.3.
Rappelons que

$$dV_{<,>} = \sqrt{det(g_{ij})} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Ainsi

$$i_X dV_{<,>} = \sum_{i=1}^n X_i \sqrt{det(g_{ij})} i_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (dx_1 \wedge ... \wedge x_n).$$

Maintenant, il est facile de voir que

$$i_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (dx_1 \wedge ... \wedge x_n) = (-1)^{i+1} dx_1 \wedge ... \wedge \hat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n,$$

où la notation $\hat{dx_i}$ *signifie que ce terme a été enlevé. Ainsi*

$$d(i_X dV_{<,>}) = (-1)^{i+1} d(X_i \sqrt{det(g_{ij})}) dx_1 \wedge ... \wedge \hat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n.$$

Maintenant, il est claire que

$$d(X_i \sqrt{det(g_{ij})}) dx_1 \wedge ... \wedge \hat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n = (-1)^{i+1} \frac{\partial (X_i \sqrt{det(g_{ij})})}{\partial x_i} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

En combinant tout ce qui procède, on obtient

$$d(i_X dV_{<,>}) = \left(\frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial (X_i \sqrt{det(g_{ij})})}{\partial x_i} \right) dV_{<,>},$$

ce qui donne 1.4. *On obtient* 1.5 *en combinant* 1.3 *et* 1.4.

□

1.2 Exemples de variétés riemanniennes

1.2.1 Construction de nouvelles variétés riemanniennes à partir d'anciennes variétés riemanniennes

Avant de donner des exemples explicites de variétés riemanniennes, nous allons donner deux méthodes qui permettent de construire de nouvelles métriques riemannienne à partir d'anciens. La première méthode est le produit cartésien. Étant donnée deux variétés riemanniennes $(M_1, <,>_1)$ et $(M_2, <,>_2)$, la variété produit $M_1 \times M_2$ hérite naturellement d'une métrique riemannienne $<,>$, dite métrique produit de $<,>_1$ et $<,>_2$, définie de la manière suivante. Pour tout $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$, on sait que $T_{(p_1,p_2)} M_1 \times M_2 = T_{p_1} M_1 \times T_{p_2} M_2$. On pose pour $(u_i, v_i) \in T_{(p_1,p_2)} M_1 \times M_2$, i=1,2,

$$< (u_1, v_1), (u_2, v_2) >=< u_1, u_2 >_1 + < v_1, v_2 >_2 . \tag{1.6}$$

Il est claire qu'on obtient ainsi un produit scalaire sur $T_{(p_1,p_2)} M_1 \times M_2$. Pour voir la différentiabilité, on choisit un système local de coordonnées $(x_1, ..., x_{n_1})$ au voisinage de p_1 et $(y_1, ..., y_{n_2})$ un système local de coordonnées au voisinage de p_2. On obtient un système local de coordonnées $(z_1, ..., z_{n_1}, t_1, ..., t_{n_2})$ au voisinage de (p_1, p_2) avec

$$z_i = (x_i, 0), i = 1, ..., n_1 \text{ et } t_i = (0, y_i), i- = 1, ..., n_2.$$

En vertu de 1.6, on a

$$\begin{aligned} < \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j} >&=< \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} >_1 \circ \pi_1, \quad i, j = 1, ..., n_1, \\ < \frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j} >&=< \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} >_2 \circ \pi_2, \quad i, j = 1, ..., n_2 \\ < \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial t_j} >&= 0, \quad i = 1, ..., n_1, j = 1, ..., n_2 \end{aligned}$$

où π_1, π_2 sont les projection de $M_1 \times M_2$ sur M_1 et M_2, respectivement. La deuxième méthode est la restriction. Étant donnée une variété riemannienne $(M, <,>)$ de dimension n et une immersion $i : N \longrightarrow M$ d'une variété lisse N de dimension $n - q$ dans M. La variété N hérite naturellement d'une métrique riemannienne $<,>_N$ obtenue par restriction de la métrique de M de la manière suivante. Pour tout point $p \in N$ et tout $u, v \in T_p N$, on pose

$$< u, v >_N =< T_p i(u), T_p i(v) > . \tag{1.7}$$

On obtient ainsi un produit scalaire sur $T_p N$ puisque T_i est injective. Le fait que ce produit scalaire varie différentiablement, découle du fait que pour tout système local de coordonnées $(y_1, ..., y_{n-q})$ au voisinage de p et tout système local de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ au voisinage de $i(p)$, on a, d'après 1.7, pour tout $i, j = 1, ..., n - q$,

$$< \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} >_N = \sum_{l,k} a_{li} a_{kj} < \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_k} >,$$

soit

$$g^N_{i,j} = \sum_{l,k} a_{li} a_{kj} g^M_{i,j} \circ i,$$

où $(a_{kl})_{1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant l \leqslant n-q}$ est la matrice de $T_p i$, l'application tangent en p de i, dans les bases $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_{n-q}}\right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$. Les coefficients de cette matrices sont des fonctions lisses sur un voisinage de p et donc les $g^N_{i,j}$ sont lisses. La métrique $<,>_N$ sera noté quelquefois $i^* <,>$ et sera appelée image réciproque(pull-back) de $<,>$ par l'immersion i.

1.3 Connexion de Levi-Civita

1.3.1 Connexions linéaires

Soit $\gamma : (\alpha, \beta) \longrightarrow M$ une courbe lisse dans une variété lisse M. Pour tout $t \in (\alpha, \beta)$, le vecteur $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ est bien défini et, pour tout système de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$,

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_j(t) \partial_j,$$

où $(x_1(t), ..., x_n(t)$ sont les composantes de $\gamma(t)$ dans $(x_1, ..., x_n)$. Une manière naïve de définir $\ddot{\gamma}(t)$ est de poser

$$\ddot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n \ddot{x}_j(t) \partial_j$$

et de vérifier que cette définition ne dépend pas du système de coordonnées choisi. Or l'exemple suivant montre que ceci n'est pas vrai. Si $(x(t), t(t)) = (cos(t), sin(t),\ (\ddot{x}, \ddot{y}) = (-cos(t), -sin(t))$. Mais dans les coordonnées polaires la même courbe est représenter par $(r(t), \theta(t)) = (1, t)$ et $(\ddot{r}(t), \ddot{\theta}(t)) = (0, 0)$!
Une autre manière de définir $\ddot{\gamma}$ est d'essayer de calculer

$$\lim_{\longrightarrow} \frac{\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_0)}{t - t_0}$$

Mais on se rend compte que cette quantité n'a pas de sens puisqu'on ne peut pas calculer la différence entre $\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_0)$ vu ces deux vecteurs appartiennent à deux espaces vectoriels différents, à savoir $T_{\gamma(t)}M$ et $T_{\gamma(t_0)}M$. Le vecteur vitesse $\dot{\gamma}(t)$ est un exemple d'un champ de vecteurs le long d'une courbe concept que nous allons définir ultérieurement. Pour interpréter l'accélération d'une courbe dans une variété d'une courbe dans une variété, nous aurons à trouver un moyen de dériver(indépendamment des coordonnées) des champs de vecteurs le long d'une courbe. Nous aurons donc à comparer les valeurs du champ de vecteurs en différents points de la variété ou à "connecter" les espaces tangents d'où la notion de la connexion.

Definition 1.3.1 *Une connexion linéaire sur une variété lisse M est une application*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

qu'on écrit $(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$, vérifiant

1. *$\nabla_X Y$ est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à X:*

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y \quad f, g \in C^\infty(M);$$

2. *$\nabla_X Y$ est $\mathbb{R}$-linéaire par rapport à Y:*

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \quad a, b \in \mathbb{R},$$

3. *∇ vérifie la règle de Leibniz:*

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y \quad f \in C^\infty(M).$$

$\nabla_X Y$ est appelée la dérivée covariante de Y dans la direction de X

Bien que la connexion soit définie par son action sur des champs de vecteurs globaux, il s'agit, en fait, d'un opérateur local.

Lemma 1.3.1 *Soit ∇ est une connexion linéaire sur M, soient X et Y deux champs de vecteurs sur M et $p \in M$. Alors:*

1. *$(\nabla_X Y)$ dépend seulement des valeurs de X et de Y au voisinage de p, c'est à dire, si X ou Y s'annule sur un voisinage U de p alors $(\nabla_X Y)$ s'annule sur U,*
2. *$(\nabla_X Y)(p)$ dépend seulement des valeurs de X en p, c'est à dire, si $X(p) = 0$ alors $(\nabla_X Y)(p) = 0$.*

Proof 1.3.1 *1. Supposons que Y s'annule sur un voisinage ouvert U de M. Nous allons montrer que, pour tout $p \in U, (\nabla_X Y)(p) = 0$. Pour cela, on choisit une fonction $\phi \in C^\infty(M)$ qui vaut 1 en p et qui est nulle en dehors de U. Alors, le champ de vecteurs ϕY est identiquement nul et donc*

$$0 = (\nabla_X Y)(p) = X(\phi)(p)Y(p) + \phi(p)(\nabla_X Y)(p),$$

où on a utilisée la règle de Leibniz dans cette égalité. Puisque $Y(p) = 0$ et $\phi(p) = 1$, on déduit que $(\nabla_X Y)(p) = 0$. De la même manière, on montre que si X s'annule sur un ouvert U alors, tout $p \in U, (\nabla_X Y)(p) = 0$.

2. *Supposons que $X(p) = 0$ et montrons que $(\nabla_X Y)(p) = 0$. Pour cela, on choisit un système de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ au voisinage de p et on écrit $X = \sum_{j=1}^n X_j \partial_j$ avec $X_j(p) = 0$ pour tout $j = 1, ..., n$. En utilisant 1., on a*

$$(\nabla_X \phi Y)(p) = (\nabla_{\sum_{j=1}^n X_j \partial_j} Y)(p) = \textstyle\sum_{j=1}^n X_j(p)(\nabla_{\partial_j} Y)(p) = 0.$$

□

Dans un système de coordonnées $(x^1, ..., x^n)$, si $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial_i$ et $Y = \sum_{j=1}^n X_j \partial_j$, on a

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{j=1}^n (X(Y_j)\partial_j + Y_j \nabla_X \partial_j) \\ &= \sum_{j=1}^n X(Y_j)\partial_j + \sum_{i,j=1}^n X_i Y_j \nabla_{\partial_i} \partial_j. \end{aligned}$$

Ainsi une connexion linéaire est entièrement déterminer sur le domaine des coordonnées $(x^1, ..., x^n)$ par les symboles de Christoffel (Γ_{ij}^k) données par

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad i, j = 1, ..., n.$$

Inversement, si $(x^1, ..., x^n)$ est un système de coordonnées sur un ouvert U, la donnée d'une famille de fonctions (Γ_{ij}^k) sur U permet de définir une connexion linéaire sur U.

Definition 1.3.2 *Soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe sur une variété M. Un champ de vecteur le long de γ est une application différentiable $V : I \longrightarrow TM$ telle que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ pour tout $t \in I$. On note $\mathcal{X}(\gamma)$ l'espace des champs de vecteurs le long de γ.*

L'exemple le plus simple de champ de vecteur le long de γ est le champ de vecteur vitesse $\dot{\gamma} : I \longrightarrow TM$. Une large classe de champ de vecteur le long de γ sont ceux définis de la manière suivante: pour tout champ de vecteur $X \in \mathcal{X}(M)$, on définit le champ de vecteur le long de γ par $V(t) = X(\gamma(t))$.
Un champ de vecteur V le long de γ est dit extensible s'il existe un champ de vecteurs $V \in \mathcal{X}(M)$ tel que $V(t) = X(\gamma(t))$.

Lemma 1.3.2 *Soit ∇ une connexion sur M. Pour toute courbe $\gamma : I \longrightarrow M, \nabla$ détermine un unique opérateur*

$$D_\gamma : \mathcal{X}(\gamma) \longrightarrow \mathcal{X}(\gamma)$$

qui vérifie :

1. *linéarité sur $\mathbb{R}$:*

$$D_\gamma(aV + bW) = aD_\gamma V + bD_\gamma W \quad a, b \in \mathbb{R};$$

2. *règle de Leibniz:*

$$D_\gamma(fV) = \dot{f}V + fD_\gamma V \quad f \in C^\infty(I);$$

3. *Si V est extensible, alors pour toute extension X de V,*

$$D_\gamma V(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X.$$

$D_\gamma V$ est appelée dérivée covariante de V le long de γ

Proof 1.3.2 *Dans un premier temps on va montrer l'unicité. Supposons D_γ est un tel opérateur et soit $t_0 \in I$ quelconque. La valeur de $D_\gamma V$ en t_0 dépend seulement de la valeur de V dans un intervalle $(t_0 - \eta, t_0 + \eta)$. Choisissons un système de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ au voisinage de $\gamma(t_0)$ et écrivant*

$$V(t) = \textstyle\sum_{j=1}^n V_j(t)\partial_j$$

au voisinage de t_0. Alors, en utilisant les propriétés de D_γ, puisque ∂_j est extensible,

$$\begin{aligned} D_\gamma V(t_0) &= \sum_{j=1}^n (\dot{V}_j(t_0)\partial_j + V_j(t_0)\nabla_{\dot{\gamma}(t_0)}\partial_j) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,l=1}^n \left(\dot{V}_k(t_0) + V_j(t_0)\dot{x}_l(t_0)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)) \right) \right) \partial_k, \end{aligned}$$

où $(x_1(t),...,x_n(t))$ sont les composantes de γ dans $(x_1,...,x_n)$. Cette formule montre qu'un tel opérateur est unique quand il existe.
Pour l'existence, si $\gamma(I)$ est contenu dans une seule carte, on peut définir D_γ par la formule ci-dessus, et il est alors aisé de vérifier les propriétés 1-3. Dans le cas général, on recouvre $\gamma(I)$ par des cartes locales et on définit D_γ par la formule ci-dessus, l'unicité montre que l'opérateur qu'on obtient est bien défini.

□

Avec la notion de dérivée le long d'une courbe, on est maintenant en mesure de définir la notion de géodésique.

Definition 1.3.3 *Soit M une variété muni d'une connexion ∇ et soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe sur M.*

1. *L'accélération de γ est le champ de vecteurs $D_\gamma\dot{\gamma}$ le long de γ*
2. *La courbe γ est appelée géodésique par apport à ∇ si son accélération est identiquement nulle:*

$$D_\gamma\dot{\gamma} \equiv 0.$$

Noter que dans système de coordonnées $(x_1,...,x_n)$, l'accélération d'une courbe γ est donnée par

$$D_\gamma\dot{\gamma}(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j,l=1}^{n}(\ddot{x}_k(t) + \dot{x}_j(t)\dot{x}_l(t)\Gamma_{lj}^k(\gamma(t)))\right)\partial_k \tag{1.8}$$

où $(x_1(t),...,x_n(t))$ sont les composantes de γ dans $(x_1,...,x_n)$.

Theorem 1.3.3 ***(Existence et unicité des géodésiques)*** *Soit M une variété munie d'une connexion ∇. Pour chaque $p \in M$, chaque $V \in T_pM$, il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant t_0 et une géodésique $\gamma : I \longrightarrow M$ vérifiant $\gamma(t_0) = p$ et $\dot{\gamma}(t_0) = V$. Deux telles géodésiques coïncident sur l'intersection de leur domaine.*

Proof 1.3.3 *Dans un système de coordonnées $(x_1,...,x_n)$ au voisinage de p, d'après 1.2, une courbe γ est une géodésique si et seulement si ses composantes $(x_1(t),...,x_n(t))$ vérifient les équations*

$$\ddot{x}_k(t) + \sum_{i,j=1}^{n}\dot{x}_i\dot{x}_j\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)). \tag{1.9}$$

Ces équations sont équivalente au système suivant:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= v_k(t) \\ \dot{v}_(t) &= -\textstyle\sum_{i,j=1}^n v_i(t)v_j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Il est connu dans la théorie des équations différentielles ordinaires que ces équations admettent une solution unique une fois que les conditions initiales $\gamma(t_0)$ et $\dot{\gamma}(t_0)$ sont fixées.

□

Definition 1.3.4 *Soit M une variété munie d'une connexion ∇.*

1. *Un champ de vecteurs V le long d'une courbe γ est dit parallèle par apport à ∇ si $D_\gamma V \equiv 0$.*
2. *Un champ de vecteurs $Y \in \mathcal{X}(M)$ est dit parallèle $\nabla_X Y = 0$ s'annule partout pour tout $X \in \mathcal{X}(M)$.*

Theorem 1.3.4 ***(Transport parallèle)*** *Soit M une variété munie d'une connexion ∇. Soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe. Pour tout $t_0 \in I$ et tout $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, il existe un unique champ de vecteur V le long de γ qui est parallèle et tel que $V(t_0) = V_0$*

Proof 1.3.4 *C'est encore l'utilisation d'un théorème d'existence de solutions d'équations différentielles ordinaires.*

□

Soit M une variété munie d'une connexion ∇. Soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe. Pour tout $t_0 \in I$ et tout $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, il existe un unique champ de vecteur V le long de γ qui est parallèle et tel que $V(t_0) = V_0$. Soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe dans une variété munie d'une connexion ∇. Pour tout $t_0, t_1 \in I$, le transport parallèle définit un opérateur

$$P_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M$$

en posant $P_{t_0,t_1}(V_0) = V(t_1)$ où V est le champ de vecteurs le long de γ parallèle vérifiant $V(t_0) = V_0$. Il est facile de vérifier que c'est un isomorphisme linéaire entre $T_{\gamma(t_0)}M$ et $T_{\gamma(t_1)}M$.

Nous allons montrer que sur chaque variété riemannienne il existe une connexion naturelle compatible avec la métrique riemannienne. Mais avant, nous allons voir ce qui se passe dans $\mathbb{R}^n$.
Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, il y a une connexion naturelle, qu'on notera ∇^0, définie par

$$\nabla^0_X Y = \sum_{i=1}^{n} X(Y_i)\partial_i, \tag{1.10}$$

où X et $Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j \partial_j$ sont deux champs de vecteur quelconque sur $\mathbb{R}^n$.
Noter les symboles de Christoffel de ∇^0 sont nuls dans $(x_1, ..., x_n)$ et que l'accélération définie par coïncide avec l'accélération usuelle d'une courbe dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.3.5 *La connexion ∇_0 sur $\mathbb{R}^n$ vérifie les deux propriétés suivantes:*

1. *Pour tous champs de vecteur X, Y, on a*

$$\nabla^0_X Y - \nabla^0_Y X = [X, Y]; \tag{1.11}$$

2. *Pour tous champs de vecteur X, Y, Z, on a*

$$Z. < X, Y >_0 = < \nabla^0_Z X, Y >_0 + < X, \nabla^0_Z Y >_0 . \tag{1.12}$$

Proof 1.3.5 1. *Posons*

$$T(X, Y) = \nabla^0_X Y - \nabla^0_Y X - [X, Y].$$

Il est claire que T est $\mathbb{R}$-bilinéaire anti-symétrique, et pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla^0_{fX} Y - \nabla^0_Y fX - [fX, Y] \\ &= f\nabla^0_X Y - Y(f)X - f\nabla^0_Y X + Y(f)X - f[X, Y] = fT(X, Y). \end{aligned} \tag{1.13}$$

De la même manière, on obtient $T(X, fY) = fT(X, Y)$. Ceci étant, pour vérifier 1.11, *il suffit de vérifier que, pour $i, j = 1, ..., n, T(\partial_i, \partial_j) = 0$. Or $[\partial_i, \partial_j] = \nabla^0_{\partial_i} \partial_j = \nabla^0_{\partial_j} \partial_i = 0$ et on a trivialement $T(\partial_i, \partial_j) = 0$. Ce qui établit* 1.11.

2. *On utilise un raisonnement analogue. On pose*
$\nabla^0(<, >_0)(X, Y, Z) = Z. < X, Y >_0 - < \nabla^0_Z X, Y >_0 - < X, \nabla^0_Z Y >_0$.
Il est facile de vérifier que $\nabla^0(<, >_0)$ est $\mathbb{R}$-multi-linéaire et que, pour toute fonction f,

$$\begin{aligned} \nabla^0(<, >_0)(fX, Y, Z) &= \nabla^0(<, >_0)(X, fY, Z) \\ &= \nabla^0(<, >_0)(X, Y, fZ) \\ &= = f\nabla^0(<, >_0)(X, Y, Z), \end{aligned}$$

et de remarquer que

$$\nabla^0(<, >_0)(\partial_i, \partial_j, \partial_k) = 0,$$

ce qui établit 1.12.

□

Cette proposition nous amène à poser la définition suivante.

Definition 1.3.5 1. *Une connexion ∇ sur une variété M est dit sans-torsion si, pour tout couple de champ de vecteur X, Y sue M, on a*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

2. *Soit $(M, <, >)$ une variété riemannienne. Une connexion ∇ sur M est dite métrique ou compatible avec $<, >$ si, pour tout X, Y, Z des champs de vecteurs sur M*

$$Z. < X, Y > = < \nabla_Z X, Y > + < X, \nabla_Z Y > .$$

Lemma 1.3.6 *Soit ∇ une connexion sur une variété riemannienne $(M, <, >)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

$<,>$ est compatible avec ∇.

Pour toute courbe γ et pour tout couple (V, W) de champs de vecteur le long de γ,

$$\frac{d}{dt} < V, W >=< D_\gamma V, W > + < Z, D_\gamma W >.$$

Pour toute courbe γ et pour tout couple (V, W) de champs de vecteur parallèle le long de $\gamma, < V, W >$ est une constante.

Pour toute courbe γ. le transport parallèle $P_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ est une isométrie.

On est alors en mesure de'énoncer le lemme fondamentale de la géométrie riemannienne.

Theorem 1.3.7 ***(Le lemme fondamentale de la géométrie riemannienne)*** *Soit $(M, <, >)$ une variété riemannienne. Alors il existe une connexion sur M sans torsion et compatible avec $<, >$. Cette connexion est appelée connexion de Levi-Civita associée à $<, >$.*

Proof 1.3.6 *Puisque en chaque point le produit scalaire est non dégénérée, pour calculer $\nabla_X Y$, il suffit de calculer $< \nabla_X Y, Z >$ pour tout $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. En utilisant les deux propriétés de ∇, on obtient*

$$\begin{aligned}
< \nabla_X Y, Z > &= X. < Y, Z > - < Y, \nabla_X Z > \\
&= X. < Y, Z > - < Y, \nabla_Z X > - < Y, [X, Z] > \\
&= X. < Y, Z > -Z. < Y, X > + < \nabla_Z Y, X > - < Y, [X, Z] > \\
&= X. < Y, Z > -Z. < Y, X > + < \nabla_Y Z, X > + < [Z, Y], X > - < Y, [X, Z] > \\
&= X. < Y, Z > -Z. < Y, X > +Y. < Z, X > - < Z, \nabla_Y X > + < [Z, Y], X > - < Y, [X, Z] > \\
&= X. < Y, Z > -Z. < Y, X > +Y. < Z, X > - < Z, \nabla_X Y > + < Z, [X, Y] > + < [Z, X], Y > +
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
2 < \nabla_X Y, Z > &= X. < Y, Z > +Y. < X, Z > -Z. < X, Y > \\
&\quad + < [X, Y], Z > + < [Z, X], Y > + < [Z, Y], X > \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

Cette formule montre l'unicité. Pour l'existence prenant 1.14 comme définition de ∇ et vérifiant que ∇ est sans torsion et est métrique. Ceci est une vérification immédiate.

$\square$

La formule 1.14 est appelée **formule de Koszul**. Nous allons l'utiliser pour trouver les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita associée à une métrique $<,>$ sur une variété M. En effet, soit $(x_1, ..., x_n)$ un système de coordonnées sur M. Les symboles de Christoffel sont données par

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \textstyle\sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^l \partial_l.$$

D'après 1.14, on a, pour tout $i, j, l = 1, ..., n$,

$$< \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l >= \partial_i.g_{j,l} + \partial_j.g_{il} - \partial_l.g_{ij},$$

puisque $[\partial_i, \partial_j] = 0$ pour tout i, j et où $g_{ij} =< \partial_i, \partial_j >$. On obtient donc

$$\sum_{k=1}^n g_{kl}\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(\partial_i.g_{jl} + \partial_j.g_{il} - \partial_l.g_{ij}).$$

En introduisant la métrique $G = (g_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et son inverse $G^{-1} = (g^{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on obtient

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^n g^{kl}\frac{1}{2}(\partial_i.g_{jl} + \partial_j.g_{il} - \partial_l.g_{ij})$$

Proposition 1.3.8 *La connexion de Levi-Civita associée à la métrique euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$ est la connexion ∇_0 définie par* 1.8.

Pour finir cette section, nous allons déterminer la connexion de Levi-Civita associée à une sous-variété riemannienne de $\mathbb{R}^n$.
Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et soit $\langle , \rangle$ la métrique induite sur M par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $p \in M, T_pM$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on notera $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_pM$ la projection orthogonale.

Proposition 1.3.9 *Avec les notations ci-dessus. La connexion de Levi-Civita associée à $(M, \langle , \rangle)$, notée ∇^M, est obtenue par projection orthogonale de la connexion de Levi-Civita de $\mathbb{R}^n$. Plus précisément, soient X et Y deux champs de vecteur sur M et soit $p \in M$. Choisissons $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ deux extensions quelconque de X et Y à $\mathbb{R}^n$, respectivement. Alors*

$$(\nabla_X^M Y)(p) = \pi\left((\nabla_{\tilde{X}}^0 \tilde{Y})(p)\right) \tag{1.15}$$

Proof 1.3.7 *Pour prouver la proposition, on va prouver que ∇^M définie par* 1.15 *est bien définie, c'est à dire, elle ne dépend pas des extensions choisies, que c'est une connexion sans torsion et compatible avec $\langle , \rangle$.*

1. *∇^M est bien définie. Pour vérifier cela, il suffit de vérifier deux choses. La première est que si n champ de vecteur $\tilde{X}$ sur $\mathbb{R}$ s'annule en p alors le terme droite dans* 1.15 *s'annule. La deuxième chose est que, si $\tilde{Y}$ est un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$ qui s'annule en restriction à $W \cap M$ où W est un voisinage ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant p, alors le membre droite de* 1.15 *est nul. En effet, si $\tilde{Y} = \sum_{j=1}^n \tilde{Y}_j\partial_j$, on a*

   $$(\nabla_{\tilde{X}}^0 \tilde{Y})(p) = \sum_{j=1}^n \tilde{X}(\tilde{Y}_j)(p)\partial_j.$$

   Notons que

   $$\tilde{X}(\tilde{Y}_j) = \frac{d}{dt_{t=0}}\tilde{Y}_j(\gamma(t)),$$

   où γ est la courbe intégrale de $\tilde{X}$ passant par p. Or, $\tilde{X}$ est tangent à M et donc γ est entièrement dans M et donc $\tilde{Y}(\gamma(t)) = 0$ pour tout t, ceci permet de conclure.

2. *∇^M est une connexion. Il est claire que ∇^M vérifie 1 et 2 de la Définition 1.3.1. Vérifions 3. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $\tilde{f}$ un prolongement quelconque de f. On a*

   $$\nabla_{\tilde{X}}^0 \tilde{f}\tilde{Y} = \tilde{X}(\tilde{f})\tilde{Y} + \tilde{f}\nabla_{\tilde{X}}^0 \tilde{Y}.$$

   Puisque $\tilde{Y}$ est tangent à M, on déduit qu'au point p

$$\pi\left(\nabla^0_{\tilde X}\tilde f\tilde Y\right)=\tilde X(\tilde f)\tilde Y+\tilde f\pi\left(\nabla^0_{\tilde X}\tilde Y\right)$$

et donc

$$\nabla^M_X(fY)=X(f)Y+f\nabla^M_XY.$$

3. ∇^M *est sans torsion. On a*

$$\nabla^0_{\tilde X}\tilde Y-\nabla^0_{\tilde Y}\tilde X=[\tilde X,\tilde Y].$$

   Puisque $\tilde X$ *et* $\tilde Y$ *sont tangents à* M*, leur crochet de Lie est tangent à* M *et on a* $[\tilde X,\tilde Y](p)=[X,Y](p)$*. Ceci permet de conclure.*

4. ∇^M *est métrique. Si* Z *est tangent à* M *et* $\tilde Z$ *est une extension quelconque de* Z*, on a*

$$\tilde Z.\langle\tilde X,\tilde Y\rangle_0=\langle\nabla^0_{\tilde Z}\tilde X,\tilde Y\rangle_0+\langle\tilde X,\nabla^0_{\tilde Z}\tilde Y\rangle_0.$$

   De cette relation, on déduit immédiatement que

$$Z.\langle X,Y\rangle=\langle\nabla^M_ZX,Y\rangle+\langle X,\nabla^M_ZY\rangle.$$

□

Chapitre 2

Introduction à la géométrie de Poisson

Sommaire

La géométrie de Poisson trouve son origine dans la formulation mathématique de la mécanique Hamiltonienne. Bien que les structures de Poisson remontent au $\text{XIX}^{\text{ème}}$ siècle, notamment, avec les travaux de Poisson et Hamilton sur l'équation de mouvement, et ceux de Sophus Lie sur la géométrie des E.D.P, la théorème mathématique des variétés de Poisson n'a fait ses débuts qu'aux années quatre-vingts avec les travaux de Lie Lichnerowizc, Weinstein, etc. Depuis, la théorie s'est développée rapidement, stimulée par des connexions avec d'autre domaines de mathématiques et de Physique mathématique, y compris la géométrie différentielle, la théorie de Lie, la théorie de quantization, la géométrie non commutative la théorie de représentation, les groupes quantique, les systèmes intégrables, la mécanique classique/quantique, la théorie des cordes, etc.
L'objectif de ce chapitre est d'introduire le lecteur au domaine de la géométrie de Poisson, et ce, en présentant quelques aspects fondamentaux du sujet. Pour un traitement détaillé du thème le lecteur intéressé pourra consulter [[17], [6][26]]

Le lecteur désirant avoir un aperçu d'ensemble rapide sur la géométrie de Poisson pourra se référer à [25].
Dans la première section, on définit ce qu'est une variété de Poisson et on explicite quelques exemples. La deuxième section porte sur le théorème de Weinstein, qui permet de décrire l'aspect local d'une structure de Poisson. Il permet aussi de montrer que toute variété de Poisson est une réunion disjointe de sous variétés symplectiques immergées dites feuille symplectique. La troisième section est consacrée au calcul de Poisson. On y verra que le fibré cotangent de toute variété de Poisson jouit naturellement d'une structure d'algebroïde de Lie, ce qui donne naissance à une version contravariante du calcul de Cartan. La dernière section porte sur structures de Poisson invariantes à gauche sur un groupe de Lie.

2.1 Crochets et tenseurs de Poisson

Definition 2.1.1 *Une **structure de Poisson** sur une variété lisse M, est la donnée d'un **crochet de Poisson** sur l'espace $C^\infty(M)$ des fonctions lisses sur M, c'est-á-dire une application*

$$C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M),\ \textit{notée}\ (f,g)\to\{f,g\},$$

vérifiant les propriétés suivants :

1. *$\{,\}$ est un crochet de Lie sur $C^\infty(M)$: il est $\mathbf{R}$-bilinéaire, antisymétrique*

$$\{f,g\}=-\{g,f\}$$

   et vérifie l'identité de Jacobi

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$$

2. *il vérifie la régle de Leibniz :*

$$\{f,gh\}=\{f,g\}h+g\{f,h\}.$$

   *Muni d'une telle structure, M est dite **variété de Poisson**.*

2.1.1 Exemples de Variétés de Poisson

Exemple 2.1.1 ***(Structures de Poisson triviales)*** *Toute variété lisse M peut être équipée d'une structure de Poison triviale via : $\{f,g\}=0,\ \forall f,g\in C^\infty(M)$.*

Bien entendu, il existe des variétés de Poisson non triviales, voici quelques exemples.

Exemple 2.1.2 ***(Variété Symplectique)****. Une variété symplectique est une variété lisse M muni d'une 2-forme différentielle ω fermée (i.e. $d\omega=0$) et non dégénérée, i.e., l'homomorphisme $\omega^\flat : TM\to T^*M$ qui á $v\to\omega(v,.)$ est un isomorphisme ; on notera $\omega^\#$ sont inverse.*

Soit (M,ω) une variété symplectique. Définissons, pour toutes fonctions f et g sur M,

$$\{f,g\}:=\omega(X_f,X_g)=X_f(g)=-X_g(f),$$

où X_f est le champ Hamiltonien de f relativement à ω défini par

$$X_f = -\omega^{\#}(df).$$

L'application $\{,\}$ ainsi définie est un crochet de Poisson, dit crochet de Poisson de la forme symplectique ω.
Un crochet de Poisson sera dit symplectique, s'il est le crochet de Poisson d'une forme symplectique.
L'exemple suivant montre q'un crochet de Poisson n'est en général pas symplectique.

Exemple 2.1.3 ***Crochet de Poisson classique sur*** $\mathbb{R}^n$***.*** *Prenons* $M = \mathbf{R}^n (n \in \mathbf{N}^*)$ *avec coordonnées globales* $(q_1, ..., q_r, p_1, ...p_r, z_1, ..., z_s)$ *où r et s sont des entier naturels tels que* $2r + s = n$*, et définissons, pour tout* $f, g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$*,*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)$$

Le crochet ci-dessus est appelé crochet de Poisson classique, et à été défini originalement par Siméon Denis Poisson lui-même afin d'étudier l'équation de mouvement dans la mécanique céleste.

Soit $(M, \{,\})$ une variété de Poisson. Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, l'application $g \to \{f, g\}$ est une dérivation de $C^\infty(M)$, en vertu de la régle de Leibniz. Il existe donc un champ de vecteurs unique X_f tel que, pour toute fonctions $g \in C^\infty(M)$

$$\{f, g\} = X_f(g) = dg(X_f)$$

Le champ de vecteurs X_f est appelé **champ hamiltonien** de f. Lorsque $X_f = 0$ on dit que f est une **fonction de Casimir**
Par bilinéarité du crochet de Poisson, on a

$$X_{tf+sg} = tX_f + sX_g \qquad \forall t, s \in \mathbf{R}$$

ce qui montre que l'ensemble des champs hamiltoniens est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{X}^1(M)$.
L'identité de Jacobi implique que, pour tout $f, g, h \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}
[X_f, X_g](h) &= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) \\
&= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\} \\
&= \{\{f, g\}, h\} \\
&= X_{\{f,g\}}(h),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

2.1.2 Tenseur de Poisson

Definition 2.1.2 *On appelle* ***tenseur de Poisson*** *sur une variété M un champ de bivecteurs* π *sur M dont le crochet correspondent* $\{f, g\}_\pi := \pi(df, dg)$ *est de Poisson, c'est-á-dire qu'il vérifie l'identité de Jacobi.*

Exemple 2.1.4 *Avec les notations de (l'exemple 1.3.2) si* ω *est une 2-forme non dégénérée sur une variété M,* $\omega^\flat$ *réalise une identification entre* TM *et* T^*M*, et on peut définir donc un champ de bivecteurs* π *sur M, en posant, pour tout* $\alpha, \beta \in T^*M$ *:*

$$\pi(\alpha, \beta) := \alpha(\omega^{\#}(\beta)) = -\beta(\omega^{\#}(\alpha)).$$

Alors π est un tenseur de Poisson si et seulement si $d\omega = 0$
Dans le cas général, il est possible d'exprimer, à l'instar de l'exemple ci-dessus, l'identité de Jacobi convenablement. L'outil principal pour ce faire est le crochet de Schouten-Nijenhuis défini dans le paragraphe suivant.

2.1.3 Le crochet de Schouten Nijenhuis

Le crochet de Schouten Nijenhuis est une extension graduée naturelle du crochet de Lie des champs de vecteurs aux champs de multivecteurs, qui permet la caractérisation des tenseurs de Poisson.
Soit M une variété lisse. Notons $\langle , \rangle$ le couplage de dualité entre T_xM et T_x^*M, c'est à dire,

$$\langle a, v\rangle = \langle v, a\rangle := a(v) \quad \forall a \in T_x^*M, v \in T_x^M.$$

Ce couplage s'étend, de manière naturelle, en un couplage de $\Omega^*(M)$ avec $\mathfrak{X}(M)$ comme suite: d'abord, si f et g sont deux fonctions sur M, on prend $\langle f, g\rangle$ égale à fg. En suite, si α et X sont, respectivement, une 1-forme et un champ de vecteurs sur $M, \langle \alpha, X\rangle$ sera l'élément de $\mathcal{C}^\infty(M)$ donné, pour tout $x \in M$, par:

$$\langle \alpha, X\rangle(x) = \langle X, \alpha\rangle(x) := \langle \alpha(x), X(x)\rangle.$$

Si maintenant $\eta \in \Omega^q(M)$ et $P \in \mathfrak{X}(M)$ avec η et P sont décomposables, i.e.,

$$\eta = \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_q \ \text{ et } \ P = X_1 \wedge ... \wedge X_p,$$

où $\alpha_i \in \Omega^1(M)$ et $X_j \in \mathfrak{X}^1(M)$, on déduit

$$\langle \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_q, X_1 \wedge ... \wedge X_p\rangle := \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q, \\ \det(\langle \alpha_i, X_j\rangle) & \text{si } p = q. \end{cases} \tag{2.2}$$

La valeur en un point $x \in M$ de $\langle \eta, P\rangle$ ne dépend que des valeurs de η et P en M, s'écrivent localement comme sommes finies de champs de multivecteurs et de formes différentielles décomposables, le couplage 2.2 s'étend, de manière unique,en un couplage $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire sur $\Omega^*(M) \times \mathfrak{X}^*(M)$ tout entier.
Avec cette définition du couplage $\langle , \rangle$, on a

$$\langle \eta, X_1 \wedge ... \wedge X_q\rangle = \eta(X_1, ..., X_q),$$
$$\langle \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p, P\rangle = P(\alpha_1, ..., \alpha_p),$$

pour tous champs de vecteurs $X_1, ..., X_q$, toutes 1-formes $\alpha_1, ..., \alpha_p$, toute q-forme η et tout champ de p-vecteurs P.
Le couplage $\langle , \rangle$ permet de définir, pour tout champ de multivecteurs $P \in \mathfrak{X}^p(M)$, une application $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire, $i_p : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$, dite produit intérieur par P, en posant pour toute k-forme différentielle ω et tout champ de $(k-p)$-vecteurs R

$$\langle i_p\omega, R\rangle = \langle \omega, P \wedge R\rangle \tag{2.3}$$

si $k \geqslant p$; $i_p\omega = 0$ sinon. Quand P est un champ de vecteurs X, i_X n'est rien d'autre que le produit intérieur par X usuel.
On vérifie immédiatement que

$$i_{P\wedge Q} = i_Q \circ i_P = (-1)^{pq} i_P \circ i_Q, \tag{2.4}$$

pour tous champ de multivecteurs P et Q.
Le couplage $\langle , \rangle$ permet aussi d'exprimer la dérivée $\mathcal{L}_X\eta$ d'une forme $\eta \in \Omega^q(M)$ par:

$$\langle \mathcal{L}_X\eta, Q\rangle = X.\langle \eta, Q\rangle - \langle \eta, \mathcal{L}_X Q\rangle \quad \forall Q \in \mathfrak{X}^q(M) \tag{2.5}$$

En vertu de la formule de Cartan, on peut réécrire cette équation sous la forme:

$$\begin{aligned} \langle \eta, \mathcal{L}_X Q\rangle &= X.\langle \eta, Q\rangle - \langle \mathcal{L}_X\eta, Q\rangle \\ &= \langle d(i_Q\eta), X\rangle - \langle i_X(d\eta) + d(i_X\eta), Q\rangle, \end{aligned}$$

soit

$$\langle \eta, \mathcal{L}_X Q\rangle = \langle d(i_Q\eta), X\rangle - \langle d(i_X\eta), Q\rangle - \langle d\eta, X \wedge Q\rangle. \tag{2.6}$$

L'avantage de cette équation est le fait que son membre droit a toujours un sens quand on remplace X par un champ de multivecteurs quelconque. Ceci permet d'étendre la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X Q$(et donc le crochet de Lie des champs de vecteurs) en un crochet gradué sur les champs de multivecteurs, dit crochet de Schouten-Nijenhuis, de la manière suivante $[14], [15]$: pour tous $P \in X^p(M)$ et $Q \in X^q(M)$, le crochet de Schouten-Nijenhuis de P et Q est le champs de $(p+q-1)$-vecteurs noté $[P, Q]$, donné par

$$\langle \eta, [P, Q]\rangle = (-1)^{(p-1)(q-1)}\langle d(i_Q\eta), P\rangle - \langle d(i_P\eta), Q\rangle + (-1)^p\langle d\eta, P \wedge Q\rangle \tag{2.7}$$

,

pour toute $(p+q-1)$-forme η.

Theorem 2.1.1 *Le crochet de Schouten-Nijenhuis est* $\mathbb{R}$*-bilinéaire et satisfait les propriétés suivantes :*

1. *Pour tous* $f \in C^\infty(M), X \in X^1(M)$ *et* $P \in X^p(M)$,

$$[f, P] = -i_{df}P, \quad [X, P] = \mathcal{L}_X P \tag{2.8}$$

2. *L'antisymétrie graduée : pour tous* $P \in X^p(M)$ *et* $Q \in X^q(M)$,

$$[P, Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[Q, P]. \tag{2.9}$$

3. *La régle de Leibniz graduée : pour tous $P \in X^p(M), Q \in X^q(M)$, et $R \in X^r(M)$,*

$$[P, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P, R], \tag{2.10}$$

$$[P \wedge Q, R] = P \wedge [Q, R] + (-1)^{(r-1)q}[P, R] \wedge Q. \tag{2.11}$$

4. *L'identité de Jacobi graduée :*

$$(-1)^{(p-1)(r-1)}[P, [Q, R]] + (-1)^{(q-1)(p-1)}[Q, [R, P]] + (-1)^{(r-1)(q-1)}[R, [P, Q]] = 0 \tag{2.12}$$

Proof 2.1.1 *La première égalité de (a) est immédiate, la deuxième n'est autre que 2.6; quant à (b), elle est évidente.*
Pour montrer (c), il suffit de montrer 2.10, puisque 2.11 s'en déduit par anti-symétrie. Si $q = 0$, i.e. $Q = f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, un calcul direct donne

$$[P, fR] = (-1)^{(p-1)(r-1)} R \wedge (i_{df} P) + f[P, R]$$

soit en utilisant 2.8 et 2.9,

$$[P, fR] = [P, f] \wedge R + f[P, R], \qquad (*)$$

ce qui établit 2.10 dans ce cas.
Si $q = 1$, i.e $Q = X$ est un champ de vecteurs alors, en utilisant la formule de Cartan, on calcule

$$\begin{aligned}
\langle \eta, [P, X \wedge R] \rangle &= (-1)^{(p-1)r} \langle d(i_{X \wedge R\eta}), P \rangle - \langle d(i_{P\eta}), X \wedge R \rangle + (-1)^p \langle d\eta, P \wedge X \wedge R \rangle \\
&= (-1)^{(p-1)r} \langle d(i_R(i_{X\eta})), P \rangle - \langle i_X(d(i_{P\eta})), R \rangle + \langle i_X(d\eta), P \wedge R \rangle \\
&= (-1)^{(p-1)r} \langle d(i_R(i_{X\eta})), P \rangle - \langle \mathcal{L}_X(i_{P\eta}) - (-1)^p d(i_p(i_X\eta)), R \rangle + \langle \mathcal{L}_X\eta - d(i_X\eta), P \wedge R \rangle \\
&= (-1)^{(p-1)} \langle i_X\eta, [P, R] \rangle - \langle \mathcal{L}_X(i_{P\eta}), R \rangle + \langle \mathcal{L}_X\eta, P \wedge R \rangle \\
&= (-1)^{(p-1)} \langle \eta, X \wedge [P, R] \rangle + \langle i_P\eta, \mathcal{L}_X R \rangle - \langle \eta, \mathcal{L}_X(P \wedge R) \rangle \\
&= \langle \eta (-1)^{(p-1)} X \wedge [P, R] - (\mathcal{L}_X P) \wedge R \rangle
\end{aligned}$$

soit en utilisant 2.8 et 2.9,

$$[P, X \wedge R] = [P, X] \wedge R + (-1)^{(p-1)} X \wedge [P, R] \qquad (**)$$

ce qui établit 2.10 dans ce cas aussi.
Supposons maintenant par récurrence sur le degré de Q que la propriété est vraie jusqu'à $q \geqslant 1$ et montrons la quand le degré de Q est égale à $q + 1$. On commence d'abord par

le cas particulier où Q est de la forme $Q = X \wedge Q'$ avec Q' est un champ de q-vecteurs. Dans ce cas, par hypothèse de récurrence et $(**)$, on a

$$\begin{aligned}
[P,(X \wedge Q') \wedge R] &= [P, X \wedge (Q'\wedge)R] \\
&= [P,X] \wedge Q'R + (-1)^{(p-1)} X \wedge [P, Q' \wedge R] \\
&= [P,X] \wedge Q'R + (-1)^{(p-1)} X \wedge ([P,Q'] \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q' \wedge [P,R]) \\
&= [P,X] \wedge Q'R + (-1)^{(p-1)(q+1)} (X \wedge Q') \wedge [P,R].
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que le crochet de Schouten-Nijenhuis est de type local: les valeurs de $[S,T]$ sur un ouvert U de M, dépendent uniquement des valeurs de S et T sur cet ouvert. En effet, vu la bilinéarité et l'antisymétrie du crochet de Schouten-Nijenhuis, il suffit de vérifier que $[S,T] = 0$ sur U si T s'annule sur U. Soit alors $x \in U$ arbitraire, et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ une fonction plateau qui vaut 1 au voisinage de x et 0 en dehors de U. Alors, fT est identiquement nulle sur U, et on a d'après $(*)$,

$$0 = [S, fT](x) = [S,f](x) \wedge T_x + f(x)[S,T](x) = [S,T](x).$$

Pour conclure, tout champ de $(q+1)$-vecteurs peut s'écrire localement comme produit extérieure d'un champ de vecteurs et un champ de q-vecteurs.
Reste à montrer (d). Pour cela,considérons le Jacobiateur du crochet de Schouten-Nijenhuis, i.e., l'application $\mathcal{J} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ définie par:

$$\mathcal{J}(P,Q,R) := [P,[Q,R]] - [[P,Q],R] - (-1)^{(p-1)(q-1)}[Q,[P,R]]. \tag{2.13}$$

Le crochet de Schouten-Nijenhuis satisfait donc (d) si et seulement son Jacobiateur est identiquement nul.
En utilisant (b) et (c), on peut vérifier immédiatement que le Jacobiateur satisfait les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(P,Q,R) &= -(-1)^{(p-1)(q-1)} \mathcal{J}(Q,P,R) \\
&= -(-1)^{(p-1)(r-1)} \mathcal{J}(P,R,Q)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\mathcal{J}(P \wedge Q, R, S) = P \wedge \mathcal{J}(Q,R,S) + (-1)^{q(r+s)} \mathcal{J}(P,R,S) \wedge Q. \tag{2.15}$$

En particulier, le Jacobiateur est de type local(se démontre de la même manière qu'en haut). On peut donc travailler dans le domaine d'une carte, dans le quel P, Q et R sont des sommes finies de produits extérieurs de champs de vecteurs(ou éventuellement, des fonctions, si leur degré est 0). Les propriétés 2.14 et 2.15 permettent alors de réduire le calcul du Jacobiateur au calcul de $\mathcal{J}(P,Q,R)$ avec P, Q et R sont de degré inférieur ou égale à 1; ce qui permet de conclure.

□

Lemma 2.1.2 ([*14*]) *Soit π un champ de bivecteurs sur une variété M. Pour toutes fonctions lisses sur M, f , g et h, on a*

$$\{f,\{g,h\}\}_\pi + \{g,\{h,f\}\}_\pi + \{h,\{f,g\}\} = \tfrac{1}{2} < df \wedge dg \wedge dh, [\pi,\pi] >$$

Proof 2.1.2 *Remarquons d'abord que pour tout champ de vecteurs X, on a*

$$\begin{aligned}\langle i_\pi(df\wedge dg\wedge dh), X\rangle &= \langle df\wedge dg\wedge dh, \pi\wedge X\rangle\\ &= \pi\wedge X(df\wedge dg\wedge dh)\\ &= \pi(df,dg)dh(X)-\pi(df,dh)dg(X)+\pi(dg,dh)df(X)\\ &= \langle\{f,g\}_\pi dh+\{h,f\}_\pi dg+\{g,h\}_\pi df, X\rangle,\end{aligned}$$

soit

$$i_\pi(df\wedge dg\wedge dh)=\{f,g\}_\pi dh+\{h,f\}_\pi dg+\{g,h\}_\pi df.$$

Ainsi, compte tenu de 2.7*, on a*

$$\begin{aligned}\langle df\wedge dg\wedge dh, [\pi,pi]\rangle &= -2\langle d(i_\pi(df\wedge dg\wedge dh)),\pi\rangle\\ &= -2\langle -d(\{f,g\}_\pi dh+\{h,f\}_\pi dg+\{g,h\}_\pi df),\pi\rangle\\ &= -2\langle d\{f,g\}_\pi\wedge dh+d\{h,f\}_\pi\wedge dg+d\{g,h\}_\pi\wedge df,\pi\rangle\\ &= 2(\{f,\{g,h\}_\pi\}_\pi+\{g,\{h,f\}_\pi\}_\pi)+\{h,\{f,g\}_\pi\}_\pi,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

□

Corollaire 2.1.3 *Un champ de bivecteurs* π *sur une variété M est un tenseur de Poisson si et seulement si l'une des proprétés suivantes est satisfaites :*

- *Le crochet correspondent,* $\{,\}_\pi$ *satisfait l'identité de Jacobi sur les fonctions coordonnées.*

- *Le crochet de Schouten-Nijenhuis de* π *avec lui même est nul :* $[\pi,\pi]=0$.

- *Relativement á tout sustème de coordonnées* $(x_1,...,x_d)$*, les composantes de* π *obéissent au système d'équations*

$$\sum_{l=1}^{d}(\pi_{il}\frac{\partial\pi_{jk}}{\partial x_l}+\pi_{jl}\frac{\partial\pi_{ki}}{\partial x_l}+\pi_{kl}\frac{\partial\pi_{ij}}{\partial x_l})=0,\forall i,j,k. \tag{2.16}$$

Proof 2.1.3 *Relativement à un système de coordonnées* $(x_1,...,x_d)$*, le champ de trivecteurs* $[\pi,\pi]$ *s'écrit,*

$$[\pi,\pi]=\sum_{i<j<k}\Gamma_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k},$$

où, d'après le lemme ci-dessus,

$$\begin{aligned}\Gamma_{ijk} &= [\pi,\pi](dx_i,dx_j,dx_k)\\ &= 2(\{x_i,\{x_j,x_k\}_\pi\}_\pi+\{x_j,\{x_k,x_i\}_\pi\}_\pi+\{x_k,\{x_i,x_j\}_\pi\}_\pi). \end{aligned}\tag{2.17}$$

Maintenant, pour tout i, j, k,

$$\begin{aligned} \{x_i, \{x_j, x_k\}_\pi\}_\pi &= \pi(dx_i, d\{x_j, x_k\}) \\ &= \pi(dx_i, d\pi_{jk}) \\ &= \pi\left(dx_i, \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l} dx_l\right) \\ &= \sum_{l=1}^{d} \pi_{il} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

ce qui permet de conclure.

□

Une structure de Poisson est déterminer donc, de manière unique, par la donnée d'un champ de bivecteurs vérifiant les propriétés du corollaire ci-dessus.

Exemple 2.1.5 *Tout champ de bivecteurs* π *sur une variété M de dimension 2 est un tenseur de Poisson, puisque* $[\pi, \pi]$ *est de degré* $3 > 2 = \dim M$ *et donc* $[\pi, \pi] = 0$.

Exemple 2.1.6 ***(Structures de Poisson constantes sur*** $\mathbb{R}^n$***).*** *Toute matrice antisymétrique à coefficients réels,* $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, *détermine un champ de bivecteurs sur* $\mathbb{R}$ *par:* $\pi = \sum_{i<j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ *qui est de Poisson; par* 2.16.

Plus généralement,

Exemple 2.1.7 *Si* $X_1, ..., X_n$ *sont des champs de vecteurs sur une variété M qui commutent deux à deux et* $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *est une matrice antisymétrique à coefficients réels, le champ de bivecteurs* $\pi = \sum_{i<j} a_{ij} X_i \wedge X_j$ *définit sur M un tenseur de Poisson, puisque le crochet de Schouten-Nijenhuis* $[\pi, \pi]$ *est nul.*

L'exemple suivant montre que le dual d'une algèbre de Lie jouit naturellement d'une structure de Poisson.

Exemple 2.1.8 ***(Structures de Lie-Poisson sur l'espace dual d'une algèbre de Lie).*** *Soit* $(\mathfrak{g}, [,])$ *une algèbre de Lie de dimension finie* n *et soit* π *le champ de bivecteurs défini sur* $\mathfrak{g}^*$ *de* $\mathfrak{g}$ *par:*

$$\pi_a(u, v) = \langle a, [u, v] \rangle \quad \forall a \in \mathfrak{g}^*, u, v \in \mathfrak{g},$$

où u *et* v *sont considérer comme des élément de* $\mathfrak{g}^{**}$ *via l'identification* $\mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}$.
Le crochet correspondant est donné, par:

$$\{f, g\}_\pi = \langle a, [d_a f, d_a g] \rangle.$$

Le champ de bivecteurs π *ainsi défini est un tenseur de Poisson sur* $\mathfrak{g}^*$, *dit structure de Lie-Poisson associée à* $(\mathfrak{g}, [,])$. *En effet, si* $(e_1, ..., e_n)$ *est une base de* $\mathfrak{g}$, *elle définit un système de coordonnées linéaires globales* $(z_1, ..., z_n)$ *sur* $\mathfrak{g}^*$ *dans lequel, par définition de, on a* $\pi_{ij} = \{z_i, z_j\}_\pi = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k z_k$, *où* c_{ij}^k *sont les constantes de structures de* $\mathfrak{g}$ *définies par* $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k$. *Il est alors immédiat de vérifier que* 2.16 *est équivalente à*

$$\sum_{m=1}^n \left(c_{im}^l c_{jk}^m + c_{jm}^l c_{ki}^m + c_{km}^l c_{ij}^m \right) = 0 \quad \forall i, j, k, l,$$

qui n'est rien d'autre que l'identité de Jacobi du crochet de Lie $[,]$ *de* $\mathfrak{g}$, *exprimée en fonction des constantes de structures* c_{ij}^k.

2.2 Feuilles symplectiques et structure locale des variétés de Poisson

Le but de cette section est de mettre en évidence la théorème de Weinstein qui permet de décrire l'aspect local d'une variété de Poisson, ainsi que la notion de Feuilles symplectiques associées à une variété de Poisson.

2.2.1 Définitions et vocabulaire

Étant donne un tenseur de Poisson π sur une variété M, on peut définir un morphisme de fibrés vectoriels $\#_\pi : T^*M \longrightarrow TM$, dit application d'ancrage, en posant, pour tout $x \in M$, et tout $a, b \in T_x^*M$:

$$b(\#_\pi(x)(a) = \pi_x(a, b).$$

Celui-ci induit une application $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire sur les sections, notée encore $\#_\pi$: $\Omega^1(M) \longrightarrow \mathcal{X}^1(M)$, et définie, pour toute 1-forme différentielle α, par:

$$\#_\pi(\alpha) := \pi(\alpha, .) = -\pi(., \alpha).$$

En particulier, si $\alpha = df$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, alors le champ de vecteurs $\#_\pi(df)$ n'est autre que le champ hamiltonien de f, en effet, pour tout $g \in \mathcal{C}^\infty(M), \#_\pi(df)(g) = dg(\pi_\#(df)) = \pi(df, dg) = \{f, g\}_\pi = X_f(g)$. Ainsi nous avons,

$$X_f = \#_\pi(df) = -[f, \pi] = -[\pi, f]. \tag{2.19}$$

L'image $\mathcal{C} = Im\#_\pi$ du morphisme de fibrés $\#_\pi$ est appelée le champ caractéristique de la variété de Poisson (M, π). Pour tout $x \in M$, la fibre

$$\mathcal{C}_x = Im\#_\pi(x) = \{X_f(x) : f \in \mathcal{C}^\infty(M)\}$$

du champ caractéristique est appelée l'espace caractéristique en x, sa dimension, notée $\rho_\pi(x) = \dim \mathcal{C}$, est appelée le rang de π en x. Autrement dit, $\rho_\pi(x)$ est le rang de l'application linéaire $\#_\pi(x) : T_x^*M \longrightarrow T_xM$. Si $(x_1, ..., x_d)$ est un système de coordonnées autour de x, on a

$$\#_\pi(dx_i) = \sum_{j=1}^d \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

où les fonctions π_{ij} sont les composantes de π dans $(x_1, ..., x_d)$. Donc $\rho_\pi(x)$ est le rang de la matrice antisymétrique $(\pi_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq d}$, et est donc paire.
Puisque $\{\#_\pi(dx_i)(x)\}_{1 \leq i \leq d}$ engendre $\mathcal{C}_x$, on peut en extraite une base de $\mathcal{C}_x$, disons $\{\#_\pi(dx_{i_j})(x)\}_{1 \leq j \leq \rho_\pi(x)}$, et donc la famille $\{\#_\pi(dx)\}_{1 \leq j \leq \rho_\pi(x)}$ est libre au voisinage de x. Ce qui montre que le rang de π est au moins égale a $\rho_\pi(x)$ au voisinage de x. Un point $x \in M$ est dit régulier s'il s'agit d'un maximum local de ρ_π, ou d'une manière équivalente, si ρ_π est constante au voisinage de x. Un point de M qui n'est pas régulière est dit point singulier de π. On notera M^{reg} l'ensemble des points réguliers de (M, π). Quand $M = M^{reg}$, on dit de π qu'il est régulier. L'ensemble M^{reg} est clairement ouvert; il est aussi dense dans M. En effet, si $y \in M$ est un point singulier de π et U un voisinage ouvert quelconque de y, la restriction sur U de ρ_π admet un maximum en un point $x \in U$ (puisque la fonction ρ_π est bornée et à valeurs dans N), qui est donc un point régulier.

Exemple 2.2.1 *Prenons $M = \mathbb{R}^2$ et $\pi = f(x)\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$, où f est une fonction sur $\mathbb{R}$, nulle sur $[-1, 1]$ et strictement positive ailleurs. Alors, M^{reg} est la réunion de:$]-1, 1[\times\mathbb{R}$ où le rang est nul, et les demi-plans $|x| > 1$ où le rang est égal à 2; l'ensemble des points singuliers de π est la réunion des droites d'équations $|x| = 1$. En général, si $\pi = h(x, y)\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$, où h est une fonction lisse sur $\mathbb{R}^2$, alors l'ensemble des points singuliers de π est le bord de l'ensemble des points où s'annule h.*

Sur l'espace caractéristique $\mathcal{C}_x$, on peut définir une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire anti-symétrique ω_x en posant pour tout $u, v \in \mathcal{C}_x$,

$$\omega_x(u, v) = \pi(a, b) = b(u) = -a(v), \tag{2.20}$$

où a et b sont respectivement des antécédents de u et v par $\pi_\#(x)$. On vérifie facilement que ω_x est bien définie indépendamment du choix de a et b, et qu'elle est non-dégénérée, ce qui signifie que ω_x est une forme symplectique sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_x$.
Soient $(M, \pi), (N, \pi')$ deux variétés de Poisson, $\{,\}_\pi$ et $\{,\}_{\pi'}$ les crochets de Poisson respectifs. Une application $\phi : M \longrightarrow N$ est dit morphisme de Poisson si

$$\{f \circ \phi, g \circ \phi\}_\pi = \{f, g\}_{\pi'} \circ \phi \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(N).$$

En d'autre termes, l'application: $\phi^* : \mathcal{C}^\infty(N) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M), f \longrightarrow f \circ \phi$, est un homomorphisme d'algèbres de Lie. De manière équivalente, ϕ est un morphisme de Poisson si

$$\phi_*\pi = \pi' \circ \phi;$$

En effet, $\phi_*\pi(df, dg) = \pi(\phi^*(df), \phi^*(dg)) = \pi(df \circ \phi, dg \circ \phi) = \pi'(df, dg) \circ \phi$.

Exemple 2.2.2 *Si $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie, alors l'application dual $\phi^* : \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ est un morphisme de Poisson ($\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ étant munis de leurs structures de Lie-Poisson)*

Un champ de vecteurs Y sur une variété de Poisson (M, π) est dit champ de Poisson si la dérivée de Lie de π dans la direction de Y est nulle, ou de manière équivalente, si le flot local Φ_Y^t de Y préserve π, Φ_Y^t est un morphisme de Poisson là où il est défini. Par exemple, les champs hamiltoniens sont des champs de Poisson, puisque, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\mathcal{L}_{X_f}\pi = [X_f, \pi] = -[[f, \pi], \pi] = -[f, [\pi, \pi]] - [\pi, [f, \pi]] = -\mathcal{L}_{X_f}\pi,$$

ce qui fait

$$\mathcal{L}_{X_f}\pi = 0 \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M). \tag{2.21}$$

La réciproque n'est en général pas vraie, même localement. Par exemple, si π est trivial alors tout champ de vecteurs est de Poisson alors que le seul champ hamiltonien est le champ de vecteurs nul.
Si Y est une champ de Poisson sur une variété de Poisson (M, π), alors tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$[Y, X_f] = X_{Y(f)}; \tag{2.22}$$

en effet, d'après (1.2),

$$[Y, X_f] = -[Y, [\pi, f]] = -[[Y, \pi], f] - [\pi, [Y, f]] = -[\pi, Y(f)] = X_{Y(f)}.$$

2.2.2 Le théorème de Weinstein

Theorem 2.2.1 *Autour de tout point x d'une variété de Poisson (M, π), il existe un système de coordonnées $(q_1, ..., q_r, p_1, ..., p_r, z_1, ..., z_s)$ centre en x dans lequel π a pour expression locale*

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} \varphi_{i,j} \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_j},$$

avec $\varphi_{i,j}$ dépendent uniquement des coordonnées z_i et s'annulent en x.

Proof 2.2.1 *Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur $r = \frac{1}{2}\rho_\pi(x)$. Le théorème étant trivialement vérifié si $r = 0$, supposons qu'il est vrai jusqu'à $r - 1 \geq 0$ et montrons le quand le rang en x est égale à $2r$.*
Puisque $\pi(x) \neq 0$, il existe deux fonctions f et g telles que $\{f, g\}_\pi(x) \neq 0$. Prenons $q_1 = f - f(x)$, alors $X_{q_1}(g)(x) = \{f, g\}_\pi(x) \neq 0$ et donc $X_{q_1}(x) \neq 0$. Il existe donc, en vertu du théorème de redressement des champs de vecteurs, un système de coordonnées $(x_1, ..., x_d)$ centre en x dans lequel $X_{q_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Posons $p_1 = x_1$, alors $\{q_1, p_1\}_\pi = X_{q_1}(p_1) = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 1$. De plus, X_{q_1}, et X_{p_1} sont linéairement indépendant (sinon on aurait $X_{q_1} = \lambda X_{p_1}$ et donc $\{q_1, p_1\}_\pi = X_{q_1}(p_1) = \lambda X_{p_1}(p_1) = 0$) et commutent :

$$[X_{q_1}, X_{p_1}] = X_{\{q_1, p_1\}_\pi} = 0.$$

Il existe donc, d'après le théorème de redressement simultané de Frobenius, un système de coordonnées $(y_1, ..., y_d)$ centré en x tel que

$$X_{q_1} = \frac{\partial}{\partial y_1} \text{ et } X_{p_1} = \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

L'application $(y_1, ..., y_d) \longrightarrow (q_1, p_1, y_3, ..., y_d)$ est de matrice Jacobienne de la forme

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & * \\ 0 & I_{d-2} \end{pmatrix}$$

où I_{d-2} est la matrice identité d'ordre $d-2$; son déterminant est égale à 1, donc $q_1, p_1, y_3, ..., y_d$ définissent un système de coordonnées sur un voisinage ouvert U de x. Dans ce nouveau système de coordonnées, on a

$$\{q_1, p_1\}_\pi = 1, \{q_1, y_i\}_\pi = \{p_1, y_i\}_\pi = 0 \forall i \geq 3,$$

et pour tout $i, j \geq 3$,

$$\{q_1, \{y_i, y_j\}_\pi\}_\pi = \{y_i, \{q_1, y_j\}_\pi\}_\pi - \{y_j, \{q_1, y_j\}_\pi\}_\pi = 0.$$

De même, $\{p_1, \{y_i, y_j\}_\pi\}_\pi = 0$. En d'autre termes,

$$\pi = \frac{\partial}{\partial q_1} \wedge \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=3}^{d} \pi_{i,j} \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j} \tag{2.23}$$

avec

$$X_{q_1}(\pi_{i,j}) = X_{p_1}(\pi_{i,j}) = 0 \ \ \forall i, j \geq 3. \tag{2.24}$$

Considérons maintenant l'application $\Phi := (y_3, ..., y_d)$ définie sur U et à valeurs dans $\mathbf{R}^{d-2}$. Puisque $dy_3, ..., dy_d$ sont linéairement indépendantes, Φ réalise une submersion surjective de U sur un ouvert U' de $\mathbf{R}^{d-2}$. De plus, $\ker \Phi_* = vect\{X_{q_1}, X_{p_1}\}$, et donc d'après (1.7), les fonctions $\pi_{i,j}$ sont constantes sur les fibres $\Phi^{-1}(c)$ de Φ. Il existe alors des fonctions uniques $\pi'_{i,j} : U' \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que $\pi_{i,j} = \pi'_{i,j} \circ \Phi$ pour tout $i, j \geq 3$; ce qui permet de définir un tenseur de Poisson π' sur U' par

$$\pi' = \frac{1}{2} \sum_{i,j=3}^{d} \pi'_{i,j} \frac{\partial}{\partial y'_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y'_j},$$

où $(y'_3, ..., y'_d)$ sont les coordonnées canonique sur U'. Notez que Φ est un morphisme de Poisson :$\Phi_*\pi = \pi' \circ \Phi$. D'après (1.6), la matrice de $\pi_\#(x)$ relativement à $(q_1, p_1, y_3, ..., y_d)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \prod \end{pmatrix}$$

où $\prod$ est la matrice carrée d'ordre $d-2$ de coefficients $\pi_{i,j}(x) = \pi'_{i,j}(\Phi(x))$. Ceci montre que le rang de π' en $\Phi(x)$ est $2(k-1)$. Par hypothèse de récurrence, il existe un système de coordonnées $(q'_2, ..., q'_r, p'_2, ..., p'_r, z'_1, ..., z'_s)$ autour de $\Phi(x)$ tel que

$$\pi = \sum_{i=2}^{r} \frac{\partial}{\partial q'_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p'_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} \varphi'_{i,j} \frac{\partial}{\partial z'_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z'_j}, \quad \varphi'_{i,j}(\Phi(x)) = 0$$

et $\varphi'_{i,j}$ ne dépendent que des coordonnées $z'_1, ..., z'_s$. En posant

$$q_i = q'_i \circ \Phi, p_i = p'_i \circ \Phi \quad \forall i = 2, ..., r \text{ et } z_j = z'_j \circ \Phi \ \forall j = 1, ..., s$$

on obtient finalement le système de coordonnées souhaite.

$\square$

Exemple 2.2.3 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} c_{ij}^k z_k \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_j}$ la structure de Lie-Poisson sur le dual $\mathfrak{g}^*$ correspondante. Alors, π est de rang nul à l'origine (puisqu'il s'y annule) et donc $(z_1, ..., z_n)$ est un système de coordonnées de Darboux-Weinstein autour de l'origine dans lequel le terme $\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}$ n'apparait pas et $\varphi_{ij} = \sum_k c_{ij}^k z_k$ sont linéaires.*

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème de Weinstein.

Corollaire 2.2.2 *Autour de tout point régulier x de rang $2r$ d'une variété de Poisson (M, π), il existe un système de coordonnées $(q_1, ..., q_r, p_1, ..., p_r, z_1, ..., z_l)$ centré en x dans lequel π s'écrit*

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Un cas particulier important est celui où le rang du tenseur de Poisson est partout égale à la dimension de la variété.

Proposition 2.2.3 *Un tenseur de Poisson π sur une variété M est symplectique si et seulement si'il est de rang constant égale à la dimension de M.*

Proof 2.2.2 *Si π est symplectique et ω la forme symplectique correspondante, alors $\#_\pi = -\omega^\#$, qui est inversible par non dégénérescence de ω. Inversement, si π est de rang constant egale à la dimension de M, alors $\#_\pi$ est un isomorphisme de TM dans T^*M et donc le champ caractéristique $\mathcal{C}$ de π coïncide avec le fibré tangent TM tout entier. Ainsi (1.3) définit une 2-forme ω sur M, qui est non dégénérer par définition. D'après Corollaire (1.2.2), il existe autour de tout point $x \in M$ un système de coordonnées $(q_1, ..., q_r, p_1, ..., p_r)$ dans lequel π s'écrit*

$$\pi = \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Ainsi, pour tout $i = 1, ..., r$,

$$\#_\pi(dq_i) = \frac{\partial}{\partial p_i} \text{ et } \#_\pi(dp_i) = -\frac{\partial}{\partial q_i}.$$

On en déduit que $\omega = \sum_{i=1}^r dq_i \wedge dp_i$.

□

Exemple 2.2.4 *Tout structure de Lie-Poisson est de rang nul à l'origine et donc n'est jamais symplectique.*

Nous retrouvons le théorème classique de Darboux pour les formes symplectique.

Theorem 2.2.4 *(Darboux). Soit (M, π) une variété symplectique de dimension $2r$. Autour de tout point $x \in M$, il existe un système de coordonnées $(q_1, ..., q_r, p_1, ..., p_r)$ tel que*

$$\omega = \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

2.2.3 Feuilles symplectiques

Étant donné un tenseur de Poisson π de rang partout constant sur une variété M, son champ caractéristique $\mathcal{C} = Im\#_\pi$ est une distribution(régulière) involutive, et donc intégrable par le théorème d'intégrabilité de Frobenius. En générale, $\mathcal{C}$ est une distribution singulière dans le sens où ses fibres $\mathcal{C}_x = Im\#_\pi(x)$ ne sont pas de dimension constante. Cependant, $\mathcal{C}$ est intégrable: pour tout $x \in M$, il existe une sous variété immergée connexe $\mathcal{S}$ contenant x et telle que, pour tout $y \in \mathcal{S}, T_y\mathcal{S} = \mathcal{C}_y$. En effet, en munissant M de la relation : x et y sont en relation s'il existe une famille de fonctions $f_1, ..., f_k$ sur M telle que

$$y = \Phi^{t_1}_{X_{f_1}} \circ ... \circ \Phi^{t_k}_{X_{f_k}}$$

on obtient une relation d'équivalence sur M. Notons $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha\in I}$ la partition correspondante de M en classe d'équivalence. D'après (1.4), les flots des champs hamiltoniens préservent π et donc préservent le rang de π. On en déduit que le rang de π est constant le long de chaque $\mathcal{S}_\alpha$; on notera $2r_\alpha$ la valeur commune du rang de π le long de $\mathcal{S}_\alpha$.

Theorem 2.2.5 *([16]) Soit (M, π) une variété de Poisson et soit $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha\in I}$ la partition définie ci-dessus. Pour tout $\alpha \in I, \mathcal{S}_\alpha$ est une sous-variété immergée de M de dimension $2r_\alpha$ et, pour tout $x \in S_\alpha$, l'espace tangent de S_α, en x est l'espace caractéristique en x de $\pi : T_x\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{C}_\alpha$. De plus, S_α, jouit d'une structure symplectique telle que $i : \mathcal{S}_\alpha \hookrightarrow M$ est un morphisme de Poisson.*

Les sous-variété immergées $\mathcal{S}_\alpha$ sont appelées les feuilles symplectiques de la variété de Poisson $(M.\pi)$.

Proof 2.2.3 *Voir [17] pour une démonstration basée sur le théorème de Weinstein.*

□

2.3 Calcul de Poisson

Dans cette section nous allons voir que toute structure de Poisson sur une variété M définit, de manière naturelle, un crochet de Lie sur l'espace des 1-formes, qui avec l'application d'ancrage font du fibré cotangent T^*M un "algebroïde de Lie"; ce qui donne naissance à une version contravariante du calcul de Cartan.

2.3.1 Algebroïde de Lie

La notion d'algebroïde de Lie est une généralisation de celles de fibré tangent d'algèbre de Lie.

Definition 2.3.1 *On appelle pseudo-algebroïde de Lie sur une variété M un triplet $(\mathcal{A}, [,], \#)$ où $\mathcal{A} \to M$ est un fibré vectoriel sur $M, \# : \mathcal{A} \to TM$ est un morphisme de fibrés, dit l'ancrage, et $[,]$ est une application $\mathbf{R}$-bilinéaire et antisymétrique sur l'espace des sections $\Gamma(\mathcal{A})$, tels que la règle de Leibniz suivante soit satisfaite:*

$$[\alpha, f\beta] = \#(\alpha)(f)\beta + f[\alpha, \beta],$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Gamma(\mathcal{A})$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Si, de plus, $[,]$ est un crochet de Lie, c'est à dire qu'il vérifié l'identité de Jacobi

$$[[\alpha, \beta], \gamma] + [[\beta, \gamma], \alpha] + [[\gamma, \alpha], \beta] = 0,$$

On dit que $(\mathcal{A}, [,], \#)$ est un algebroïde de Lie sur M.

La propriété suivante est une conséquence immédiate, mais fondamentale, de la définition d'un algebroïde de Lie.

Proposition 2.3.1 *Si $(\mathcal{A}, [,], \#)$ est un algebroïde de Lie sur une variété M, l'ancrage $\#$ est homomorphisme d'algèbre de Lie $\Gamma(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{X}(M)$: pour tout $\alpha, \beta \in \Gamma(\mathcal{A})$,*

$$\#([\alpha, \beta]) = [\#(\alpha), \#(\beta)].$$

Proof 2.3.1 *En vertu de la règle de Leibniz, pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma(\mathcal{A})$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a*

$$\begin{aligned}
[[\alpha, \beta], f\gamma] + [[\beta, f\gamma], \alpha] + [[f\gamma, \alpha], \beta] &= \#([\alpha, \beta])(f)\gamma + f[[\alpha, \beta], \gamma] + [\#(\beta)(f)\gamma + f[\beta, \gamma], \alpha] \\
&+ [-\#(\alpha)(f)\gamma + f[\gamma, \alpha], \beta] \\
&= \#([\alpha, \beta])(f)\gamma + f[[\alpha, \beta], \gamma] \\
&- \#(\alpha)(\#(\beta)(f))\gamma + \#(\beta)(f)[\gamma, \alpha] - \#(\alpha)(f)[\beta, \gamma] + f[[\beta, \gamma], \alpha] \\
&+ \#(\beta)(\#(\alpha)(f))\gamma - \#(\alpha)(f)[\gamma, \beta] - \#(\beta)(f)[\gamma, \alpha] + f[[\gamma, \alpha], \beta] \\
&= (\#([\alpha, \beta]) - [\#(\alpha), \#(\beta)])(f)\gamma \\
&+ f([[\alpha, \beta], \gamma] + [[\beta, \gamma], \alpha] + [[\gamma, \alpha], \beta]), \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

ce qui établit l'égalité cherchée, vu l'identité de Jacobi.

□

Exemple 2.3.1 *(FIBRÉES TANGENTS).Munit du crochet de Lie sur les champs de vecteurs et de l'identité comme ancrage, le fibré tangent d'une variété M est un algebroïde de Lie, dit algebroïde tangent de M.*

Exemple 2.3.2 *(ALGÈBRE DE LIE). Toute algèbre de Lie peut être vue comme un algebroïde de Lie sur un Point.*

Exemple 2.3.3 *(DISTRIBUTIONS INVOLUTIVES). Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage régulier sur une variété M, la distribution involutive correspondante, $T\mathcal{F}$, munie du crochet de Lie des champs de vecteurs tangents à $\mathcal{F}$ et de l'inclusion $i : T\mathcal{F} \to TM$, est un algebroïde de Lie tangent à $\mathcal{F}$.*

Exemple 2.3.4 *Toute action d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur une variété M,i.e, un homomorphisme d'algèbre de lie $\xi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}^1(M)$, définit une structure d'algebroïde de Lie sur le fibré vectoriel trivial $\mathfrak{g} \times M \longrightarrow M$: l'ancrage $\# : \mathfrak{g} \times M \longrightarrow TM$ étant défini, pour tout $(u, v) \in \mathfrak{g} \times M$, par $\#(u, x) = \xi(u)(x)$, et le crochet de Lie est donné par*

$$[\alpha, \beta](x) = [\alpha(x), \beta(x)] + \alpha_*(\xi(\beta(x)))(x) - \beta_*(\xi(\alpha(x)))(x),$$

où l'on a considéré les actions α et β de $\mathfrak{g} \times M \longrightarrow M$ comme application de M dans $\mathfrak{g}$.

2.3.2 Le fibré cotangent d'une variété de Poisson est un algebroïde de Lie

Soit M une variété équipée d'une structure de Poisson π. Considérons l'application $[,]_\pi : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$, dite crochet de Koszul associée à π, définie pour toutes 1-formes différentielles α et β par:

$$[\alpha, \beta]_\pi = \mathcal{L}_{\pi_\#(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\pi_\#(\beta)}\alpha - d\pi(\alpha, \beta). \tag{2.26}$$

Theorem 2.3.2 *Le crochet de Koszul est l'unique application $\mathbf{R}$-bilinéaire et antisymétrique sur l'espace des 1-formes, qui vérifie*

$$[df, dg]_\pi = d\{f, g\}_\pi, \tag{2.27}$$

pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, et la règle de Leibniz

$$[\alpha, f\beta]_\pi = f[\alpha, \beta]_\pi + \#_\pi(\alpha)(f)\beta, \tag{2.28}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. En outre, $(T^*M, [,]_\pi, \#_\pi)$ est un algebroïde de Lie, en particulier,

$$\#_\pi[\alpha, \beta]_\pi = [\#_\pi(\alpha), \#_\pi(\beta)].$$

Proof 2.3.2 *Le crochet de Koszul étant clairement $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique, montrons 2.27 et 2.28. D'une part, en utilisant le fait que $\mathcal{L}_X d = d\mathcal{L}_X$, et que pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M), \#_\pi(df) = X_f$, on obtient*

$$\begin{aligned}[df,dg]_\pi &= \mathcal{L}_{\#_\pi(df)}dg - \mathcal{L}_{\#_\pi(dg)}df - d(\pi(df,dg))\\ &= d(X_f(g)) - d(X_g(f)) - d\{f,g\}_\pi\\ &= d\{f,g\}_\pi - d\{g,f\}_\pi - d\{f,g\}_\pi\\ &= d\{f,g\}_\pi.\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la formule : $\mathcal{L}_{fX}\alpha = f\mathcal{L}_X\alpha + \alpha(X)df$ *pour tous* $f \in \mathcal{C}^\infty(M), X \in \mathfrak{X}^1(M)$ *et* $\alpha \in \Omega^1(M)$*, on calcule*

$$\begin{aligned}[\alpha, f\beta]_\pi &= \mathcal{L}_{\#_\pi(\alpha)}(f\beta) - \mathcal{L}_{\#_\pi(f\beta)}\alpha - d(\pi(\alpha, f\beta))\\ &= f\mathcal{L}_{\#_\pi(\alpha)}(\beta) + \#_\pi(\alpha)(f)\beta - f\mathcal{L}_{\#_\pi(\beta)}\alpha + \alpha(\#_\pi(\beta))df\\ &- fd(\pi(\alpha,\beta)) - \pi(\alpha,\beta)df\\ &= f[\alpha,\beta]_\pi + \#_\pi(\alpha)(f)\beta.\end{aligned}$$

Pour montrer l'unicité, remarquons qu'en vertu de l'antisymétrie et la règle de Leibniz, le crochet de Koszul est de type locale: la valeur de $[\alpha,\beta]_\pi$ *en un point* $x \in M$ *dépend uniquement des valeurs de* α *et* β *au voisinage de* x*, et vérifie aussi*

$$[f\alpha, g\beta]_\pi = fg[\alpha,\beta]_\pi + f\#_\pi(\alpha)(g)\beta - g\#_\pi(\beta)(f)\alpha.$$

En particulier, pour tous $f,g,h,k \in \mathcal{C}^\infty(M)$*, on a*

$$\begin{aligned}[fdh, gdk]_\pi &= fg[dh,dk]_\pi + f\#_\pi(dh)(g)dk - g\#_\pi(dk)(f)dh\\ &= fgd\{h,k\}_\pi + f\#_\pi(dh)(g)dk - g\#_\pi(dk)(f)dh,\end{aligned}$$

où l'on utilisé 2.27 *dans la dernière ligne. Ceci détermine totalement, comte tenu de la bilinéarité, le crochet* $[,]_\pi$*, puisque toute 1-forme s'écrit localement comme somme finie de 1-forme de type* fdg*.*
Reste à montrer que $(T^*M, [,]_\pi, \#_\pi)$ *est un algebroïde de Lie, c'est à dire que le crochet de Koszul vérifie l'identité de Jacobi. Pour cela, on va montrer d'abord* 2.3.2*. En posant, pour tout* $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$*,*

$$H(\alpha,\beta) = \#_\pi[\alpha,\beta]_\pi - [\#_\pi(\alpha), \#_\pi(\beta)],$$

on vérifie immédiatement, en utilisant la règle de Leibniz, que H *est tensoriel en* α *et* β*. Donc* $H = 0$ *si et seulement si* $H(df,dg) = 0,\ \forall f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)$*. Or,*

$$\#_\pi[df,dg]_\pi \overset{2.27}{=} \#_\pi(d\{f,g\}_\pi) = X_{\{f,g\}_\pi} = [X_f, X_g] = [\#_\pi(df), \#_\pi(dg)].$$

Maintenant, posons pour toutes 1-formes α,β,γ*,*

$$J(\alpha,\beta,\gamma) = [[\alpha,\beta]_\pi,\gamma]_\pi + [[\beta,\gamma]_\pi,\alpha]_\pi + [[\gamma,\alpha]_\pi,\beta]_\pi.$$

On pour toute fonction f*,*

$$\begin{aligned}J(\alpha,\beta,\gamma) &= (\#_\pi[\alpha,\beta]_\pi - [\#_\pi(\alpha),\#_\pi(\beta)])(f)\gamma + fJ(\alpha,\beta,\gamma)\\ &\overset{2.3.2}{=} fJ(\alpha,\beta,\gamma),\end{aligned}$$

ce qui montre que J est tensoriel en γ et donc en α et β également, puisque il est anti-symétrique. Ainsi, J est identiquement nul si et seulement s'il s'annule s ur les 1-formes exactes. Pour tout $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} J(df, dg, dh) &= [[df, dg]_\pi, dh]_\pi + [[dg, dh]_\pi, df]_\pi + [[dh, df]_\pi, dg]_\pi \\ &= [d\{f, g\}_\pi, dh]_\pi + [d\{g, h\}_\pi, df]_\pi + [d\{h, f\}_\pi, dg]_\pi \\ &= d(\{\{f, g\}_\pi, h\}_\pi + \{\{g, h\}_\pi, f\}_\pi + \{\{h, f\}_\pi, g\}_\pi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

L'algebroïde $(T^*M, [,]_\pi, \#)$ sera appelée l'algebroïde cotangent de (M, π).

La structure d'algebroïde de Lie cotangent sur le fibré cotangent de (M, π) permet de définir des versions contravariantes des opérateurs $d, i_X, \mathcal{L}_X$ et ∇_X, et ce, en copiant leurs définitions algébriques.
D'abord, la différentielle contravariante, notée $d_\pi : \mathcal{X}^p(M) \to \mathcal{X}^{p+1}(M)$, se définit par:

$$d_\pi P(\alpha_1, ..., \alpha_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}\pi_\#(\alpha_i).P(\alpha_1, ..., \hat{\alpha}_i, ..., \alpha_{p+1}) + \\ \sum_{1\leq i<j\leq p+1}(-1)^{i+j}P([\alpha_i, \alpha_j]_\pi, \alpha_1, ..., \hat{\alpha}_i, ..., \hat{\alpha}_j, ..., \alpha_{p+1}),$$

où $\alpha_1, ..., \alpha_{p+1}$ sont des 1-formes.

Proposition 2.3.3 *Pour tout $P \in \mathcal{X}$,*

$$d_\pi P = [\pi, P],$$

où $[,]$ dénote le crochet de Schouten-Nijenhuis.

Proof 2.3.3 *De la même manière que dans le cas de la différentielle extérieure on montre que, pour tout $P \in \mathfrak{X}^p(M), d_\pi P$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinéaire et alterné, i.e., $d_\pi P$ est un champ de $(p+1)$-vecteurs (voir, e.g., $[[18], p.311]$). Il suffit donc de montrer qu'à chaque fois appliqués sur une forme différentielle de la forme $df_1 \wedge ... \wedge df_{p+1}(f_i \in \mathcal{C}^\infty(M)), d_p i$ et $[\pi, P]$ coïncident. Pour cela, en remarquant que*

$$i_P(df_1 \wedge ... \wedge df_{p+1}) = (-1)^{p-1}\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i P(df_1 \wedge ... \wedge \widehat{df_i} \wedge ... \wedge df_{p+1})df_i$$

et

$$i_\pi(df_1 \wedge ... \wedge df_{p+1}) = \sum_{1\leq i,j\leq p+1}(-1)^{i+j-1}\{f_i, f_j\}_\pi df_1 \wedge ...\wedge \\ \widehat{df_i} \wedge ... \wedge \widehat{df_j} \wedge ... \wedge df_{p+1},$$

on a

$$\begin{aligned}
\langle df_1\wedge ...\wedge df_{p+1},[\pi,P]\rangle &= \langle\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i d\left(P(df_1\wedge...\wedge\widehat{df_i}\wedge...\wedge df_{p+1})\right)\wedge df_i,\pi\rangle\\
&- \langle\sum_{1\leq i,j\leq p+1}(-1)^{i+j-1}\{f_i,f_j\}_\pi df_1\wedge...\wedge\widehat{df_i}\wedge...\wedge\widehat{df_j}\wedge...\wedge df_{p+1},P\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}\#_\pi(df_i).P(df_1\wedge...\wedge\widehat{df_i}\wedge...\wedge df_{p+1})\\
&+ \sum_{1\leq i,j\leq p+1}(-1)^{i+j}P\left([df_i,df_j]_\pi,df_1\wedge...\wedge\widehat{df_i}\wedge...\wedge\widehat{df_j}\wedge...\wedge df_{p+1}\right)\\
&= \langle df_1\wedge...\wedge df_{p+1},d_\pi P\rangle.
\end{aligned}$$

□

Par conséquent, d_π vérifie, à l'exemple de la différentielle extérieure, les propriétés suivantes:

$$d_\pi(P\wedge Q)=d+\pi P\wedge Q+(-1)^{degP}P\wedge d_\pi Q, \tag{2.29}$$

$$d_\pi\circ d_\pi=0. \tag{2.30}$$

La cohomologie associée à d_π

$$H^p_\pi(M):=\frac{ker(d_\pi:\mathcal{X}^p(M)\to\mathcal{X}^{p+1}(M)}{Im(d_\pi:\mathcal{X}^{p-1}(M)\to\mathcal{X}^p(M)}$$

est appelée la cohomologie de Poisson de (M,π). En étendant l'application d'ancrage $\#_\pi$ sur l'espace des formes différentielle en posant, $\#_\pi(f)=f$ pour toute fonction f,et

$$\#_\pi(d\eta)(\alpha_1,...,\alpha_k)=(-1)^k\eta(\#_\pi(\alpha_1),...,\#_\pi(\alpha_k)),$$

on obtient un homomorphisme $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire $\#_\pi:\Omega^*(M)\longrightarrow\mathcal{X}^*(M)$ qui entrelace d et d_π, i.e,

$$\#_\pi(d\eta)=-d_\pi(\#_\pi(\eta)),$$

ce qui induit un homomorphisme $\#_\pi:H^*_{dR}(M)\to H^*_\pi(M)$ de la cohomologie de Rham dans la cohomologie de Poisson, qui est un isomorphisme si π est symplectique.
Ensuite, la dérivée de Lie dans la direction d'une 1-forme différentielle α, notée $\mathcal{L}_\alpha:\mathcal{X}^p(M)\to\mathcal{X}^p(M)$, et le produit intérieur par α, noté $i_\alpha:\mathcal{X}^p(M)\to\mathcal{X}^{p-1}(M)$, se définissent par:

$$\mathcal{L}_\alpha P(\alpha_1,...,\alpha_p)=\#_\pi(\alpha).P(\alpha_1,...,\alpha_p)-\sum_{i=1}^p P(\alpha_1,...,[\alpha,\alpha_i]_\pi,...,\alpha_p), \tag{2.31}$$

$$i_\alpha P(\alpha_1,...,\alpha_{p-1})=P(\alpha,\alpha_1,...,\alpha_{p-1}), \tag{2.32}$$

et on a les mêmes formules usuelles

$$i_{[\alpha,\beta]_\pi} = \mathcal{L}_\alpha i_\beta - i_\beta \mathcal{L}_\alpha, \tag{2.33}$$

$$\mathcal{L}_{[\alpha,\beta]_\pi} = \mathcal{L}_\alpha \mathcal{L}_\beta - \mathcal{L}_\beta \mathcal{L}_\alpha, \tag{2.34}$$

$$\mathcal{L}_\alpha = i_\alpha d_\pi + d_\pi i_\alpha, \tag{2.35}$$

$$L_\alpha d_\pi = d_\pi \mathcal{L}_\alpha. \tag{2.36}$$

Ces opérateurs sont lies aux opérateurs usuels par l'application d'ancrage:

$$i_\alpha \#_\pi(\eta) = -\#_\pi(i_{\pi_\#(\alpha)}\eta), \tag{2.37}$$

$$\mathcal{L}_\alpha \#_\pi(\eta) = -\#_\pi(\mathcal{L}_{\#_\pi(\alpha)}\eta), \tag{2.38}$$

$$\mathcal{L}_{df} P = \mathcal{L}_{X_f} P, \tag{2.39}$$

pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M), \alpha \in \Omega^1(M), \eta \in \Omega^k(M)$ et $P \in \mathcal{X}^p(M)$.
Finalement, on peut étendre la dérivée de Lie L_α aux formes aux formes différentielles en définissant, pour tout $\eta \in \Omega^k(M)$,

$$\mathcal{L}_\alpha \eta(X_1, ..., X_k) = \pi_\#(\alpha).\eta(X_1, ..., X_k) - \sum_{i=1}^{k} \eta(X_1, ...\mathcal{L}_\alpha X_i, ..., X_k), \tag{2.40}$$

où $X_1, ..., X_k$ sont des champs de vecteurs. En particulier,

$$\mathcal{L}_\alpha \beta = [\alpha, \beta]_\pi, \ \forall \beta \in \Omega^1(M). \tag{2.41}$$

Cette dérivée de Lie peut s'étendre en un crochet de Lie gradué sur l'espace des formes différentielles analogue au crochet de Schouten-Nijenhuis, appelé crochet de Koszul-Schouten, qui peut être défini de la même manière: pour tous $\eta \in \Omega^k(M)$ et $\rho \in \Omega \in \Omega^l(M)$, le crochet de Koszul-Schouten de η et ρ est la $(k+l-1)$-forme, notée $[\eta,\rho]_\pi$ et donnée par

$$< [\eta, \rho]_\pi, P >= (-1)^{(k-1)(l-1)} < \eta, d_\pi(i_\rho P) > - < \rho, d_\pi(i_\eta P) > + (-1)^k < \eta \wedge \rho, d_\pi P >, \tag{2.42}$$

pour tout champ de $(k+l-1)$-vecteurs P. Ici, $i_\eta : \mathcal{X}^*(M) \to \mathcal{X}^*(M)$ est le produit induit intérieur par ρ, i.e. $< \omega, i_\eta P >=< \eta \wedge \omega, P >$ pour tout champ de p-vecteur P et toute $(p-k)$-forme ω, si $k < p; i_\eta P = 0$ sinon.

Theorem 2.3.4 *Le crochet de Koszul-Schouten est* $\mathbb{R}$*-bilinéaire et satisfait les propriétés suivantes:*

(a) *Pour touts* $f \in \mathcal{C}^\infty(M), \alpha \in \Omega^1(M)$ *et* $\eta \in \Omega^k(M)$,

$$[f, \eta]_\pi = i_{X_f}\eta, \quad [\alpha, \eta]_\pi = \mathcal{L}_\alpha \eta. \tag{2.43}$$

(b) *L'antisymétrie graduée: pour tous* $\eta \in \Omega^k(M)$ *et* $\omega \in \Omega^l(M)$,

$$[\eta, \omega]_\pi = -(-1)^{(k-1)(l-1)}[\omega, \eta]. \tag{2.44}$$

(c) *La règle de Leibniz graduée: pour tous* $\eta \in \Omega^k(M), \omega \in \Omega^l(M)$ *et* $\rho \in \Omega^r(M)$,

$$[\eta, \omega \wedge \rho]_\pi = [\eta, \omega]_\pi \wedge \rho + (-1)^{(k-1)l}\omega \wedge [\eta, \rho]_\pi, \tag{2.45}$$

$$[\eta \wedge \omega, \rho]_\pi = \eta \wedge [\omega, \rho]_\pi + (-1)^{(r-1)l}[\eta, \rho]_\pi \wedge \omega. \tag{2.46}$$

(d) *L'identité de Jacobi graduée:*

$$(-1)^{(k-1)(r-1)}[\eta, [\omega, \rho]_\pi]_\pi + (-1)^{(k-1)(l-1)}[\omega, [\rho, \eta]_\pi]_\pi + (-1)^{(l-1)(r-1)}[\rho, [\eta, \omega]_\pi]_\pi = 0. \tag{2.47}$$

En outre la différentielle extérieure est une dérivation de $[,]_\pi$:

$$d[\eta, \omega]_\pi = [d\eta, \omega]_\pi = [d\eta, \omega]_\pi + (-1)^{(k-1)}[\eta, d\omega]_\pi. \tag{2.48}$$

Proof 2.3.4 *Les propriétés* $(a) - (d)$ *se démontrent de la même manière que dans le cas du crochet de Schouten-Nijenhuis.*
Pour voir que d *est une dérivation de* $[,]_\pi$, *Posons pour tout* $\eta \in \Omega^k(M)$ *et* $\omega \in \Omega^l(M)$,

$$\mathcal{I}(\eta, \omega) = d[\eta, \omega]_\pi - [d\eta, \omega]_\pi - (-1)^{k-1}[\eta, d\omega]_\pi.$$

On vérifie immédiatement que

$$\mathcal{I}(\eta, \omega) = -(-1)^{(k-1)(l-1)}\mathcal{I}(\omega, \eta)$$

et

$$\mathcal{I}(\eta, \omega \wedge \rho) = \mathcal{I}(\eta, \omega) \wedge \rho + (-1)^{kl}\omega \wedge \mathcal{I}(\eta, \rho),$$

pour toute forme différentielle ρ. *En particulier,* $\mathcal{I}$ *est de type local. IL suffit donc de vérifier* 2.48 *dans les trois cas suivants:* (i) η *et* ω *sont des 0-formes, c'est à dire qu'elles sont des fonctions;* (ii) η *est une fonction et* ω *est la différentielle d'une fonction;* (iii) η *et* ω *sont les différentielles de deux fonctions. Le premier cas étant trivial, vérifions le deuxième. D'après* 2.43 *et* 2.27, *on a*

$$\mathcal{I}(f, dg) = d[f, dg]_\pi - [df, dg]_\pi = d(i_{X_f}dg) - d\{f, g\}_\pi = 0.$$

Dans le troisième cas, on a : $\mathcal{I}(f, dg) = d[df, dg]_\pi = d^2\{f, g\}_\pi = 0$, *ce qui achève la démonstration.*

□

2.3.3 Connexions Contravariantes

Un autre élément du calcul de Poisson est la notion de connexion contravariante. Ces connexions ont été introduites par Vaismann [10], [19]; elles jouent un rôle très important dans la géométrie de Poisson, e.g., [7], [20], [21],etc, et évidement de plus en plus très utiles dans différents domaines de mathématiques [1], [8], [22], [23],.
(Pour un étude détaillée des connexions contravariantes, voir [7])
Une connexion contravariante se définit d'une manière similaire à celle d'une connexion ordinaire(covariante), sauf que l'algebroïde cotangent remplace l'algebroïde tangent. Plus précisément,

Definition 2.3.2 *Une connexion contravariante sur une variété de Poisson* (M,π) *est une application* $\mathbb{R}$*-bilinéaire* $\mathcal{D}:\Omega^1(M)\times\Omega^1(M)\longrightarrow\Omega^1(M)$*, notée* $(\alpha,\beta)\to\mathcal{D}_\alpha\beta$*, vérifiant, pour toute fonction* f *sur* M*,*

$$\mathcal{D}_{f\alpha}\beta = f\mathcal{D}_\alpha\beta \text{ et } \mathcal{D}_\alpha(f\beta) = f\mathcal{D}_\alpha\beta + \#_\pi(\alpha)(f)\beta.$$

$\mathcal{D}_\alpha\beta$ *est appelée la dérivée contravariante de* β *dans la direction de* α*.*

Exemple 2.3.5 *Toute connexion covariante* ∇ *sur* M *induit deux connexions contravariantes définies par:* $\mathcal{D}_\alpha\beta := \nabla_{\#_\pi(\alpha)}\beta, \tilde{\mathcal{D}}_\alpha\beta := \nabla_{\#_\pi(\beta)}\alpha + [\alpha,\beta]_\pi$*. En particulière, les connexions contravariantes* $\mathcal{D}$ *sur* M *est induite par une connexion covariante:* $\mathcal{D}_\alpha\beta = \nabla_{\#_\pi(\alpha)}\beta$ *avec* $\nabla_X Y := \mathcal{D}_{\#_\pi^{-1}(X)}Y$*.*

Lorsqu'une connexion contravariante $\mathcal{D}$ sur (M,π) est induite par une connexion covariante, elle vérifie la propriété suivante:

$$(\forall a\in T^*M, \#_\pi(a)=0) \Longrightarrow \mathcal{D}_a = 0,$$

On dit que $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}$-connexion. Si $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}$-connexion sur l'ouvert M^{reg} des points régulier de (M,π), on dit que $\mathcal{D}$ est $\mathcal{F}^{reg}$-connexion.
En général, il existe des connexions contravariantes qui ne sont pas des $\mathcal{F}$-connexion, et donc une connexion contravariante peut ne pas être induite par une connexion covariante.
La définition d'une connexion contravariante étant similaire à la définition d'une connexion covariante, on peut développer les notions usuelles de torsion, courbure, transport parallèle, géodésique,etc. Néanmoins, il ya quelques différences surprenantes dans la géométrie de Poisson contravariante.
Si $(U,x_1,...,x_d)$ est une carte locale de M, on définit les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k d'une connexion contravariante $\mathcal{D}$ par:

$$\mathcal{D}_{dx_i}dx_j = \sum_{k=1}^{d}\Gamma_{ij}^k dx_k. \tag{2.49}$$

Il est facile de voir que, sous un changement de coordonnées, ces symboles se transforment suivant la règle

$$\tilde{\Gamma}_{rs}^t = \sum_{i,j,k}\frac{\partial\tilde{x}_r}{\partial x_i}\frac{\tilde{x}_s}{\partial x_j}\frac{\partial x_k}{\partial\tilde{x}_t}\Gamma_{ij}^k + \frac{\partial\tilde{x}_r}{\partial x_i}\frac{\partial^2\tilde{x}_s}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial x_j}{\partial\tilde{x}_t}\pi_{ik}, \tag{2.50}$$

où π_{ij} sont les composantes de π dans $(x_1, ..., x_d)$. Inversement, la donnée d'une famille de symboles qui se transforment suivant cette règle sous un changement de coordonnées, définit une connexion contravariante.
La torsion et la courbure de la connexion contravariante $\mathcal{D}$ sont définies respectivement par:

$$T(\alpha, \beta) = \mathcal{D}_\alpha \beta - \mathcal{D}_\beta \alpha - [\alpha, \beta]_\pi, \tag{2.51}$$

$$R(\alpha, \beta)\gamma = \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta \gamma - \mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\alpha \gamma - \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi} \gamma. \tag{2.52}$$

On vérifie immédiatement que T et R sont des tenseurs de types (2,1) et (3,1), respectivement. Quand T(resp.R) est identiquement nulle, on dit de $\mathcal{D}$ qu'elle est sans torsion(resp. plate). les expressions locales de la torsion et la courbure sont respectivement:

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k - \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_k}, \tag{2.53}$$

$$R_{ijk}^l = \sum_{m=1}^{d} \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m + \pi_{im} \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_m} - \pi_{jm} \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_m} - \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_m} \Gamma_{mk}^l. \tag{2.54}$$

À l'instar du cas covariant, la donnée d'une métrique riemannienne sur la variété de Poisson (M, π) donne naissance à une connexion contravariante analogue à la connexion de Levi-Civita.
Soit $\langle , \rangle$ une métrique riemannienne sur M, et soit $\#_{\langle,\rangle}^{-1} : TM \longrightarrow T * M$ l'isomorphisme musical associée à $\langle , \rangle$, i.e. $\#_{\langle,\rangle}^{-1}(u) := \langle u, . \rangle$. La métrique $\langle , \rangle$ définit sur le fibré cotangent une métrique, que l'on notera $\langle , \rangle^*$, par :

$$\langle a, b \rangle^* = \langle \#_{\langle,\rangle}^{-1}(a), \#_{\langle,\rangle}^{-1}(b) \rangle \quad \forall a, b \in T^*M.$$

Proposition 2.3.5 [1]. *Il existe une unique connexion contravariante $\mathcal{D}$ sur M vérifiant*

(i) *$\mathcal{D}$ est sans torsion :* $\mathcal{D}_\alpha \beta - \mathcal{D}_\beta \alpha = [\alpha, \beta]_\pi$;

(ii) *$\mathcal{D}$ est métrique :* $\#_\pi(\alpha).\langle \beta, \gamma \rangle^* = \langle \mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma \rangle^* + \langle \beta, \mathcal{D}_\alpha \gamma \rangle^*$.

Cette connexion est donnée par la formule de Koszul

$$\begin{aligned} 2\langle \mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma \rangle^* &= \#_\pi(\alpha).\langle \beta, \gamma \rangle^* + \#_\pi(\beta).\langle \alpha, \gamma \rangle^* - \#_\pi(\gamma).\langle \alpha, \beta \rangle^* \\ &+ \langle [\alpha, \beta]_\pi, \gamma \rangle - \langle [\beta, \gamma]_\pi, \alpha \rangle + \langle [\gamma, \alpha]_\pi, \beta \rangle. \end{aligned} \tag{2.55}$$

On appelle $\mathcal{D}$ la connexion de Levi-Civita contravariante associée au couple $(\pi, \langle , \rangle)$.

Proof 2.3.5 *Puisque $\langle , \rangle^*$ est non dégénérée, il suffit de calculer $\langle \mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma \rangle^*$ pour toutes 1-formes α, β et γ. En utilisant (i) et (ii), on calcule*

$$\begin{array}{rcl} \langle \mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma \rangle^* & = & \#_\pi(\alpha).\langle \beta, \gamma \rangle^* - \langle \beta, \mathcal{D}_\alpha \gamma \rangle^* \\ & = & \#_\pi(\alpha).\langle \beta, \gamma \rangle^* - \langle \beta, \mathcal{D}_\gamma \alpha \rangle - \langle \beta, [\alpha, \gamma]_\pi \rangle^* \\ & = & \#_\pi(\alpha).\langle \beta, \gamma \rangle^* - \#_\pi(\gamma).\langle \beta, \alpha \rangle^* + \langle \mathcal{D}_\gamma \beta, \alpha \rangle^* - \langle \beta, [\alpha, \gamma]_\pi \rangle^* \\ & = & \#_\pi(\alpha).\langle \beta, \gamma \rangle^* - \#_\pi(\gamma).\langle \beta, \alpha \rangle^* + \langle \mathcal{D}_\beta \gamma, \alpha \rangle^* \\ & + & \langle [\gamma, \beta]_\pi, \alpha \rangle^* - \langle \beta, [\alpha, \gamma]_\pi \rangle^* \\ & = & \#_\pi(\alpha).\langle \beta, \gamma \rangle^* - \#_\pi(\gamma).\langle \beta, \alpha \rangle^* + \#_\pi(\beta).\langle \gamma, \alpha \rangle^* \\ & - & \langle \gamma, \mathcal{D}_\beta \alpha \rangle^* + \langle [\gamma, \beta]_\pi, \alpha \rangle^* - \langle \beta, [\alpha, \gamma]_\pi \rangle^* \\ & = & \#_\pi(\alpha).\langle \beta, \gamma \rangle^* - \#_\pi(\gamma).\langle \beta, \alpha \rangle^* + \#_\pi(\beta).\langle \gamma, \alpha \rangle^* \\ & - & \langle \gamma, \mathcal{D}_\alpha \beta \rangle^* - \langle \gamma, [\beta, \alpha]_\pi \rangle^* + \langle [\gamma, \beta]_\pi, \alpha \rangle^* - \langle \beta, [\alpha, \gamma]_\pi \rangle^* \end{array}$$

soit

$$\begin{array}{rcl} 2\langle \mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma \rangle^* & = & \#_\pi(\alpha).\langle \beta, \gamma \rangle^* + \#_\pi(\beta).\langle \alpha, \gamma \rangle^* - \#_\pi(\gamma).\langle \alpha, \beta \rangle^* \\ & + & \langle [\alpha, \beta]_\pi, \gamma \rangle - \langle [\beta, \gamma]_\pi, \alpha \rangle + \langle [\gamma, \alpha]_\pi, \beta \rangle. \end{array}$$

ce qui montre l'unicité. L'existence se montre immédiatement en vérifiant que la connexion $\mathcal{D}$ définie par la formule de Koszul 2.55 *est sans torsion et métrique.*

□

Exemple 2.3.6 *Prenons $M = \mathbb{R}^3$ munie de sa métrique euclidienne et du tenseur de Poisson $\pi = \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + (y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}) \wedge \frac{\partial}{\partial z}$. La connexion de Levi-Civita contravariante correspondante est donnée par :*

$$\mathcal{D}_{dx}dx = \mathcal{D}_{dx}dy = \mathcal{D}_{dx}dz = \mathcal{D}_{dy}dx = \mathcal{D}_{dy}dy = \mathcal{D}_{dy}dz = \mathcal{D}_{dz}dz = 0,$$
$$\mathcal{D}_{dz}dx = -dy, \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{dz}dy = dx.$$

$\mathcal{D}$ est plate, mais pas une $\mathcal{F}$-connexion, puisqu'à l'origine, $\#_\pi(dz)$ s'annule, alors que $\mathcal{D}_{dz}dx$ et $\mathcal{D}_{dz}dy$ ne s'annulent pas.

2.4 Structure de Poisson invariantes à gauche sur un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie de dimension n, e son élément neutre et $g\mathfrak{g} = T_eG$ son algèbre de Lie. Un champ de multivecteurs P sur G est dit invariant à gauche, s'il est invariant sous les translations à gauche $L_g : h \to gh$ sur G, c'est-à-dire,

$$(L_g)_*P(h) = P(gh) \quad \forall g, h \in G.$$

Une structure de Poisson invariante à gauche sur G est la donnée d'un champ de bivecteurs π sur G vérifiant $[\pi, \pi] = 0$. Une telle structure de Poisson est nécessairement de rang constant sur G, égale à son rang en élément neutre e de G.
Si G est connexe, un champ de multivecteurs P est invariant à gauche si et seulement si la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X P$ de P dans la direction de tout champ invariant à droite X est nulle(puisque le flot de X est le sous groupe à un paramètre des translations à gauche

$L_{exp(tX_e)}$). Par conséquent, le crochet de Schouten-Nijenhuis $[P, Q]$ de deux champs de multivecteurs invariants à gauche P et Q est aussi invariant à gauche. En effet, pour tout champ de vecteurs invariant à droite X,

$$\mathcal{L}_X[P, Q] = [\mathcal{L}_X P, Q] + [P, \mathcal{L}_X Q] = 0.$$

Puisque l'évaluation en e, i.e. $P \longrightarrow P(e)$, est un isomorphisme de l'espace des champs de multivecteurs invariants à gauche sur l'espace $\wedge^* \mathfrak{g} = \oplus_{k=0}^n \mathfrak{g}$ (son inverse étant l'application $x \longrightarrow x^l$ où $x^l(g) := (L_g)_* \quad \forall g \in G$), le crochet de Schouten-Nijenhuis de $\mathfrak{g}$; ses propriétés sont résumées dans le lemme suivant.

Lemma 2.4.1 *Le crochet de Schouten-Nijenhuis d'une* $\mathbf{R}$*-algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est l'unique application* $\mathbf{R}$*-bilinéaire sur* $\wedge^* \mathfrak{g}$ *qui étend le crochet de Lie de* $\mathfrak{g}$ *et qui vérifie*

(a) *Pour tous* $x \in \wedge^i \mathfrak{g}$ *et* $y \in \wedge^j \mathfrak{g}, [x, y] \in \wedge^{i+j-1} \mathfrak{g}$*.*

(b) *L'antisymétrie graduée: pour tous* $x \in \wedge^i \mathfrak{g}, y \in \wedge^j \mathfrak{g}$*.*

$$[x, y] = -(-1)^{(i-1)(j-1)}[y, x]. \tag{2.56}$$

(c) *La règle de Leibniz graduée: pour tous* $x \in \wedge^i \mathfrak{g}, y \in \wedge^j \mathfrak{g}$ *et* $z \in \wedge^k \mathfrak{g}$*,*

$$[x, y \wedge z] = [x, y] \wedge z + (-1)^{(i-1)j} y \wedge [x, z] \tag{2.57}$$

$$[x \wedge y, z] = x \wedge [y, z] + (-1)^{(k-1)j}[x, z] \wedge y \tag{2.58}$$

(d) *Le crochet d'un élément de* $\wedge^* \mathfrak{g}$ *est un élément de* $\wedge^0 \mathfrak{g} = \mathbb{R}$ *est nul.*

En outre, le crochet de Schouten-Nijenhuis de $\mathfrak{g}$ *vérifie l'identité de Jacobi graduée:*

$$(-1)^{(i-1)(k-1)}[x, [y, z]] + (-1)^{(j-1)(i-1)}[y, [z, x]] + (-1)^{(j-1)(k-1)}[z, [x, y]] = 0. \tag{2.59}$$

et pour tout $u_1, ...u_r, v_1, ..., v_s \in \mathfrak{g}$,

$$[u_1 \wedge ... \wedge u_r, v_1 \wedge ... \wedge v_s] = \sum_{k,l} (-1)^{k+l}[u_k, v_l] \wedge u_1 \wedge ... \wedge \widehat{u_k} \wedge ... \wedge u_r \wedge v_1 \wedge ... \wedge \widehat{v_l} \wedge ... \wedge v_s. \tag{2.60}$$

Remark 2.4.1 *Une manière directe de définir le crochet de Schouten-Nijenhuis sur* $\wedge^* \mathfrak{g}$ *consiste à étendre* 2.60*, par* $\mathbb{R}$*-bilinéarité, aux sommes multivecteurs décomposables de* $\wedge^* \mathfrak{g}$*.*

Conte tenu de ce qui précède, on a :

Proposition 2.4.2 *Une structure de Poisson invariante à gauche sur un groupe de Lie connexe* G *est équivalente à la donnée d'un élément* $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$ *vérifiant l'équation suivante, dite l'équation de Yang-Baxter classique(EYBC) :*

$$[r, r] = 0. \tag{2.61}$$

Les éléments de $\wedge^2\mathfrak{g}$ *vérifiant* 2.61 *sont appelés solutions de l'EYBC.*

Exemple 2.4.1 *Si la dimension de* $\mathfrak{g}$ *est égale à 2, alors tout élément de* $\wedge^2\mathfrak{g}$ *est une solution de l'EYBC*

Exemple 2.4.2 *Si* $u, v \in \mathfrak{g}$ *tel que* $[u, v] = 0$*, alors* $r = u \wedge v$ *est une solution de l'EYBC; la structure de Poisson invariante à gauche correspondante sur* G *est de rang constant égale à 0 si* $u \wedge v = 0, 2$ *sinon.*

Par la suite, nous allons donné une caractérisation des solutions de l'EYBC qui peut être très utile. Dans tout ce qui suit, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle de dimension $n, \mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$ et r un élément de $\wedge^2\mathfrak{g}$. On notera $r_\# : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ l'application linéaire définie par

$$\beta(r_\#(\alpha)) = -\alpha(r_\#(\beta)) = r(\alpha, \beta) \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*, \tag{2.62}$$

S_r le sous espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ image de r et $[,]_r$ le crochet défini sur $\mathfrak{g}^*$ par

$$[\alpha, \beta]_r = ad^*_{r_\#(\beta)}\alpha - ad^*_{r_\#(\alpha)}\beta \ \ \forall a, b \in \mathfrak{g}^*,$$

où $ad^* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$ est la représentation coadjointe de $\mathfrak{g}$ donnée par

$$ad^*_u\alpha(v) = \alpha([u, v]) \quad \forall u, v \in \mathfrak{g}, \alpha \in \mathfrak{g}^*.$$

Lemma 2.4.3 *Pour tout* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{g}^*$*, on a:*

$$\frac{1}{2}[r, r](\alpha, \beta, \gamma) = \alpha([r_\#(be), r_\#(\gamma)]) + \beta([r_\#(ga), r_\#(\alpha)]) + \gamma([r_\#(al), r_\#(\beta)]). \tag{2.63}$$

Proof 2.4.1 *Puisque le membre droite de* 2.63 *est linéaire en* α, β *et* γ *il suffit de montrer* 2.63 *sur une base de* $\mathfrak{g}^*$*. Pour cela, soit* $(e_1, ..., e_n)$ *une base de* $\mathfrak{g}$ *et* $(e_1^*, ..., e_n^*)$ *la base dual sur* $\mathfrak{g}^*$*. Écrivons*

$$[e_i, e_j] = \textstyle\sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k, \quad r = \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} e_i \wedge e_j.$$

En utilisant 2.58*, on obtient par calcul direct*

$$[r, r] = \textstyle\sum_{i,j,k,l,m} a_{il} a_{jm} c_{ij}^k e_k \wedge e_l \wedge e_m.$$

Ainsi, pour tout $i, j, k = 1, ..., n$*,*

$$[r, r](e_i^*, e_j^*, e_k^*) = 2 \textstyle\sum_{l,m} \oint_{i,j,k} a_{il} a_{jm} c_{lm}^k = 2 \oint_{i,j,k} e_i^*([r_\#(e_j^*), r_\#(e_k^*)]),$$

où $\oint_{i,j,k}$ *désigne la somme circulaire sur* i, j, k*. D'où le résultat.*

□

Chapitre 3

Groupes de Lie de Riemann-Poisson

Sommaire

Dans ce chapitre, nous allons étudier les groupes de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche et d'un tenseur de Poisson invariant à gauche satisfaisant la condition de compatibilité qu'on va définir plut tard. Ils constituent une sous-classe de classe des variétés de Riemann-Poisson introduit et étudier par M.Boucetta (voir [2,3,4,5]).
Les variétés de Riemann-Poisson sont avéré avoir des propriétés géométrique intéressantes (voir [2,3,4,5]). A partir de ces propriétés il sera intéressant de trouver une large classe d'exemples des variétés de Riemann-Poisson. Dans ce chapitre nous allons décrit une riche collection d'exemples obtenus en fournissant un groupe Lie arbitraire G muni d'une métrique riemannienne $\langle\ ,\ \rangle$ et d'un tenseur de Poisson π invariants sous les translations à gauche et telle que $(G, \langle\ ,\ \rangle, \pi)$ est groupe de Riemann-Poisson. On appel $(G, \langle\ ,\ \rangle, \pi)$ un groupe de Riemann-Poisson. cette classe d'exemples peut être élargie substantiellement, sans travail supplémentaire, comme suit. Si $(G, \langle\ ,\ \rangle, \pi)$ est un groupe de Lie de Riemann-Poisson et Γ est un sous groupe discret de G alors $\Gamma \setminus G$ carie naturellement une structure de variété de Riemann-Poisson.

3.1 Les groupes de Lie de Riemann-Poisson et leurs caractérisation infinitésimale

Dans cette section nous donnons le matériel nécessaire pour ce chapitre et décrivons la contrepartie infinitésimale des groupes de Lie de Riemann-Poisson, appelées, Algèbres de Lie de Riemann-Poisson.

Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g} = T_eG$ son algèbre de Lie.

1. Un tenseur de Poisson π sur G est entièrement déterminé par

$$\pi(\alpha,\beta)(a) = r(L_a^*\alpha, L_a^*\beta),$$

où $a \in G, \alpha, \beta \in T_a^*G$, L_a est la multiplication à gauche by a et $r \in \wedge\mathfrak{g}$ satisfait l'équation classique de Yang-Baxter

$$[r,r] = 0, \tag{3.1}$$

où $[r,r] \in \wedge^3\mathfrak{g}$ est donné par

$$[r,r](\alpha,\beta,\gamma) :=\prec \alpha, [r_\#(\beta), r_\#(\gamma)] \succ + \prec \beta, [r_\#(\gamma), r_\#(\alpha)] \succ + \prec \gamma, [r_\#(\alpha), r_\#(\beta)] \succ, \quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathrm{g}^*, \tag{3.2}$$

et $r_\# : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ est la contraction associée à r. Dans ce cas, le crochet de Koszul (2.26), lorsqu'il est restreint au 1-forme invariant à gauche induit un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}^*$ donné par

$$[\alpha,\beta]_r = \mathrm{ad}^*_{r_\#(\alpha)}\beta - \mathrm{ad}^*_{r_\#(\beta)}\alpha, \quad \alpha,\beta \in \mathfrak{g}^*, \tag{3.3}$$

où $\prec \mathrm{ad}_u^*\alpha, v \succ = - \prec \alpha, [u,v] \succ$. En outre, $r_\#$ devient un morphisme d'algèbres de Lie, i.e.,

$$r_\#([\alpha,\beta]_r) = [r_\#(\alpha), r_\#(\beta)], \quad \alpha,\beta \in \mathfrak{g}^*. \tag{3.4}$$

2. Une métrique Riemannienne invariante à gauche $\langle\ ,\ \rangle$ sur G est entièrement déterminé par

$$\langle u,v\rangle(a) = \varrho(T_aL_{a^{-1}}u, T_aL_{a^{-1}}v),$$

où $a \in G, u,v \in T_aG$ et ϱ est un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$. La connexion de Levi-Civita de $\langle\ ,\ \rangle$ est invariante à gauche et induite un produit $A : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ déterminé par

$$2\varrho(A_uv,w) = \varrho([u,v],w) + \varrho([w,u],v) + \varrho([w,v],u), \quad u,v,w \in \mathrm{g}. \tag{3.5}$$

Il est l'unique produit sur $\mathfrak{g}$ satisfaisant

$$A_uv - A_vu = [u,v] \quad \text{and} \quad \varrho(A_uv,w) + \varrho(v,A_uw) = 0,$$

pour tout $u,v,w \in \mathfrak{g}$. nous appelons A le produit de Levi-Civita associé à $(\mathfrak{g},[\ ,\ ],\varrho)$.

3. Soit $(G,\langle\ ,\ \rangle,\Omega)$ un groupe de Lie muni d'une métrique Riemannienne invariante à gauche et d'une 2-forme invariante à gauche et non dégénérée. Alors $(G,\langle\ ,\ \rangle,\Omega)$ est une variété kählerienne si et seulement si, pour tout $u,v,w \in \mathfrak{g}$,

$$\omega(A_uv,w) + \omega(u,A_uv) = 0, \tag{3.6}$$

où $\omega = \Omega(e)$, $\varrho = \langle\ ,\ \rangle(e)$ et A est le produit de Levi-Civita de $(\mathfrak{g},[\ ,\ ],\varrho)$. Dans ce cas nous appelons $(\mathfrak{g},[\ ,\ ],\varrho,\omega)$ une algèbre de Lie kählerienne.

Comme toutes les structures invariantes à gauche sur les groupes de Lie, les groupes de Lie de Riemann-Poison peuvent être caractérisés au niveau de leurs algèbres de Lie.

Proposition 3.1.1 *Soit* $(G, \pi, \langle\ ,\ \rangle)$ *un groupe de Lie muni d'un bivecteurs invariant à gauche et d'une métrique riemannienne invariante à gauche et* $(\mathfrak{g} = T_eG, [\ ,\ ])$ *son algèbre de Lie. On pose* $r = \pi(e) \in \wedge^2\mathfrak{g}$, $\varrho = \langle\ ,\ \rangle_e$ *et* ϱ^* *le produit Euclidien associé sur* $\mathfrak{g}^*$*. Alors* $(G, \pi, \langle\ ,\ \rangle)$ *est un groupe de Lie de Riemann-Poisson si et seulement si*

(i) $[r, r] = 0$,

(ii) *pour tout* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{g}^*$, $r(A_\alpha\beta, \gamma) + r(\beta, A_\alpha\gamma) = 0$,

où A *est le produit de Levi-Civita associé à* $(\mathfrak{g}^*, [\ ,\ ]_r, \varrho^*)$.

Proof 3.1.1 *Pour tout* $u \in \mathfrak{g}$ *et* $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, *on note* u^ℓ *et* α^ℓ, *respectivement, le champ de vecteur invariant à gauche et le 1-forme différentielle invariant à gauche sur* G *déterminées par:*

$$u^\ell(a) = T_eL_a(u) \text{ et } \alpha^\ell(a) = T_a^*L_{a^{-1}}(\alpha),\ a \in G, L_a(b) = ab.$$

Puisque π *et* $\langle\ ,\ \rangle$ *sont invariants à gauche, on déduit facilement de (1.8) et (2.1) que pour tout* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{g}^*$,

$$\begin{cases} [\pi,\pi]_S(\alpha^\ell,\beta^\ell,\gamma^\ell) = [r,r](\alpha,\beta,\gamma), \#(\alpha^\ell) = (r_\#(\alpha))^\ell, \mathcal{L}_{\#_\pi(\alpha^\ell)}\beta^\ell = (ad^*_{r_\#(\alpha)}\beta)^\ell, \\ ([\alpha^\ell,\beta^\ell]_\pi) = ([\alpha,\beta]_r)^\ell, \mathcal{D}_{\alpha^\ell}\beta^\ell = (A_\alpha\beta)^\ell. \end{cases}$$

La proposition découle de ces formules, (2.3) et le fait que $(G, \pi, \langle\ ,\ \rangle)$ *est un groupe de Lie de Riemann-Poisson si et seulement si, pour tout* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{g}^*$,

$$[\pi,\pi]_S(\alpha^\ell,\beta^\ell,\gamma^\ell) = 0 \text{ et } \mathcal{D}\pi(\alpha^\ell,\beta^\ell,\gamma^\ell) = 0.$$

□

Inversement, étant donné un triplet $(\mathfrak{g}, r, \varrho)$ où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle, $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ et ϱ est un produit Euclidien sur $\mathfrak{g}$ satisfaisant les conditions (i) et (ii) dans la Proposition 3.1.1 donc, pour tout groupe de Lie G d'algèbre de Lie $satisfaisant$, si π et $\langle\ ,\ \rangle$ sont le champ de bivecteurs invariant à gauche et la métrique invariant à gauche associée à (r, ϱ) alors $(G, \pi, \langle\ ,\ \rangle)$ est un groupe de Lie de Riemann-Poisson.

Definition 3.1.1 *Une algèbre de Lie de Riemann-Poisson est un triplet* $(\mathfrak{g}, r, \varrho)$ *où* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie réelle,* $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ *et* ϱ *est un produit Euclidien sur* $\mathfrak{g}$ *satisfaisant les conditions* (i) *et* (ii) *dans la Proposition 3.1.1.*

Pour terminer cette section, nous donnons une autre caractérisation des solutions de l'équation de Yang-Baxter classique (3.1) qui sera utiliser plus tard.
Nous observons que $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ est équivalent aux données d'un sous-espace vectoriel $S \subset \mathfrak{g}$ et une 2-forme non dégénérée $\omega_r \in \wedge^2 S^*$.
En effet, for $r \in \wedge^2$g, on pose $S = \mathrm{Im} r_\#$ et $\omega_r(u,v) = r(r_\#^{-1}(u), r_\#^{-1}(v))$ où $u, v \in S$ et $r_\#^{-1}(u)$ est un antécédent de u par $r_\#$.
Inversement, soit (S, ω) un sous espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ muni d'une 2-forme non-dégénérée. la 2-forme ω définit un isomorphisme $\omega^b : S \longrightarrow S^*$ par $\omega^b(u) = \omega(u, .)$, nous désignons par $\# : S^* \longrightarrow S$ son inverse et on pose $r_\# = \# \circ i^*$ où $i^* : \mathfrak{g}^* \longrightarrow S^*$ est l'application duale de l'inclusion $i : S \hookrightarrow \mathfrak{g}$.
Compte tenu de cette observation, la proposition suivante donne une autre description des solutions de l'équation de Yang-Baxter.

Proposition 3.1.2 *Soit $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ et (S, ω_r) son sous-espace associé. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. $[r, r] = 0$.
2. *S est une sous algèbre de $\mathfrak{g}$ et*

$$\delta\omega_r(u, v, w) := \omega_r(u, [v, w]) + \omega_r(v, [w, u]) + \omega_r(w, [u, v]) = 0,$$

pour tout $u, v, w \in S$.

Proof 3.1.2 *La proposition découle des formules suivantes:*

$$\prec \gamma, r_\#([\alpha, \beta]_r) - [r_\#(\alpha), r_\#(\beta)] \succ = -[r, r](\alpha, \beta, \gamma), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{g}^*$$

et, si S est une sous algèbre,

$$[r, r](\alpha, \beta, \gamma) = -\delta\omega_r(r_\#(\alpha), r_\#(\beta), r_\#(\gamma)).$$

□

Cette proposition montre qu'il y a une correspondance entre l'ensemble des solutions de l'équation de Yang-Baxter classique et l'ensemble des sous-algèbres symplectiques de $\mathfrak{g}$. nous rappelons qu'une algèbre symplectique est une algèbre de Lie S munie d'une 2-forme non-dégénérée ω telle que $\delta\omega = 0$.

3.2 Caractérisation des algèbres de Lie de Riemann-Poisson

Dans cette section, nous combinons les propositions 3.1.1 et 3.1.2 pour établir une caractérisation des algèbres de Lie de Riemann-Poisson qui sera utilisé plus tard pour construire telles algèbres de Lie.Nous établissons d'abord un résultat intermédiaire.

Proposition 3.2.1 *Soit $(\mathfrak{g}, r, \varrho)$ une algèbre de Lie muni d'un produit Euclidien ϱ et $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$. Désignons par $\mathcal{I} = \ker r_\#$, $\mathcal{I}^\perp$ son orthogonale par-apport à ϱ^* et A le produit de Levi-Civita associé à $(\mathfrak{g}^*, [\ ,\ ]_r, \varrho^*)$. Alors $(\mathfrak{g}, r, \varrho)$ est une algèbre de Lie de Riemann-Poisson si et seulement si:*

(c_1) $[r, r] = 0$.

(c_2) *Pour tous $\alpha \in \mathcal{I}, A_\alpha = 0$.*

(c_3) *Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{I}^\perp$, $A_\alpha\beta \in \mathcal{I}^\perp$ et*

$$r(A_\alpha\beta, \gamma) + r(\beta, A_\alpha\gamma) = 0.$$

Proof 3.2.1 *En utilisant la formule $\mathfrak{g}^* = \mathcal{I} \oplus \mathcal{I}^\perp$, on peut voir que les conditions (i) et (ii) dans la Proposition 3.1.1 sont équivalentes à*

$$\begin{cases} [r,r]=0, \\ r(A_\alpha\beta,\gamma)=0, \alpha\in\mathcal{I},\beta\in\mathcal{I},\gamma\in\mathcal{I}^\perp, \\ r(A_\alpha\beta,\gamma)+r(\beta,A_\alpha\gamma)=0, \alpha\in\mathcal{I},\beta\in\mathcal{I}^\perp,\gamma\in\mathcal{I}^\perp \\ r(A_\alpha\beta,\gamma)=0, \alpha\in\mathcal{I}^\perp,\beta\in\mathcal{I},\gamma\in\mathcal{I}^\perp, \\ r(A_\alpha\beta,\gamma)+r(\beta,A_\alpha\gamma)=0, \alpha\in\mathcal{I}^\perp,\beta\in\mathcal{I}^\perp,\gamma\in\mathcal{I}^\perp. \end{cases} \tag{3.7}$$

Supposons que les conditions $(c_1)-(c_2)$ *sont vérifiées. Alors pour tout* $\alpha\in\mathcal{I}$ *et* $\beta\in\mathcal{I}^\perp, A_\beta\alpha=[\beta,\alpha]_r$ *et donc* $r_\#(A_\beta\alpha)=[r_\#(\beta),r_\#(\alpha)]=0$ *Ainsi l'équation* 3.7 *est vérifiée.*
Inversement, supposons que 3.7*. Alors* (c_1) *est évidemment vérifiée.*
Pour tous $\alpha,\beta\in\mathcal{I}$*, la deuxième équation dans* 3.7 *est équivalente à* $A_\alpha\beta\in\mathcal{I}$ *et nous avons a partir des équations* 3.3 *et* $3.5[\alpha,\beta]_r=0$ *et* $A_\alpha\beta\in\mathcal{I}^\perp$*. Ainsi* $A_\alpha\beta=0$*.*
Prenons maintenant $\alpha\in\mathcal{I}$ *et* $\beta\in\mathcal{I}^\perp$*. Pour tout* $\gamma\in\mathcal{I},\varrho^*(A_\alpha\beta,\gamma)=-\varrho^*(\beta,A_\alpha\gamma)=0$ *et donc* $A_\alpha\beta\in\mathcal{I}^\perp$*. D'autre part*

$$r_\#([\alpha,\beta]_r)=r_\#(A_\alpha\beta)-r_\#(A_\beta\alpha)\overset{(3.4)}{=}[r_\#(\alpha),r_\#(\beta)]=0.$$

Alors, pour tout $\gamma\in\mathcal{I}^\perp$*,*

$$<\gamma,r_\#(A_\alpha\beta)>=<\gamma,r_\#(A_\beta\alpha)>=r(A_\beta\alpha,\gamma)\overset{(3.7)}{=}0.$$

Cela montre que $A_\alpha\beta\in\mathcal{I}$ *et donc* $A_\alpha\beta=0$*. Finalement,* (c_2) *est vrai. Maintenant, pour tout* $\alpha\in\mathcal{I}^\perp$*, la quatrième équation en* 3.7 *implique que* A_α *laisse invariant* $\mathcal{I}$ *et puisque elle est skew-symétrique elle laisse invariant* $\mathcal{I}^\perp$ *donc* (c_3) *est vérifiée. Cela complète la preuve.*

□

Proposition 3.2.2 *Soit* $(\mathfrak{g},\varrho,r)$ *une algèbre de Lie munie d'une solution de l'équation de Yang-Baxter classique et d'un produit Euclidien bi-invariant, i.e.,*

$$\varrho(\mathrm{ad}_u v,w)+\varrho(v,\mathrm{ad}_u w)=0,\quad u,v,w\in\mathfrak{g}.$$

Alors $(\mathfrak{g},\varrho,r)$ *est une algèbre de Lie de Riemann-Poisson si et seulement si* $\mathrm{Im}r_\#$ *est une sous-algèbre abélienne.*

Soit $(\mathfrak{g},[\ ,\ ])$ une algèbre de Lie, $r\in\wedge^2\mathrm{g}$ et ϱ un produit Euclidien sur $\mathfrak{g}$. On désigne par (S,ω_r) le sous-espace symplectique associé à r et par $\#:\mathfrak{g}^*\longrightarrow\mathfrak{g}$ l'isomorphisme défini par ϱ. On note que le produit Euclidien sur $\mathfrak{g}^*$ est déterminée par $\varrho^*(\alpha,\beta)=\varrho(\#(\alpha),\#(\beta))$. On a

$$\mathfrak{g}^*=\mathcal{I}\oplus\mathcal{I}^\perp\quad\text{and}\quad\mathfrak{g}=S\oplus S^\perp,$$

où $\mathcal{I}=\ker r_\#$. De plus, $r_\#:\mathcal{I}^\perp\longrightarrow S$ est un isomorphisme, on note par $\tau:S\longrightarrow\mathcal{I}^\perp$ son inverse. A partir de la relation

$$\varrho(\#(\alpha),r_\#(\beta))=\prec\alpha,r_\#(\beta)\succ=r(\beta,\alpha),$$

nous déduisons que $\#:\mathcal{I}\longrightarrow S^\perp$ est un isomorphisme et donc $\#:\mathcal{I}^\perp\longrightarrow S$ est aussi un isomorphisme.

On considère l'isomorphisme $J:S\longrightarrow S$ reliant ω_r avec $\varrho_{|S}$, i.e.,

$$\omega_r(u,v)=\varrho(Ju,v),\quad u,v\in S.$$

On voit facilement que $J = -\# \circ \tau$.
Maintenant on est en mesure d'énoncer et de démontrer le résultat principal de ce chapitre.

Theorem 3.2.3 *Avec les notations ci-dessus, $(\mathfrak{g}, r, \varrho)$ est une algèbre de Lie de Riemann-Poisson si et seulement si les conditions suivantes sont remplies:*

1. $(S, \varrho_{|S}, \omega_r)$ *est une sous-algèbre de Lie kählerienne, i.e., pour tous* $s_1, s_2, s_3 \in S$,
$$\omega_r(\nabla_{s_1} s_2, s_3) + \omega_r(s_2, \nabla_{s_1} s_3) = 0, \tag{3.8}$$
où ∇ *est le produit de Levi-Civita associé à* $(S, [\ ,\ ], \varrho_{|S})$.

2. *pour tout* $s \in S$ *et tous* $u, v \in S^\perp$,
$$\varrho(\phi_S(s)(u), v) + \varrho(u, \phi_S(s)v) = 0. \tag{3.9}$$
où $\phi_S :\longrightarrow End(S^\perp), u \longmapsto pr_{S^\perp} \circ ad_u$ *et* $pr_{S^\perp} : \mathfrak{g} \longrightarrow S^\perp$ *est la projection orthogonal.*

3. *pour tout* $s_1, s_2 \in S$ *et tous* $u \in S^\perp$,
$$\omega_r(\phi_{S^\perp}(u)s_1, s_2) + \omega_r(s_1, \phi_{S^\perp}(u)s_2) = 0. \tag{3.10}$$
où $\phi_{S^\perp} :\longrightarrow End(S), u \longmapsto pr_S \circ ad_u$ *et* $pr_S : \mathfrak{g} \longrightarrow S$ *est la projection orthogonal.*

Proof 3.2.2 *Supposons premièrement que $(\mathfrak{g}, r, \varrho)$ est une algèbre de Lie de Riemann-Poisson. Selon les propositions* 3.2.1 *et* 3.1.2*, cela est équivalent à*

$$\begin{cases} (S, \omega_r) \text{est une sous-algèbre symplectique} \\ \forall \alpha \in \mathcal{I}, A_\alpha = 0, \\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{I}^\perp, A_\alpha \beta \in \mathcal{I}^\perp \text{ et } r(A_\alpha \beta, \gamma) + r(\beta, A_\alpha \gamma) = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

où A est le produit de Levi-Civita de $(\mathfrak{g}^*, [,]_r, \varrho^*)$.
For $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ et $\gamma \in \mathcal{I}^\perp$,

$$\begin{aligned} 2\varrho^*(A_\alpha \beta, \gamma) &= \varrho^*([\alpha, \beta]_r, \gamma) + \varrho^*([\gamma, \beta]_r, \alpha) + r([\gamma, \alpha]_r, \beta) \\ &= \varrho^*(ad^*_{r_\#(\gamma)} \beta, \alpha) + \varrho^*(ad^*_{r_\#(\gamma)} \alpha, \beta) \\ &= - < \beta, [r_\#(\gamma), \#(\alpha)] > - < \alpha, [r_\#(\gamma), \#(\beta)] > \\ &= -\varrho(\#(\beta), [r_\#(\gamma), \#(\alpha)]) - \varrho(\#(\alpha), [r_\#(\gamma), \#(\beta)]) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Puisque $\# : \mathcal{I} \longrightarrow S^\perp$ et $r_\# : \mathcal{I}^\perp \longrightarrow S$ sont isomorphes, nous déduisons de 3.12 *que $A_\alpha \beta$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ est équivalente à* 3.9.
Pour $\alpha \in \mathcal{I}$ et $\beta, \gamma \in \mathcal{I}^\perp$,

$$\begin{aligned} 2\varrho^*(A_\alpha \beta, \gamma) &= \varrho^*([\alpha, \beta]_r, \gamma) + \varrho^*([\gamma, \beta]_r, \alpha) + \varrho^*([\gamma, \alpha]_r, \beta) \\ &= -\varrho^*(ad^*_{r_\#(\beta)} \alpha, \gamma) - \varrho^*(ad^*_{r_\#(\beta)} \gamma, \alpha) + \varrho^*(ad^*_{r_\#(\gamma)} \beta, \alpha) + \varrho^*(ad^*_{r_\#(\gamma)} \alpha, \beta) \\ &= < \alpha, [r_\#(\beta), \#(\gamma)] > + < \gamma, [r_\#(\beta), \#(\alpha)] > - < \beta, [r_\#(\gamma), \#(\alpha)] > - < \alpha, [r_\#(\gamma), \#(\beta)] > \\ &= \varrho(\#(\gamma), [r_\#(\beta), \#(\alpha)]) - \varrho(\#(\beta), [r_\#(\gamma), \#(\alpha)]) + < \alpha, [r_\#(\beta), \#(\gamma)] > - < \alpha, [r_\#(\gamma), \#(\beta)] > \\ &= -\varrho(J \circ r_\#(\gamma), [r_\#(\beta), \#(\alpha)]) + \varrho(J \circ r_\#(\beta), [r_\#(\gamma), \#(\alpha)]) + < \alpha, [r_\#(\beta), \#(\gamma)] > \\ &- < \alpha, [r_\#(\gamma), \#(\beta)] > \\ &= -\omega_r(r_\#(\gamma), Pr_S([r_\#(\beta), \#(\alpha)]) - \omega_r(Pr([r_\#(\gamma), \#(\alpha)]), r_\#(\beta)) \\ &+ < \alpha, [r_\#(\beta), \#(\gamma)] > - < \alpha, [r_\#(\gamma), \#(\beta)] > . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\varrho^*(A_\alpha\beta,\gamma) &= \varrho^*([\alpha,\beta]_r,\gamma)+\varrho^*([\gamma,\beta]_r,\alpha)+\varrho^*([\gamma,\alpha]_r,\beta)\\
&= -\varrho^*(ad^*_{r_\#(\beta)}\alpha,\gamma)-\varrho^*(ad^*_{r_\#(\beta)}\gamma,\alpha)+\varrho^*(ad^*_{r_\#(\gamma)}\beta,\alpha)+\varrho^*(ad^*_{r_\#(\gamma)}\alpha,\beta)\\
&= <\alpha,[r_\#(\beta),\#(\gamma)]>+<\gamma,[r_\#(\beta),\#(\alpha)]>-<\beta,[r_\#(\gamma),\#(\alpha)]>-<\alpha,[r_\#(\gamma),\#(\beta)]>\\
&= \varrho(\#(\gamma),[r_\#(\beta),\#(\alpha)])-\varrho(\#(\beta),[r_\#(\gamma),\#(\alpha)])+<\alpha,[r_\#(\beta),\#(\gamma)]>-<\alpha,[r_\#(\gamma),\#(\beta)]>\\
&= -\varrho(J\circ r_\#(\gamma),[r_\#(\beta),\#(\alpha)])+\varrho(J\circ r_\#(\beta),[r_\#(\gamma),\#(\alpha)])+<\alpha,[r_\#(\beta),\#(\gamma)]>-<\alpha,[r_\#(\gamma),\#(\beta)]\\
&= -\omega_r(r_\#(\gamma),Pr_S([r_\#(\beta),\#(\alpha)])-\omega_r(Pr([r_\#(\gamma),\#(\alpha)]),r_\#(\beta))\\
&+ <\alpha,[r_\#(\beta),\#(\gamma)]>-<\alpha,[r_\#(\gamma),\#(\beta)]>.
\end{aligned}$$

Maintenant, $\#(\beta),\#(\gamma)\in S$ *et* $r_\#(\beta),r_\#(\gamma)\in S$ *et puisque* S *est une sous-algèbre nous déduisons que* $[r_\#(\beta),\#(\gamma)],[r_\#(\gamma),\#(\beta)]\in S$ *et donc*

$$<\alpha,[r_\#(\beta),\#(\gamma)]>=<\alpha,[r_\#(\gamma),\#(\beta)]>=0.$$

Nous avons encore $\#:\mathcal{I}\longrightarrow S^\perp$ *et* $r_\#:\mathcal{I}^\perp\longrightarrow S$ *sont des isomorphismes donc, d'après* 3.13*,* $A_\alpha\beta=0$ *pour tous* $\alpha\in\mathcal{I}et\beta\in\mathcal{I}^\perp$ *est équivalente à* 3.10*.*
D'autre part, pour tous $\alpha,\beta,\gamma\in\mathcal{I}^\perp$*, puisque* $\#=-J\circ r_\#$*, la relation*

$$2\varrho^*(A_\alpha\beta,\gamma)=\varrho^*([\alpha,\beta]_r,\gamma)+\varrho^*([\gamma,\beta]_r,\alpha)+\varrho^*([\gamma,\alpha]_r,\beta)$$

peut être écrit
$2\varrho(J\circ r_\#(A_\alpha\beta),J\circ r_\#(\gamma))=\varrho(J\circ r_\#([\alpha,\beta]_r),J\circ r_\#(\gamma))+\varrho(J\circ r_\#([\gamma,\beta]_r),J\circ r_\#(\alpha))+\varrho(J\circ r_\#([\gamma,\alpha]_r),J\circ r_\#(\beta))$.
Mais $r_\#([\alpha,\beta]_r)=[r_\#(\alpha),r_\#(\beta)]$ *et donc*
$2<r_\#(A_\alpha\beta),r_\#(\gamma)>_J=<[r_\#(\alpha),r_\#(\beta)],r_\#(\gamma)>_J+<[r_\#(\gamma),r_\#(\beta)],r_\#(\alpha)>_J+<[r_\#(\gamma),r_\#(\alpha)],r_\#(\beta)>_J$,
où $<u,v>_J=\varrho(Ju,Jv)$*. Cela montre que* $r_\#(A_\alpha\beta)=\nabla_{r_\#(\alpha)}r_\#(be)$ *où* ∇ *est le produit de Levi-Civita de* $(S,[,],<,>_J)$ *et la troisième équation dans* 3.11 *est équivalente à*

$$\omega_r(\nabla_uv,w)+\omega_r(v,\nabla_uw)=0.\ \ u,v,w\in S.$$

Cela est équivalent à $\nabla_uJv=J\nabla_uv$*. Montrons que* ∇ *est actuellement le produit de Levi-Civita associé à* $(S,[,],\varrho)$*. En effet, pour tous* $u,v,w\in S,\nabla_uv-\nabla_vu=[u,v]$ *et*

$$\begin{aligned}
\varrho(\nabla_uv,w)+\varrho(\nabla_uw,v) &= <J^{-1}\nabla_uv,J^{-1}w>_J+<J^{-1}\nabla_uw,J^{-1}v>_J\\
&= <\nabla_uJ^{-1}v,J^{-1}w>_J+<\nabla_uJ^{-1}w,J^{-1}v>_J\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nous avons donc montré la partie directe de la théorème. L'inverse se déduit facilement des relations que nous avons établies dans la preuve de la partie directe.

□

Example 1 *1. Soit* G *un groupe de Lie compacte,* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie associée et* T *un tore de dimension paire de* G*.Choisissons une métrique riemannienne bi-invariante* $\langle\ ,\ \rangle$ *sur* G*, une 2-forme non-dégénérée* $\omega\in\wedge^2S^*$ *où* S *est l'algèbre de Lie de* T *et on pose* $\varrho=\langle\ ,\ \rangle(e)$*. Soit* $r\in\wedge^2\mathfrak{g}$ *la solution de l'équation de Yang-Baxter classique associée à* (S,ω)*. En utilisant le théorème 3.2.3, on voit facilement* *que $(\mathfrak{g},\varrho,r)$ est une algèbre de Lie de Riemann-Poisson et donc $(G,\langle\ ,\ \rangle,\pi)$ est un groupe de Lie de Riemann-Poisson où π est le tenseur de Poisson invariant à gauche associé à r. Selon le théorème **??**, les orbites de l'action à droite de T sur G définissent une foliation Riemannienne et kählerienne . For instance, $G=\mathrm{SO}(2n)$, $T=\mathrm{Diagonal}(D_1,\ldots,D_n)$ où $D_i=\begin{pmatrix}\cos(\theta_i) & \sin(\theta_i)\\ -\sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\end{pmatrix}$ et $\langle\ ,\ \rangle=-K$ où K la forme de Killing.*

3.3 Construction des algèbres de Lie de Riemann-Poisson

Dans cette section, nous donnons une méthode générale de construction des algèbres de Lie de Riemann-Poisson et nous l'utilisons pour donner tous les algèbres de Lie de Riemann-Poisson jusqu'à la dimension 5.
Selon le théorème 3.2.3, pour construire des algèbres de Lie de Riemann-Poisson il faut résoudre le problème suivant.

Problem 2 *Nous recherchons:*

1. *Une algèbre de Lie kählerienne $(\mathfrak{h},[,]_{\mathfrak{h}},\varrho_{\mathfrak{h}},\omega)$,*
2. *un espace vectoriel Euclidien $(\mathfrak{p},\varrho_{\mathfrak{p}})$,*
3. *une application bilinéaire antisymétrique $[,]_{\mathfrak{p}}:\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}\longrightarrow\mathfrak{p}$,*
4. *une application bilinéaire antisymétrique $\mu:\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}\longrightarrow\mathfrak{h}$,*
5. *deux applications linéaires $\phi_{\mathfrak{p}}:\mathfrak{p}\longrightarrow sp(\mathfrak{h})$ et $\phi_{:}\mathfrak{p}\longrightarrow so(\mathfrak{p})$ où $sp(\mathfrak{h},\omega)=\{J:\mathfrak{h}\longrightarrow\mathfrak{h}, J^{\omega}+J=0\}$ et $so(\mathfrak{p})=\{A:\mathfrak{p}\longrightarrow\mathfrak{p}, A^*+A=0\}$, J^{ω} est l'adjoint de J par apport à ω et A^* est l'adjoint par rapport à $\varrho_{\mathfrak{p}}$.*

tel que le crochet $[,]$ sur $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p}$ définit, pour tout $a,b\in\mathfrak{p}$ et $u,v\in\mathfrak{h}$, par

$$[u,v]=[u,v]_{\mathfrak{h}},\,[a,b]=\mu(a,b)+[a,b]_{\mathfrak{p}},\,[a,u]=-[u,a]=\phi_{\mathfrak{p}}(a)(u)-\phi_{\mathfrak{h}}(u)(a) \tag{3.13}$$

est un crochet de Lie.

Dans ce cas, $(\mathfrak{g},[,])$ muni de $r\in\wedge^2\mathfrak{g}$ associé à $(\mathfrak{h},\omega)$ et le produit Euclidien $\varrho=\varrho_{\mathfrak{h}}+\varrho_{\mathfrak{p}}$ devient, selon le théorème 3.2.3, une algèbre de Lie de Riemann-Poisson.

Proposition 3.3.1 *Avec les données et les notations du Problème 1, le crochet définit par (18) est un crochet de Lie si et seulement si, pour tout $u,v\in\mathfrak{h}$ et $a,b,c\in\mathfrak{p}$,*

$$\begin{cases}\phi_{\mathfrak{p}}(a)([u,v]_{\mathfrak{h}})=[u,\phi_{\mathfrak{p}}(a)(v)]_{\mathfrak{h}}+[\phi_{\mathfrak{p}}(a)(u),v]_{\mathfrak{h}}+\phi_{\mathfrak{p}}(\phi_{\mathfrak{h}}(v)(a))(u)-\phi_{\mathfrak{p}}(\phi_{\mathfrak{h}}(u)(a))(v),\\ \phi_{\mathfrak{h}}(u)([a,b]_{\mathfrak{p}})=[a,\phi_{\mathfrak{h}}(u)(b)]_{\mathfrak{p}}+[\phi_{\mathfrak{h}}(u)(a),b]_{\mathfrak{p}}+\phi_{\mathfrak{h}}(\phi_{\mathfrak{p}}(b)(u))(a)-\phi_{\mathfrak{h}}(\phi_{\mathfrak{p}}(a)(u))(b),\\ \phi_{\mathfrak{h}}([u,v]_{\mathfrak{h}})=[\phi_{\mathfrak{h}}(u),\phi_{\mathfrak{h}}(v)],\\ \phi_{\mathfrak{p}}([a,b]_{\mathfrak{p}})(u)=[\phi_{\mathfrak{p}}(a),\phi_{\mathfrak{p}}(b)](u)+[u,\mu(a,b)]_{\mathfrak{h}}-\mu(a,\phi_{\mathfrak{h}}(u)(b))-\mu(\phi_{\mathfrak{h}}(u)(a),b),\\ \oint[a,[b,c]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}}=\oint\phi_{\mathfrak{h}}(\mu(b,c))(a),\\ \oint\phi_{\mathfrak{p}}(a)(\mu(b,c))=\oint\mu([b,c]_{\mathfrak{p}},a),\end{cases} \tag{3.14}$$

où $\oint$ est la permutation circulaire.

Proof 3.3.1 *Les équations découlent de l'identité de Jacobi appliquée à* $(a,u,v),(a,b,v)$, *et* (a,b,c).

□

Nous abordons maintenant la tâche de déterminer la liste de toutes les algèbres de Lie de Riemann Poisson jusqu'à la dimension 5. Pour cela, nous devons résoudre le problème 1 dans les cas suivants: $(a)\dim\mathfrak{p}=1,(b)\dim\mathfrak{h}=2$ et $\mathfrak{h}$ est non abélienne, $(c)\dim\mathfrak{h}=\dim\mathfrak{p}=2$ et $\mathfrak{h}$ est abélienne, $(d)\dim\mathfrak{h}=2,\dim\mathfrak{p}=3$ et $\mathfrak{h}$ est abélienne.
Il est facile de trouver la solution du problème 1 si $\dim\mathfrak{p}=1$ puisque dans ce cas $so(\mathfrak{p}=0)$ et les trois dernières équations dans (3.11) sont évidemment vérifiées.

Proposition 3.3.2 *Si* $\dim\mathfrak{p}=1$ *alors les solutions du problème 1 sont l'algèbre de Lie kählerienne* $(\mathfrak{h},\varrho,\omega),\phi_{\mathfrak{h}}=0,[,]_{\mathfrak{p}}=0,\mu=0$, *et* $\phi_{\mathfrak{p}}(a)\in sp(\mathfrak{h},\omega)\cap Der(\mathfrak{h})$ *où* a *est un générateur de* $\mathfrak{p}$ *et* $Der(\mathfrak{h})$ *l'algèbre des dérivations de* $\mathfrak{h}$.

Résoudrons maintenant le Problème 1 si $\dim\mathfrak{h}=2$ et $\mathfrak{h}$ est non abélienne.

Proposition 3.3.3 *Soit* $((\mathfrak{h},\omega,\varrho_{\mathfrak{h}}),(\mathfrak{p},[,]_{\mathfrak{p}},\varrho_{\mathfrak{p}}),\mu,\phi_{\mathfrak{h}},\phi_{\mathfrak{p}})$ *une solution du Problème 1 où* $\mathfrak{h}$ *est non abélienne de dimension 2. Alors il existe une base orthonormée* $\mathbf{B}=(e_1,e_2)$ *de* $\mathfrak{h}$, $b_0\in\mathfrak{p}$ *et deux constants* $\alpha\neq0$ *et* $\beta\neq0$ *tels que:*

(i) $[e_1,e_2]_{\mathfrak{h}}=\alpha e_1,\omega=\beta e_1^*\wedge e_2^*$,

(ii) $(\mathfrak{p},[,]_{\mathfrak{p}},\varrho_{\mathfrak{p}})$ *est une algèbre de Lie Euclidienne,*

(iii) $\phi_{\mathfrak{h}}(e_1)=0,\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)\in Der(\mathfrak{p})\cap so(\mathfrak{p})$ *et, pour tout* $M(\phi_{\mathfrak{p}}(a),\mathbf{B})=\begin{pmatrix}0&\varrho_{\mathfrak{p}}(a,b_0)\\0&0\end{pmatrix}$,

(iiii) pour tous $a,b\in\mathfrak{p},\mu(a,b)=\mu_0(a,b)e_1$ *où* μ_0 *est un 2-cocycle de* $(\mathfrak{p},[,]_{\mathfrak{p}})$ *vérifiant*

$$\mu_0(a,\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)b)+\mu_0(\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)a,b)=-\varrho_{\mathfrak{p}}([a,b]_{\mathfrak{p}},b_0)-\alpha\mu_0(a,b). \tag{3.15}$$

Proof 3.3.2 *Notons premièrement que de la troisième relation dans (19) on trouve que* $\phi_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h})$*est une sous algèbre résoluble de* $so(\mathfrak{p})$ *et donc nécessairement abélienne. Puisque* $\mathfrak{h}$ *est de dimension 2 et non abélienne alors* $\dim\phi_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h})=1$ *et* $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subset ker\phi_{\mathfrak{h}}$. *Donc il existe une base orthonormée* (e_1,e_2) *de* $\mathfrak{h}$ *telle que* $[e_1,e_2]=\alpha e_1,\phi_{\mathfrak{h}}(e_1)=0$ *et* $\omega=\beta e_1^*\wedge e_2^*$. *Si on identifie les endomorphismes de* $\mathfrak{h}$ *avec leurs matrices dans la base* (e_1,e_2), *on trouve que* $sp(\mathfrak{h},\omega)=sl(2,\mathbf{R})$ *et il existe* $a_0,b_0,c_0\in\mathfrak{p}$ *telle que, pour tout* $a\in\mathfrak{p}$,

$$\phi_{\mathfrak{p}}(a)=\begin{pmatrix}\varrho_{\mathfrak{p}}(a_0,a)&\varrho_{\mathfrak{p}}(b_0,a)\\\varrho_{\mathfrak{p}}(c_0,a)&-\varrho_{\mathfrak{p}}(a_0,a)\end{pmatrix}$$

La première équation dans (19) est équivalente à

$$\alpha(\varrho_{\mathfrak{p}}(a_0,a)e_1+\varrho_{\mathfrak{p}}(c_0,a)e_2)=-\alpha\varrho_{\mathfrak{p}}(a_0,a)e_1+\alpha\varrho_{\mathfrak{p}}(a_0,a)e_1+\varrho_{\mathfrak{p}}(a_0,\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)(a))e_1+\varrho_{\mathfrak{p}}(c_0,\phi_{\mathfrak{h}}(a))e_2,$$

pour tout $a\in\mathfrak{p}$. *Puisque* $\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)$ *est antisymétrique, cela est équivalent à*

$$\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)(a_0)=-\alpha a_0 \text{ et } \phi_{\mathfrak{h}}(e_2)(c_0)=-\alpha c_0$$

Ce qui implique que $a_0 = b_0 = c_0$. *La deuxième équation dans (19) implique que* $\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)$ *est une dérivation de* $[,]_{\mathfrak{p}}$. *Si on prend* $u = e_1$ *dans la quatrième équation dans (19), on obtient que* $[e_1, \mu(a,b)] = 0$, *pour tout* $a, b \in \mathfrak{p}$ *et donc* $\mu(a,b) = \mu_0(a,b)e_1$, *Si on prend* $u = e_2$ *dans la quatrième équation dans (19) nous obtenons (20). Les deux dernière équations sont équivalentes à* $[,]_{\mathfrak{p}}$ *est un crochet de Lie et* μ_0 *est un 2-cocycle de* $(\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}})$.

□

La proposition suivante donne des solutions du Problème 1 lorsque $\mathfrak{h}$ est abélienne de dimension 2 et $\dim \mathfrak{p} = 2$.

Proposition 3.3.4 *Soit* $((\mathfrak{h}, \omega, \varrho_{\mathfrak{h}}), (\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}}, \varrho_{\mathfrak{p}}), \mu, \phi_{\mathfrak{h}}, \phi_{\mathfrak{p}})$ *une solution du Problème 1 où* $\mathfrak{h}$ *est abélienne de dimension 2 et* $\dim \mathfrak{p} = 2$. *Alors l'une des situations suivantes se produit:*

1. $\phi_{\mathfrak{h}} = 0, (\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}}, \varrho_{\mathfrak{p}})$ *est une algèbre de Lie Euclidienne de dimension 2, il existe* $a_0 \in \mathfrak{p}$ *et* $D \in sp(\mathfrak{h}, \omega)$ *tel que, pour tout* $a \in \mathfrak{p}, \phi_{\mathfrak{p}}(a) = \varrho_{\mathfrak{p}}(a_0, a)D$ *et il n'y a aucune restriction sur* μ. *En outre,* $a_0 \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]_{\mathfrak{p}}^{\perp}$ *si* $D \neq 0$.

2. $\phi_{\mathfrak{h}} = 0, (\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}}, \varrho_{\mathfrak{p}})$ *est une algèbre de Lie Euclidienne non abélienne de dimension 2,* $\phi_{\mathfrak{p}}$ *identifie* $\mathfrak{p}$ *en une sous algèbre de dimension 2 de* $sp(\mathfrak{h}, \omega)$ *et il n'y a aucune restriction sur* μ.

3. $(\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}}, \varrho_{\mathfrak{p}})$ *est une algèbre de Lie Euclidienne, abélienne et il existe une base orthonormée* $\mathbf{B} = (e_1, e_2)$ *de* $\mathfrak{h}$ *et* $b_0 \in \mathfrak{p}$ *tel que* $\omega = \alpha e_1^* \wedge e_2^*, \phi_{\mathfrak{h}}(e_2) \neq 0$ *et, pour tout* $a \in \mathfrak{p}, M(\phi_{\mathfrak{p}}(a), \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \varrho_{\mathfrak{p}}(b_0, a) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et il n'y a aucune restriction sur* μ.

Proof 3.3.3 *On note premièrement que puisque* $\dim \mathfrak{p} = 2$ *les deux dernières équations dans (19) sont évidement vérifiées et* $(\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}})$ *est une algèbre de Lie. Nous discutons deux cas:*

(i) $\phi_{\mathfrak{h}} = 0$. *Alors (19) est équivalente à* $\phi_{\mathfrak{p}}$ *est une représentation de* $\mathfrak{p}$ *dans* $sp(\mathfrak{h}, \omega) \simeq sl(2, \mathbf{R})$. *Puisque* $sl(2, \mathbf{R})$ *ne contienne aucune sous algèbre abélienne de dimension 2, si* $\mathfrak{p}$ *est algèbre de Lie abélienne alors* $\phi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) \leq 1$ *et la situation se produit. si* $\mathfrak{p}$ *est non abélienne alors la premier ou la deuxième situation se produit dépendant de dimension de* $\phi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})$.

(ii) $\phi_{\mathfrak{h}} \neq 0$. *Puisque* $\dim so(\mathfrak{p}) = 1$ *il existe une base orthonormée* $\mathbf{B} = (e_1, e_2)$ *de* $\mathfrak{h}$ *tels que* $\phi_{\mathfrak{h}}(e_1) = 0$ *et* $\phi_{\mathfrak{h}}(e_2) \neq 0$. *Nous avons* $sp(\mathfrak{h}, \omega) = sl(2, \mathbf{R})$ *et donc, pour tout* $a \in \mathfrak{p}, M(\phi_{\mathfrak{p}}(a), \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \varrho_{\mathfrak{p}}(a_0, a) & \varrho_{\mathfrak{p}}(b_0, a) \\ \varrho_{\mathfrak{p}}(c_0, a) & -\varrho_{\mathfrak{p}}(a_0, a) \end{pmatrix}$. *choisissons une base orthonormée* (a_1, a_2) *de* $\mathfrak{p}$. *Alors il existe* $\gamma \neq 0$ *tels que* $\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)(a_1) = \lambda a_2$ *et* $\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)(a_2) = -\lambda a_1$.
La premier équation dans (19) est équivalente à

$$\phi_{\mathfrak{p}}(\phi_{\mathfrak{h}}(e_2))(e_1) = 0, \ a \in \mathfrak{p}.$$

Cela est équivalent à

$$\phi_{\mathfrak{p}}(a_1) = \phi_{\mathfrak{p}}(a_2)(e_1) = 0.$$

Alors $a_0 = c_0 = 0$ *et donc* $\phi_{\mathfrak{p}}(a) = \begin{pmatrix} 0 & \varrho_{\mathfrak{p}}(b_0, a) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *La deuxième équation dans (19) donne*

$$\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)([a_1, a_2]_{\mathfrak{p}}) = [a_1, \phi_{\mathfrak{h}}(e_2)a_2]_{\mathfrak{p}} + [\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)a_1, a_2]_{\mathfrak{p}} + \phi_{\mathfrak{h}}(\phi_{\mathfrak{p}}(a_2)(e_2)(a_2) - \phi_{\mathfrak{h}}(\phi_{\mathfrak{p}}(a_1)(e_2)(a_2),$$

et donc $\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)([a_1, a_2]_{\mathfrak{p}}) = 0$. *Ainsi* $[a_1, a_2]_{\mathfrak{p}} = 0$. *Les autres équations dans (19) sont immédiats.*

□

Pour aborder le dernier cas, nous avons besoin de la détermination des sous-algèbres de dimension 2 de $sl(2, \mathbf{R})$.

Proposition 3.3.5 *Les sous algèbre de dimension 2 de* $sl(2, \mathbf{R})$ *sont*

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_x = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{2\beta-\alpha}{x} \\ (\alpha+2\beta)x & -\alpha \end{pmatrix}, \end{cases} \quad , \ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

où $x \in \mathbf{R} - \{0\}$. *En outre,* $\mathfrak{g}_x = \mathfrak{g}_y$ *si et seulement si* $x = y$.

Proof 3.3.4 *Soit* g *une sous-algèbre de dimension 2 de* $sl(2, \mathbf{R})$. *On considère la base* $\mathbf{B} = (h, e, f)$ *de* $sl(2, \mathbf{R})$ *donnée par*

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$[h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h.$$

Si $h \in g$ *alors* ad_h *laisse invariant* g. *Mais* ad_h *à trois valeurs propres* $(0, 2, -2)$ *leurs vecteurs propres associés sont* (h, e, f) *et donc sa restriction sur* g *à comme des valeurs propres* $(0, 2)$ *ou* $(0, -2)$. *Ainsi* $g = \mathfrak{g}_1$ *ou* $g = \mathfrak{g}_2$.
Supposons maintenant que $h \notin g$. *En utilisant le fait que* $sl(2, \mathbf{R})$ *est unimodulaire, i.e., pour tout* $w \in sl(2, \mathbf{R}), tr(ad_w = 0)$, *on peut choisir une base* (u, v) *de* g *telle que* (u, v, h) *est une base de* $sl(2, \mathbf{R})$ *et*

$$[u, v] = u, [h, u] = au + v \text{ et } [h, v] = du - av - h.$$

Si (x_1, x_2, x_3) *et* y_1, y_2, y_3 *sont les coordonnées de* u *et* v *dans* $\mathbf{B}$, *les crochet ci-dessus donnent*

$$\begin{cases} -2(x_1y_3 - x_3y_1) - x_1 = 0, \\ 2(x_2y_3 - x_3y_2) - x_2 = 0, \\ x_1y_2 - x_2y_1 - x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = (2-a)x_1, \\ y_2 = -(a+2)x_2, y_3 = -ax_3 \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} dx_1 = (a+2)y_1, \\ dx_2 = (a-2)y_2, \\ dx_3 = ay_3 + 1. \end{cases}$$

On note premièrement que si $x_1 = 0$ *alors* $(x_2, x_3) = (0, 0)$ *ce qui est impossible nous devons donc avoir* $x_1 \neq 0$ *et donc* $d = 4 - a^2$. *Si on remplace dans la troisième équation du* *deuxième système et la dernière équation, nous trouvons* $x_3 = \frac{1}{4}$ *et* $y_3 = -\frac{a}{4}$*. La troisième équation du premier système donne* $x_2 = -\frac{1}{16x_1}$ *et donc* $y_1 = (2-a)x_1$ *et* $y_2 = \frac{(a+2)}{16x_1}$*. Ainsi*

$$g = span\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16x_1} \\ x_1 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{a}{4} & \frac{a+2}{16x_1} \\ (2+a)x_1 & -\frac{a}{4}\end{pmatrix}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ x & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & \frac{a+2}{x} \\ (2-a)x & a\end{pmatrix}\right\}; x = 4x_1.$$

Mais

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{x} \\ 2x & 0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ x & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & \frac{a+2}{x} \\ (2-a)x & a\end{pmatrix}$$

et donc

$$g = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ x & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{x} \\ 2x & 0\end{pmatrix}\right\} = \mathfrak{g}_x.$$

On peut vérifier facilement que $\mathfrak{g}_x = \mathfrak{g}_y$ *si et seulement si* $x = y$*. Ceci complète la preuve.*

□

Les deux propositions suivantes donnent la solution du Problème 1 lorsque $\mathfrak{h}$ est abélienne de dimension 2 et $\dim \mathfrak{p} = 3$.

Proposition 3.3.6 *Soit* $((\mathfrak{h}, \omega, \varrho_{\mathfrak{h}}), (\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}}, \varrho_{\mathfrak{p}}), \mu, \phi_{\mathfrak{h}}, \phi_{\mathfrak{p}})$ *une solution du Problème 1 où* $\mathfrak{h}$ *est abélienne de dimension 2 et* $\dim \mathfrak{p} = 3$*. Alors l'une des situations suivantes se produit:*

(*i*) $(\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}}, \varrho_{\mathfrak{p}})$ *est une algèbre de Lie Euclidienne de dimension 3,* $\phi_{\mathfrak{p}} = 0$ *et* μ *est un 2-cocycle pour la représentation triviale.*

(ii) $\phi_{\mathfrak{p}}$ *est un isomorphisme des algèbres de Lie entre* $(\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}})$ *et* $sl(2, \mathbf{R})$ *et il existe un endomorphisme* $L : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *telle que pour tout* $a, b \in \mathfrak{p}$*,*

$$\mu(a,b) = \phi_{\mathfrak{p}}(a)(L(b)) - \phi_{\mathfrak{p}}(b)(L(a)) - L([a,b]_{\mathfrak{p}}).$$

(iii) Il existe une base $\mathbf{B}_{\mathfrak{p}} = (a_1, a_2, a_3)$ *de* $\mathfrak{p}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma, \tau \in \mathbf{R}$*, tel que* $[,]_{\mathfrak{p}}$ *a l'une des deux formes suivantes*

$$\begin{cases} [a_1, a_2]_{\mathfrak{p}} = 0, [a_1, a_3]_{\mathfrak{p}} = \beta a_1, \\ [a_2, a_3]_{\mathfrak{p}} = \gamma a_1 + \alpha a_2, \alpha \neq 0, \beta \neq 0 \\ M(\varrho_{\mathfrak{p}}, \mathbf{B}_{\mathfrak{p}}) = I_3 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} [a_1, a_2]_{\mathfrak{p}} = [a_1, a_3]_{\mathfrak{p}} = 0, \\ [a_2, a_3]_{\mathfrak{p}} = \alpha a_2, \alpha \neq 0, \\ M(\varrho_{\mathfrak{p}}, \mathbf{B}_{\mathfrak{p}}) = \begin{pmatrix} 1 & \tau & 0 \\ \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Dans les deux cas, il existe une base orthonormée $\mathbf{B}_{\mathfrak{h}} = (e_1, e_2)$ *de* $\mathfrak{h}, x \neq 0, u \neq 0$ *et* $v \in \mathbf{R}$ *telle que* $\phi_{\mathfrak{p}}$ *a l'une des formes suivantes*

$$\begin{cases} M(\phi_{\mathfrak{p}}(a_2), \mathbf{B}_{\mathfrak{h}}) = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M(\phi_{\mathfrak{p}}(a_3), \mathbf{B}_{\mathfrak{h}}) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} & v \\ 0 & \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \\ \phi_{\mathfrak{p}}(a_1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} M(\phi_{\mathfrak{p}}(a_4), \mathbf{B}_{\mathfrak{h}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}, \\ M(\phi_{\mathfrak{p}}(a_3), \mathbf{B}_{\mathfrak{h}}) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & 0 \\ v & -\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \\ \phi_{\mathfrak{p}}(a_1) = 0, \end{cases}$$

$$ou \begin{cases} M(\phi_{\mathfrak{p}}(a_2), \mathbf{B}_{\mathfrak{h}}) = \begin{pmatrix} u & -\frac{u}{x} \\ ux & -u \end{pmatrix}, \\ M(\phi_{\mathfrak{p}}(a_3), \mathbf{B}_{\mathfrak{h}}) = \begin{pmatrix} v & -\frac{2v+\alpha}{2x} \\ \frac{2v-\alpha}{2}x & -v \end{pmatrix}, \\ \phi_{\mathfrak{p}}(a_1) = 0, \end{cases}$$

En outre, μ est un 2-cocycle de $(\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}}, \phi_{\mathfrak{p}})$.

(iiii) Il existe une base $\mathbf{B} = (a_1, a_2, a_3)$ de $\mathfrak{p}$ tel que $\phi_{\mathfrak{p}}(a_1) = \phi_{\mathfrak{p}}(a_2) = 0$, $\phi_{\mathfrak{p}}(a_3)$ est un élément non nul de $sp(\mathfrak{h}, \omega)$ et

$$\begin{cases} [a_1, a_2]_{\mathfrak{p}} = 0, [a_1, a_3]_{\mathfrak{p}} = \beta a_1 + \rho a_2, \\ [a_2, a_3]_{\mathfrak{p}} = \gamma a_1 + \alpha a_2, \end{cases} \quad ou \begin{cases} [a_1, a_2]_{\mathfrak{p}} = \alpha a_2, [a_1, a_3]_{\mathfrak{p}} = \rho a_2, \\ [a_2, a_3]_{\mathfrak{p}} = \gamma a_2, \alpha \neq 0. \end{cases}$$

En outre, μ est un 2-cocycle de $(\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}}, \phi_{\mathfrak{p}})$.

Proof 3.3.5 *Dans ce cas, (19) est équivalente to $(\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}})$ est une algèbre de Lie et $\phi_{\mathfrak{p}}$ est une représentation et μ est un 2-cocycle de $(\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}}, \phi_{\mathfrak{p}})$.*
Nous distinguons quatre cas:

1. *$\phi_{\mathfrak{p}} = 0$ et le cas (i) se produit.*

2. *$\dim \phi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) = 3$ et donc $\mathfrak{p}$ est isomorphe à $sp(\mathfrak{h}, \omega) \simeq sl(2, \mathbf{R})$ et donc μ est un cobound-ery. Ainsi (ii) se produit.*

3. *$\dim \phi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) = 2$ alors $ker\phi_{\mathfrak{p}}$ est un idéale de dimension 1 de $\mathfrak{p}$. Mais $\phi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})$ est une sous-algèbre de dimension 2 de $sp(\mathfrak{h}, \omega) \simeq sl(2, \mathbf{R})$, par conséquent elle n'est pas abélienne donc $\mathfrak{p}/ker\mathfrak{p}$ est non abélienne. Si $ker\mathfrak{p} \subset [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]_{\mathfrak{p}}$ alors $\dim[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]_{\mathfrak{p}} = 2$ il existe donc une base orthonormée (a_1, a_2, a_3) de $\mathfrak{p}$ tel que $a_1 \in ker\mathfrak{p}$ et*

   $$[a_2, a_3]_{\mathfrak{p}} = \alpha a_2, [a_3, a_1]_{\mathfrak{p}} = 0, [a_1, a_2]_{\mathfrak{p}} = 0, \alpha \neq 0.$$

   La matrice de $\varrho_{\mathfrak{p}}$ est donnée par

   $$\begin{pmatrix} 1 & \tau & 0 \\ \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Nous choisissons une base orthonormée (e_1, e_2) de $\mathfrak{h}$ et on identifie $sp(\mathfrak{h}, \omega)$ à $sl(2, \mathbf{R})$. Maintenant $\phi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) = \{\phi_{\mathfrak{p}}(a_2), \phi_{\mathfrak{p}}(a_3)\}$ est une sous-algèbre de $sl(2, \mathbf{R})$ et, selon la proposition 3.3.4, $\phi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ ou $\mathfrak{g}_x$. Mais

   $$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = \mathbf{R}e, [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = \mathbf{R}f \text{ et } [\mathfrak{g}_x, \mathfrak{g}_x] = \left\{ \begin{pmatrix} u & -\frac{u}{x} \\ ux & -u \end{pmatrix} \right\}.$$

   Donc pour que $\phi_{\mathfrak{p}}$ soit une représentation nous devons avoir

   $$\phi_{\mathfrak{p}}(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi_{\mathfrak{p}}(a_3) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} & v \\ 0 & \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \phi_{\mathfrak{p}}(a_1) = 0,$$
   $$\phi_{\mathfrak{p}}(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}, \phi_{\mathfrak{p}}(a_3) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & 0 \\ v & -\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \phi_{\mathfrak{p}}(a_1) = 0$$

or

$$\phi_{\mathfrak{p}}(a_2) = \begin{pmatrix} u & -\frac{u}{x} \\ ux & -u \end{pmatrix}, \phi_{\mathfrak{p}}(a_3) = \begin{pmatrix} p & -\frac{2p+\alpha}{2x} \\ \frac{2p-\alpha}{2}x & -p \end{pmatrix} \text{ et } \phi_{\mathfrak{p}}(a_1) = 0.$$

4. $\dim \phi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) = 1$ *alors* $ker\phi_{\mathfrak{p}}$ *est un idéale de dimension 2 de* $\mathfrak{p}$*, Donc il existe une base orthonormée* (a_1, a_2, a_3) *de* $\mathfrak{p}$ *tels que*

$$[a_1, a_2]_{\mathfrak{p}} = \alpha a_2, [a_3, a_1]_{\mathfrak{p}} = pa_1 + qa_2 \text{ et } [a_3, a_2]_{\mathfrak{p}} = ra_1 + sa_2.$$

L'identité de Jacobi donne $\alpha = 0$ *or* $(p, r) = (0, 0)$*. Prenons* $\phi_{\mathfrak{p}}(a_1) = \phi_{\mathfrak{p}}(a_2) = 0$ *et* $\phi_{\mathfrak{p}}(a_3) \in sl(2, \mathbf{R})$*.*

□

Proposition 3.3.7 *Soit* $((\mathfrak{h}, \omega, \varrho_{\mathfrak{h}}), (\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}}, \varrho_{\mathfrak{p}}), \mu, \phi_{\mathfrak{h}}, \phi_{\mathfrak{p}})$ *une solution du Problème 1 où* $\mathfrak{h}$ *est abélienne de dimension 2,* $\dim \mathfrak{p} = 3$ *et* $\phi_{\mathfrak{h}} \neq 0$*. Alors il existe une base orthonormée* (e_1, e_2) *de* $\mathfrak{h}$*, une base orthonormée* (a_1, a_2, a_3) *de* $\mathfrak{p}$*,* $\lambda > 0, \alpha, p, q, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbf{R}$ *tels que*

$$\phi_{\mathfrak{h}}(e_1) = 0, \phi_{\mathfrak{h}}(e_2)(a_1) = \lambda a_1 \text{ et } \phi_{\mathfrak{h}}(e_2)(a_1) = 0,$$

$$[a_1, a_2]_{\mathfrak{p}} = \alpha a_3, [a_1, a_3]_{\mathfrak{p}} = pa_1 + qa_2, [a_2, a_3]_{\mathfrak{p}} = -qa_1 + pa_2, et\phi_{\mathfrak{p}}(a_i) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3$$

et l'une des situations suivantes se produit:

1. $p \neq 0, \alpha = 0$ *et*

$$\mu(a_1, a_2) = 0, \mu(a_2, a_3) = -\lambda^{-1}(p\mu_1 + q\mu_2)e_1 et \mu(a_1, a_3) = \lambda^{-1}(-q\mu_1 + p\mu_2)e_1.$$

2. $p = 0, \mu_3 \neq 0, \alpha = 0$ *et*

$$\mu(a_1, a_2) = ce_1, \mu(a_2, a_3) = -\lambda^{-1}(p\mu_1 + q\mu_2)e_1 et \mu(a_1, a_3) = \lambda^{-1}(-q\mu_1 + p\mu_2)e_1.$$

3. $p = 0, \mu_3 = 0$ *et*

$$\mu(a_1, a_2) = c_1e_1 + c_2e_2, \mu(a_2, a_3) = -\lambda^{-1}(p\mu_1 + q\mu_2)e_1 et \mu(a_1, a_3) = \lambda^{-1}(-q\mu_1 + p\mu_2)e_1.$$

Proof 3.3.6 *Puisque* $\phi_{\mathfrak{h}} \neq 0$ *alors* $\phi_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h})$ *est une sous-algèbre abélienne non triviale de* $so(\mathfrak{p})$ *et donc doit être de dimension 1. Il existe donc une base orthonormée* (e_1, e_2) *de* $\mathfrak{h}$ *et une base orthonormée* (a_1, a_2, a_3) *de* $\mathfrak{p}$ *et* $\lambda > 0$ *tel que* $\phi_{\mathfrak{h}}(e_1) = 0$ *et*

$$\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)(a_1) = \lambda a_2, \phi_{\mathfrak{h}}(e_2)(a_2) = -\lambda a_1 \text{ et } \phi_{\mathfrak{h}}(e_2)(a_3) = 0.$$

La premier équation dans (19) est équivalente à

$$\phi_{\mathfrak{p}}(\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)(a))(e_1) = 0, \quad a \in \mathfrak{p}.$$

Ceci est équivalent à

$$\phi_{\mathfrak{p}}(a_1)(e_1) = \phi_{\mathfrak{p}}(a_2)(e_1) = 0.$$

Ainsi $\phi_{\mathfrak{p}}(a_i) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, i = 1, 2$ *et* $\phi_{\mathfrak{p}}(a_3) = \begin{pmatrix} u & v \\ w & -u \end{pmatrix}$*. Considérons maintenant la deuxième équation dans (19)*

$$\phi_{\mathfrak{h}}(u)([a,b]_{\mathfrak{p}}) = [a, \phi_{\mathfrak{h}}(u)(b)]_{\mathfrak{p}} + [\phi_{\mathfrak{h}}(u)(a), b]_{\mathfrak{p}} + \phi_{\mathfrak{h}}(\phi_{\mathfrak{p}}(b)(u))(a) + \phi_{\mathfrak{h}}(\phi_{\mathfrak{p}}(a)(u))(b).$$

Cette équation est évidemment vrais lorsque $u = e_1$ et $(a, b) = (a_1, a_2)$. Pour $u = e_1$ et $(a, b) = (a_1, a_3)$, on trouve

$$\phi_{\mathfrak{h}}(\phi_{\mathfrak{p}}(a_3)(e_1))(a_1) = 0.$$

et donc $w = 0$.
For $u = e_2$ et $(a, b) = (a_1, a_2)$, on obtient $\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)([a_1, a_2]_{\mathfrak{p}}) = 0$ et donc $[a_1, a_2]_{\mathfrak{p}} = \alpha a_3$.
For $u = e_2$ et $(a, b) = (a_1, a_3)$ or $(a, b) = (a_2, a_3)$, on obtient

$$\phi_{\mathfrak{h}}(e_2)([a_1, a_3]_{\mathfrak{p}}) = \lambda[a_2, a_3]_{\mathfrak{p}} - \lambda u a_2 \ et \ \phi_{\mathfrak{h}}(e_2)([a_2, a_3]_{\mathfrak{p}}) = -\lambda[a_1, a_3]_{\mathfrak{p}} + \lambda u a_1.$$

Ceci implique que $[a_1, a_3]_{\mathfrak{p}}, [a_2, a_3]_{\mathfrak{p}} \in span\{a_1, a_2\}$ et donc

$$[a_1, a_3]_{\mathfrak{p}} = pa_1 + qa_2 \text{ et } [a_2, a_3]_{\mathfrak{p}} = ra_1 + sa_2.$$

Donc

$$\begin{cases} \lambda(pa_2 - qa_1) = \lambda(ra_1 + sa_2 - ua_2), \\ \lambda(ra_2 - sa_1) = -\lambda(pa_1 + qa_2 - ua_1). \end{cases}$$

Ceci est équivalent à

$$u = 0, p = s \text{ et } r = -q.$$

Pour résumer, nous obtenons

$$[a_1, a_2]_{\mathfrak{p}} = \alpha a_3, [a_1, a_3]_{\mathfrak{p}} = pa_1 + qa_2, [a_2, a_3]_{\mathfrak{p}} = -qa_1 + pa_2 \ et \ \phi_{\mathfrak{p}}(a_i) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Considérons maintenant la quatrième équation dans (19)

$$\phi_{\mathfrak{p}}([a,b]_{\mathfrak{p}})(u) = [\phi_{\mathfrak{p}}(a), \phi_{\mathfrak{p}}(b)](u) + [u, \mu(a,b)]_{\mathfrak{h}} - \mu(a, \phi_{\mathfrak{h}}(u)(b)) - \mu(\phi_{\mathfrak{h}}(u)(a), b).$$

Cette équation est évidemment vrais pour $u = e_1$.
Pour $u = e_2$ et $(a, b) = (a_1, a_2), (a, b) = (a_2, a_3)$ nous obtenons

$$\begin{cases} \alpha\mu_3 = 0, \\ (p\mu_1 + q\mu_2)e_1 = -\lambda\mu(a_2, a_3), \\ (-q\mu_1 + p\mu_2)e_1 = \lambda\mu(a_1, a_3). \end{cases}$$

Les deux dernière équations sont équivalentes à

$$\phi_{\mathfrak{p}}(a_3)(\mu(a_1, a_2)) = -2p\mu(a_1, a_2) \text{ et } p[a_1, a_2]_{\mathfrak{p}} = 0.$$

- $p \neq 0$ alors

$$\alpha = 0, \mu(a_1, a_2) = 0, \mu(a_2, a_3) = -\lambda^{-1}(p\mu_1 + q\mu_2)e_1 \ et \ \mu(a_1, a_3) = \lambda^{-1}(-q\mu_1 + p\mu_2)e_1.$$

- $p = 0$ et $\mu_3 \neq 0$ alors $\alpha = 0$ et

$$\mu(a_1, a_2) = ce_1, \mu(a_2, a_3) = -\lambda^{-1}(p\mu_1 + q\mu_2)e_1 \ et \ \mu(a_1, a_3) = \lambda^{-1}(-q\mu_1 + p\mu_2)e_1.$$

- $p = 0$ et $\mu_3 = 0$ alors

$$\mu(a_1, a_2) = c_1e_1 + c_2e_2, \mu(a_2, a_3) = -\lambda^{-1}(p\mu_1 + q\mu_2)e_1 \ et \ \mu(a_1, a_3) = \lambda^{-1}(-q\mu_1 + p\mu_2)e_1.$$

□

3.4 Résultat Principal

En utilisant les Proposition 3.3.7-3.3.2, on peut donner tous les algèbres de Lie de Riemann-Poisson des dimensions 3,4,5.
Soit $(\mathfrak{g}, [,], \varrho, r)$ une algèbre de Lie de Riemann-Poisson de dimension inférieur ou égale à 5. Selon ce qui est au dessus alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ et le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ est donné par 3.13 et $(\mathfrak{h}, \omega, \varrho_{\mathfrak{h}}), (\mathfrak{p}, [,]_{\mathfrak{p}}, va_{\mathfrak{p}})$, sont des solutions pour le Problème 1.

- $\dim \mathfrak{g} = 3$. Dans ce cas $\dim \mathfrak{h} = 2$ et $\dim \mathfrak{p} = 1$ et, en appliquant Proposition 3.3.2, Le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}, \varrho$ et r sont données dans le Table 1, où $e^{12} = e_1 \wedge e_2$.

Crochets de Lie non nulles	Bivecteur r	Matrice de ϱ	Conditions
$[e_1, e_2] = ae_1, [e_3, e_2] = be_1$	αe^{12}	I_3	$a \neq 0, \alpha \neq 0$
$[e_3, e_1] = -be_1 + ce_2, [e_3, e_2] = de_1 + be_2$	αe^{12}	I_3	$\alpha \neq 0$

Tableau 1: Les algèbres de Lie de Riemann-Poisson de dimension 3.

- $\dim \mathfrak{g} = 4$. Nous avons trois cas:

$(c41)$ $\dim \mathfrak{g} = 2, \dim \mathfrak{p} = 2$ et $\mathfrak{h}$ est non abélienne et nous pouvons appliquer la Proposition 4.3 pour obtenir les crochets de Lie sur $\mathfrak{g}, \varrho$ et r. Ils sont décrits aux lignes 1 et 2 du tableau 2.

$(c42)$ $\dim \mathfrak{h} = 2, \dim \mathfrak{p} = 2$ et $\mathfrak{h}$ est abélienne et nous pouvons appliquer la Proposition 4.4 et 4.5 pour obtenir les crochets de Lie sur $\mathfrak{g}, \varrho$ et r. Ils sont décrits aux lignes 3 et 8 du tableau 2.

$(c43)$ $\dim \mathfrak{h} = 4$. Dans ce cas $\mathfrak{p}$ est une algèbre de Lie Kählerienne. Nous avons utilisé [9] pour avoir toutes les algèbres de Lie Kählerienne de dimension 4 avec leurs dérivations symplectique. Les résultats sont données dans le Tableau 3. La notion $Der^s(\mathfrak{h})$ est l'espace vectoriel des dérivations qui sont anti-symétrique par rapport a la forme symplectique. L'espace vectoriel $Der^s(\mathfrak{h})$ est décrit par une famille des générateurs et E_{ij} est la matrice avec 1 dans la linge i et la colonne j et 0 ailleurs.

Crochets de Lie non nulles	Bivecteur r	Matrice de ϱ	Conditions
$[e_1, e_2] = ae_1, [e_3, e_2] = be_1 + e_4, [e_4, e_2] = de_1 - ce_3$	αe^{12}	I_4	$a \neq 0, \alpha \neq 0$
$[e_1, e_2] = ae_1, [e_3, e_2] = be_1, [e_4, e_2] = de_1, [e_3, e_4] = ce_3 - a^{-1}cbe_1$	αe^{12}	I_4	$\alpha ac \neq 0,$
$[e_3, e_4] = ae_1 + be_2$	αe^{12}	I_4	$\alpha \neq 0,$
$[e_3, e_4] = ae_1 + be_2 + ce_3, [e_4, e_1] = xe_1 + ye_2, [e_4, e_2] = ze_1 - xe_2$	αe^{12}	I_4	$\alpha ac \neq 0,$
$[e_3, e_4] = ae_1 + be_2 + 2e_4, [e_3, e_1] = e_1, [e_3, e_2] = -e_2, [e_4, e_1] = e_1$	αe^{12}	Diag$\left(1, 1, \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \nu & \rho \end{pmatrix}\right)$	$\alpha \neq 0, \mu, \rho > 0, \mu\rho > \nu^2$
$[e_3, e_4] = ae_1 + be_2 - 2e_4, [e_3, e_1] = e_1, [e_3, e_2] = -e_2, [e_4, e_1] = e_2$	αe^{12}	Diag$\left(1, 1, \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \nu & \rho \end{pmatrix}\right)$	$\alpha \neq 0, \mu, \rho > 0, \mu\rho > \nu^2$
$[e_3, e_4] = ae_1 + be_2 - 2e_3, [e_3, e_1] = e_1 + xe_2, [e_3, e_2] = -\frac{1}{x}e_1 - e_2, [e_4, e_1] = xe_2, [e_4, e_2] = \frac{1}{x}e_1$	αe^{12}	Diag$\left(1, 1, \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \nu & \rho \end{pmatrix}\right)$	$\alpha \neq 0, \mu, \rho > 0, \mu\rho > \nu^2, x \neq 0$
$[e_3, e_4] = ae_1 + be_2, [e_3, e_2] = xe_1 + ye_4, [e_4, e_2] = ze_1 - ye_3$	αe^{12}	I_4	$\alpha y \neq 0$

Tableau 2: Les algèbres de Lie de Riemann-Poisson de dimension 4 et de rang 2.

Crochets de Lie non nulles	Bivecteur r	Matrice de ϱ	Conditions	$Der^S(\mathfrak{h})$
$[e_1, e_2] = e_2,$	$\alpha e^{12} + \beta e^{34}$	Diag(a, b, c, d)	$a, b, c, d > 0, \alpha\beta \neq 0$	$\{E_{21}, E_{33} - E_{44}, E_{43}, E_{34}\}$
$[e_1, e_2] = -e_3, [e_1, e_3] = e_2,$	$\alpha e^{14} + \beta e^{23}$	Diag(a, b, b, c)	$a, b, c > 0, \alpha\beta \neq 0,$	$\{E_{23} - E_{32}, E_{41}\}$
$[e_1, e_2] = e_2, [e_3, e_4] = e_4,$	$\alpha e^{12} + \beta e^{34}$	Diag(a, b, c, d)	$a, b, c, d > 0, \alpha\beta \neq 0,$	$\{E_{21}, E_{43}\}$
$[e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = -\delta e_3, [e_4, e_3] = \delta e_2,$	$\alpha e^{14} + \beta e^{23}$	Diag(a, b, b, c)	$a, b, c > 0, \delta > 0, \alpha\beta \neq 0,$	$\{E_{14}, E_{23} - E_{32}\}$
$[e_1, e_2] = e_3, [e_4, e_3] = e_3, [e_4, e_1] = \frac{1}{2}e_1, [e_4, e_2] = \frac{1}{2}e_2$	$\alpha(e^{12} - e^{34})$	Diag$(a, \mu b, \mu a, b)$	$\mu, a, b > 0, \alpha \neq 0,$	$\{E_{34}, E_{22} - E_{11}, E_{12} + E_{21}\}$
$[e_1, e_2] = e_3, [e_4, e_3] = e_3, [e_4, e_1] = 2e_1, [e_4, e_2] = -e_2,$	$\alpha(e^{23} + e^{14})$	Diag$(a, a, 2a, 2a)$	$\alpha \neq 0, a > 0$	$\{2E_{14} - E_{32}\}$
$[e_1, e_2] = e_3, [e_4, e_3] = e_3, [e_4, e_1] = \frac{1}{2}e_1 - e_2, [e_4, e_2] = -e_2$	$\alpha(e^{12} - e^{34})$	Diag(a, a, a, a)	$\alpha \neq 0, a > 0$	$\{E_{34}, E_{12} - E_{21}\}$

Tableau 3: Les algèbres de Lie kählleriennes de dimension 4 et leurs dérivations. symplectiques.

- $\dim \mathfrak{h} = 5$. Nous avons:

(c51) $\dim \mathfrak{h} = 4$ et $\mathfrak{h}$ est abélienne et donc un espace vectoriel symplectique. Nous pouvons appliquer la Proposition 3.3.2 et $\mathfrak{g}$ est un produit semi-direct.

(c52) $\dim \mathfrak{h} = 4$ et $\mathfrak{h}$ est non abélienne. Nous pouvons appliquer la Proposition 3.3.2. et Tableau 3 pour obtenir les crochets de Lie sur $\mathfrak{g}$, ϱ et r. Le résultat est dans le Tableau 4.

(c53) $\dim \mathfrak{h} = 2$ et $\mathfrak{h}$ est non abélienne. Nous pouvons appliquer la Proposition 3.3.3. Dans ce cas $(\mathfrak{p}, [,]_\mathfrak{p}, \varrho_\mathfrak{p})$ est une algèbre de Lie Euclidienne de dimension 3 on peut compiler $Der(\mathfrak{p}) \cap so(\mathfrak{p})$ et résoudre 3.15.
Les algèbres de Lie Euclidiennes de dimension 3 sont classifiées dans [12]. Le résultat est résumé en Tableau 5 si $\mathfrak{p}$ est unimodulaire et en Tableau 6 lorsque $\mathfrak{p}$ est non unimodulaire.

(c54) $\dim \mathfrak{h} = 2$ et $\mathfrak{h}$ est abélienne et $\phi_\mathfrak{h} = 0$. On applique la Proposition 3.3.6 et nous effectuons tous les calculs nécessaires. Nous utilisons la classification des algèbres de Lie Euclidiennes de dimension 3 donnée dans [12]. Les résultats sont données dans les tableaux 7-8.

(c55) $\dim \mathfrak{h} = 2$ et $\mathfrak{h}$ est abélienne et $\phi_\mathfrak{h} \neq 0$. Nous appliquons la Proposition 3.3.7 et nous effectuons tous les calculs nécessaires. Les résultats sont données dans le tableaux 9.

Crochets de Lie non nulles	Bivecteur r	Matrice de ϱ	Conditions
$[e_1,e_2]=e_2,[e_5,e_1]=xe_2,[e_5,e_3]=ye_3+te_4,[e_5,e_4]=ze_3-ye_4$	$\alpha e^{12}+\beta e^{34}$	Diag(a,b,c,d,e)	$a,b,c,d,e>0,\alpha\beta\neq 0$
$[e_1,e_2]=-e_3,[e_1,e_3]=e_2,[e_5,e_1]=ye_4,[e_5,e_2]=-xe_3,[e_5,e_3]=xe_2,$	$\alpha e^{14}+\beta e^{23}$	Diag(a,b,b,c,d)	$a,b,c,d>0,\alpha\beta\neq 0,$
$[e_1,e_2]=e_2,[e_3,e_4]=e_4,[e_5,e_1]=xe_2,[e_5,e_3]=ye_4,$	$\alpha e^{12}+\beta e^{34}$	Diag(a,b,c,d,e)	$a,b,c,d,e>0,\alpha\beta\neq 0,$
$[e_4,e_1]=e_1,[e_4,e_2]=-\delta e_3,[e_4,e_3]=\delta e_2,[e_5,e_2]=-ye_3,[e_5,e_3]=ye_2,[e_5,e_4]=xe_1,$	$\alpha e^{14}+\beta e^{23}$	Diag(a,b,b,c,d)	$a,b,c,d>0,\delta>0,\alpha\beta\neq 0,$
$[e_1,e_2]=e_3,[e_4,e_3]=e_3,[e_4,e_1]=\frac{1}{2}e_1,[e_4,e_2]=\frac{1}{2}e_2,[e_5,e_1]=xe_1+ye_2,[e_5,e_2]=ye_1-xe_2,[e_5,e_4]=ze_3$	$\alpha(e^{12}-e^{34})$	Diag$(a,\mu b,\mu a,b,c)$	$\mu,a,b,c>0,\alpha\neq 0,$
$[e_1,e_2]=e_3,[e_4,e_3]=e_3,[e_4,e_1]=2e_1,[e_4,e_2]=-e_2,[e_5,e_2]=xe_3,[e_5,e_4]=-2xe_1,$	$\alpha(e^{23}+e^{14})$	Diag$(a,a,2a,2a,b)$	$\alpha\neq 0,a,b>0$
$[e_1,e_2]=e_3,[e_4,e_3]=e_3,[e_4,e_1]=\frac{1}{2}e_1-e_2,[e_4,e_2]=-e_2,[e_5,e_1]=-xe_2,[e_5,e_2]=xe_1,[e_5,e_4]=ye_3,$	$\alpha(e^{12}-e^{34})$	Diag(a,a,a,a,b)	$\alpha\neq 0,a,b>0$

Tableau 4: Les algèbres de Lie de Riemann-Poisson de dimension 5 et de rang 4

Crochets de Lie non nulles	Bivecteur r	Matrice de ϱ	Conditions
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=b\mu e_1-ce_4,[e_4,e_2]=d\mu e_1+ce_3,[e_5,e_2]=fe_1,[e_3,e_4]=-fe_1+e_5$	αe^{12}	$\mathrm{Diag}(1,\rho,\mu,\mu,1)$	$c\alpha\neq 0,\mu\rho>0$
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=be_1,[e_4,e_2]=ce_1,[e_5,e_2]=d\mu e_1,[e_3,e_5]=be_1-e_3,[e_4,e_5]=-ce_1+e_4$	αe^{12}	$\mathrm{Diag}(1,\rho,1,1,\mu)$	$\alpha\neq 0,\mu,\rho>0$
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=(b+c)e_1,[e_4,e_2]=(cx+b)e_1,[e_5,e_2]=d\mu e_1,[e_3,e_5]=(b+c)e_1-e_3,[e_4,e_5]=-(xc+b)e_1+e_4$	αe^{12}	$\mathrm{Diag}\left(1,\rho,\begin{pmatrix}1&1\\1&x\end{pmatrix},\mu\right)$	$\alpha\neq 0,\mu,\rho>0$
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=be_1,[e_4,e_2]=c\mu e_1,[e_5,e_2]=d\nu e_1,[e_3,e_5]=-\mu ce_1+e_4,[e_4,e_5]=be_1-e_3$	αe^{12}	$\mathrm{Diag}(1,\rho,1,\mu,\nu)$	$\alpha\neq 0,\mu,\rho,\nu>0$
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=b\mu e_1,[e_4,e_2]=c\nu e_1,[e_5,e_2]=d\rho e_1,[e_3,e_4]=-2\rho de_1+2e_5,[e_3,e_5]=2\nu ce_1-2e_4,[e_4,e_5]=2\mu be_1-2e_3$	αe^{12}	$\mathrm{Diag}(1,\xi,\mu,\nu,\rho)$	$\alpha\neq 0,\mu,\nu,\rho,\xi>0,\mu\neq\nu,\mu\neq\rho,\nu\neq\rho$
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=b\mu e_1,[e_4,e_2]=c\nu e_1-\lambda e_5,[e_5,e_2]=d\nu e_1+\lambda e_4,[e_3,e_4]=-\frac{2\nu(\lambda c+d)}{1+\lambda^2}e_1+2e_5,[e_3,e_5]=\frac{2\nu(c-\lambda d)}{1+\lambda^2}e_1-2e_4,[e_4,e_5]=2\mu be_1-2e_3$	αe^{12}	$\mathrm{Diag}(1,\rho,\mu,\nu,\nu)$	$\lambda\alpha\neq 0,\mu,\nu,\rho>0$
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=b\mu e_1,[e_4,e_2]=c\nu e_1,[e_5,e_2]=d\rho e_1,[e_3,e_4]=-\rho de_1+e_5,[e_3,e_5]=\nu ce_1-e_4,[e_4,e_5]=-\mu be_1+e_3$	αe^{12}	$\mathrm{Diag}(1,\xi,\mu,\nu,\rho)$	$\alpha\neq 0,\mu,\nu,\rho,\xi>0,\mu\neq\nu,\mu\neq\rho,\nu\neq\rho$
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=b\mu e_1,[e_4,e_2]=c\nu e_1-\lambda e_5,[e_5,e_2]=d\nu e_1+\lambda e_4,[e_3,e_4]=-\frac{\nu(\lambda c+d)}{1+\lambda^2}e_1+e_5,[e_3,e_5]=\frac{\nu(c-\lambda d)}{1+\lambda^2}e_1-e_4,[e_4,e_5]=-\mu be_1+e_3$	αe^{12}	$\mathrm{Diag}(1,\rho,\mu,\nu,\nu)$	$\lambda\alpha\neq 0,\mu,\nu,\rho>0$
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=b\mu e_1-ue_4-\nu e_5,[e_4,e_2]=c\mu e_1+ue_3-we_5,[e_5,e_2]=d\mu e_1+\nu e_3+we_4,[e_3,e_4]=xe_1+e_5,[e_3,e_5]=ye_1-e_4,[e_4,e_5]=ze_1+e_3,x=-\frac{\mu(buw-cu\nu+du^2+b\nu+cw+d)}{1+u^2+\nu^2+w^2},y=\frac{\mu(-b\nu w+c\nu^2-duw+bu-dw+c)}{1+u^2+\nu^2+w^2},z=-\frac{\mu(bw^2-c\nu w+duw-cu+d\nu+b)}{1+u^2+\nu^2+w^2}$	αe^{12}	$\mathrm{Diag}(1,\rho,\mu,\mu,\mu)$	$\alpha\neq 0,\mu,\rho>0$

Tableau 5: Five-dimensional Riemann-Poisson Lie algebras of rank 2 with non abelian k$\ddot{a}$hler subalgebra and unimodular complement

Crochets de Lie non nulles	Bivecteur r	Matrice de ϱ	Conditions
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=(f+c\lambda+f\lambda^2)e_1-\lambda e_4,[e_4,e_2]=ce_1+\lambda e_3,[e_5,e_2]=d\mu e_1,[e_3,e_5]=fe_1-e_3,[e_4,e_5]=(\lambda f+c)e_1-e_4$	αe^{12}	$\mathrm{Diag}(1,\rho,1,1,\mu)$	$\lambda\alpha\neq 0,\mu,\rho>0$
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=be_1,[e_4,e_2]=c\mu e_1,[e_5,e_2]=d\nu e_1,[e_3,e_5]=\mu ce_1-e_4,[e_4,e_5]=(-fb+2\mu c)e_1+fe_3-2e_4$	αe^{12}	$\mathrm{Diag}(1,\rho,1,\mu,\nu)$	$\alpha\neq 0,f=1$ or $f\leqslant 0,0<\mu<\lvert f\rvert\mu,\rho>0$
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=(b+c\mu)e_1,[e_4,e_2]=(c+b\mu)e_1,[e_5,e_2]=d\nu e_1,[e_3,e_5]=(b\mu+c)e_1-e_4,[e_4,e_5]=((2-\mu)c+(2\mu-1)b)e_1+e_3-2e_4$	αe^{12}	$\mathrm{Diag}\left(1,\rho,\begin{pmatrix}1&\mu\\\mu&1\end{pmatrix},\nu\right)$	$\alpha\neq 0,\mu,\nu,\rho>0$
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=(b+c)e_1,[e_4,e_2]=(b+c\mu)e_1,[e_5,e_2]=d\nu e_1,[e_3,e_5]=(c\mu+b)e_1-e_4,[e_4,e_5]=((2-f)b+(2\mu-f)c)e_1+fe_3-2e_4$	αe^{12}	$\mathrm{Diag}\left(1,\rho,\begin{pmatrix}1&1\\1&\mu\end{pmatrix},\nu\right)$	$\alpha\neq 0,c>\mu>1,\nu,\rho>0$
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=(b+\frac{1}{2}c)e_1,[e_4,e_2]=(c+\frac{1}{2}b)e_1,[e_5,e_2]=d\nu e_1,[e_3,e_5]=(\frac{1}{2}b+c)e_1-e_4,[e_4,e_5]=(2c+b)e_1-2e_4$	αe^{12}	$\mathrm{Diag}\left(1,\rho,\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix},\nu\right)$	$\alpha\neq 0,\nu,\rho>0$
$[e_1,e_2]=e_1,[e_3,e_2]=xe_1,[e_4,e_2]=ye_1,[e_5,e_2]=d\nu e_1,[e_3,e_5]=ze_1-e_4,[e_4,e_5]=te_1+fe_3-2e_4,x=\frac{((1+\mu)b+(\mu-1c))f-2b}{2f^2(f-1)},y=z=\frac{(\mu-1)(cf+b)}{2f(f-1)},t=\frac{(1-\mu)cf+((f-2)\mu+f)b}{2f(1-f)}$	αe^{12}	$A^tBA,A=\begin{pmatrix}\frac{1+s}{-2fs}&-\frac{1}{2s}&0\\\frac{1-s}{2fs}&\frac{1}{2s}&0\\0&0&1\end{pmatrix},B=Diag\left(1,\rho,\begin{pmatrix}1&\mu\\\mu&1\end{pmatrix},\nu\right),s=\sqrt{1-f}$	$\alpha\neq 0,0<f<1,0\leqslant\mu<1,$

Tableau 6: Five-dimensional Riemann-Poisson Lie algebras of rank 2 with non abelian k$\ddot{a}$hler subalgebra and non unimodular complement

Crochets de Lie non nulles	Bivecteur r	Matrice de ϱ	Conditions
$[e_3,e_4]=ae_1+be_2+e_5, [e_3,e_5]=ce_1+de_2, [e_4,e_5]=fe_1+ge_2$	αe^{12}	Diag$(1,1,\mu,\mu,1)$	$\alpha\neq 0, \mu>0$
$[e_3,e_4]=ae_1+be_2+e_5, [e_3,e_5]=ce_1+de_2-e_3, [e_4,e_5]=fe_1+ge_2+e_4$	αe^{12}	Diag$(1,1,1,1,\mu)$,Diag$\left(1,1,\begin{pmatrix}1&1\\1&x\end{pmatrix},\mu\right)$	$\alpha\neq 0, \mu>0$
$[e_3,e_4]=ae_1+be_2, [e_3,e_5]=ce_1+de_2+e_4, [e_4,e_5]=fe_1+ge_2-e_3$	αe^{12}	Diag$(1,1,1,\mu,\nu)$	$\alpha\neq 0, \mu,\nu>0$
$[e_3,e_4]=ae_1+be_2+2e_5, [e_3,e_5]=ce_1+de_2-2e_4, [e_4,e_5]=fe_1+ge_2-2e_3$	αe^{12}	Diag$(1,1,\mu,\nu,\rho)$	$\alpha\neq 0, \mu,\rho,\nu>0$
$[e_3,e_4]=ae_1+be_2+e_5, [e_3,e_5]=ce_1+de_2-e_4, [e_4,e_5]=fe_1+ge_2+e_3$	αe^{12}	Diag$(1,1,\mu,\nu,\rho)$	$\alpha\neq 0, \mu,\rho,\nu>0$
$[e_3,e_5]=ce_1+de_2-e_3, [e_4,e_5]=fe_1+ge_2-e_4$	αe^{12}	Diag$(1,1,1,1,\mu)$	$\alpha\neq 0, \mu>0$
$[e_3,e_5]=ce_1+de_2-e_4, [e_4,e_5]=fe_1+ge_2+xe_3-2e_4$	αe^{12}	There are many cases See [12]	$\alpha\neq 0,$

Tableau 7: Five-dimensional Riemann-Poisson Lie algebras of rank 2 with abelian k$\ddot{a}$hler subalgebra

Crochets de Lie non nulles	Bivecteur r	Matrice de ϱ	Conditions
$[e_3,e_1]=-e_2,[e_3,e_2]=e_1,[e_4,e_1]=e_2,[e_4,e_2]=e_1,[e_5,e_1]=e_1,[e_5,e_2]=-e_2,[e_3,e_4]=2e_5+(l_{22}-l_{21}-2l_{13})e_1-(l_{12}+l_{11}+2l_{23})e_2,[e_3,e_5]=-2e_4+(l_{23}-l_{11}-2l_{12})e_1-(l_{13}-l_{21}-2l_{22})e_2,[e_4,e_5]=-2e_3+(l_{23}-l_{12}+2l_{11})e_1+(l_{13}+l_{22}+2l_{21})e_2$	αe^{12}	Diag$(1,1,\mu,\nu,\rho)$	$\alpha\neq 0,\mu,\nu,\rho>0$
$[e_4,e_1]=ue_1,[e_5,e_1]=-\frac{a}{2}e_1,[e_5,e_2]=\nu e_1+\frac{a}{2}e_2,[e_3,e_4]=xe_1+ye_2,[e_3,e_5]=be_3+ze_1+te_2,[e_4,e_5]=ce_3+ae_4+re_1+se_2$	αe^{12}	Diag$(1,1,1,1,1)$,	$\alpha\neq 0,a\neq 0,b\neq 0,(3a+2b)y=0,(a+2b)x-2tu+2y\nu=0$
$[e_4,e_2]=ue_1,[e_5,e_1]=-\frac{a}{2}e_1,[e_5,e_2]=ve_1+\frac{a}{2}e_2,[e_3,e_4]=xe_1,[e_3,e_5]=ze_1+te_2,[e_4,e_5]=ae_4+re_1+se_2,$	αe^{12}	Diag$\left(1,1,\begin{pmatrix}1&\mu\\ \mu&1\end{pmatrix},1\right)$	$\alpha\neq 0,a\neq 0,ax-2tu=0$
$[e_4,e_1]=ue_1,[e_5,e_1]=\frac{a}{2}e_1+ve_2,[e_5,e_2]=-\frac{a}{2}e_2,[e_3,e_4]=xe_1+ye_2,[e_3,e_5]=be_3+ze_1+te_2,[e_4,e_5]=ce_3+ae_4+re_1+se_2,$	αe^{12}	Diag$(1,1,1,1,1)$	$\alpha\neq 0,a,b\neq 0,(3a+2b)x=0,(a+2b)y-2zu+2xv=0$
$[e_4,e_1]=ue_1,[e_5,e_1]=\frac{a}{2}e_1+ve_2,[e_5,e_2]=-\frac{a}{2}e_2,[e_3,e_4]=ye_2,[e_3,e_5]=ze_1+te_2,[e_4,e_5]=ae_4+re_1+se_2,$	αe^{12}	Diag$\left(1,1,\begin{pmatrix}1&\mu\\ \mu&1\end{pmatrix},1\right)$	$\alpha\neq 0,a\neq 0,ay-2zu=0$
$[e_4,e_1]=ue_1+upe_2,[e_4,e_2]=-\frac{u}{p}-ue_2,[e_5,e_1]=ve_1+\frac{(2v-a)p}{2}e_2,[e_5,e_2]=-\frac{(2v+a)}{2p}e_1-ve_2,[e_3,e_4]=xe_1+ye_2,[e_3,e_5]=be_3+ze_1+te_2,[e_4,e_5]=ce_3+ae_4+re_1+se_2,((2a+2b+2v)x-2zu)p-ay+2tu-2yv=0,(2xv-ax-2zu)p+(2a+2b-2v)y+2tu=0,$	αe^{12}	Diag$(1,1,1,1,1)$	$\alpha\neq 0,a,b\neq 0,$
$[e_4,e_1]=ue_1+upe_2,[e_4,e_2]=-\frac{u}{p}-ue_2,[e_5,e_1]=ve_1+\frac{(2v-a)p}{2}e_2,[e_5,e_2]=-\frac{(2v+a)}{2p}e_1-ve_2,[e_3,e_4]=xe_1+ye_2,[e_3,e_5]=ze_1+te_2,[e_4,e_5]=ae_4+re_1+se_2,((2a+2v)x-2zu)p-ay+2tu-2yv=0,(2xv-ax-2zu)p+(2a-2v)y+2tu=0,$	αe^{12}	Diag$\left(1,1,\begin{pmatrix}1&\mu\\ \mu&1\end{pmatrix},1\right)$	$\alpha\neq 0,a,b\neq 0,$
$[e_5,e_1]=ue_1+ve_2,[e_5,e_2]=we_1-ue_2,[e_3,e_4]=xe_1+ye_2,[e_3,e_5]=ze_1+te_2+ae_3+be_4,[e_4,e_5]=re_1+se_2+ce_3+de_4,((2a+2v)x-2zu)p-ay+2tu-2yv=0,(2xv-ax-2zu)p+(2a-2v)y+2tu=0,$	αe^{12}	Diag$(1,1,1,1,1)$	$\alpha\neq 0,(a+d+u)x+yw=0,xv+(a+d-u)y=0,$
$[e_5,e_1]=ue_1+ve_2,[e_5,e_2]=we_1-ue_2,[e_3,e_4]=xe_1+ye_2+ae_4,[e_3,e_5]=ze_1+te_2be_4,[e_4,e_5]=re_1+se_2+de_4,((2a+2v)x-2zu)p-ay+2tu-2yv=0,(2xv-ax-2zu)p+(2a-2v)y+2tu=0,$	αe^{12}	Diag$(1,1,1,1,1)$	$\alpha\neq 0,a\neq 0,(c+u)x-ar+yw=0,(c-u)y-as+xv=0,$

Tableau 8: Five-dimensional Riemann-Poisson Lie algebras of rank 2 with abelian k$\ddot{a}$hler subalgebra(Contuned)

Crochets de Lie non nulles	Bivecteur r	Matrice de ϱ	Conditions
$[e_3,e_2]=xe_1-ae_4, [e_4,e_2]=ye_1+ae_3, [e_5,e_2]=ze_1, [e_3,e_5]=pe_3+qe_4+a^{-1}(-qx+py)e_1, [e_4,e_5]=-qe_3+pe_4-a^{-1}(px+qy)e_1$	αe^{12}	Diag$(1,1,1,1,1)$	$\alpha\neq 0, a\neq 0$
$[e_3,e_2]=xe_1-ae_4, [e_4,e_2]=ye_1+ae_3, [e_5,e_2]=ze_1, [e_3,e_4]=be_1, [e_3,e_5]=qe_4-a^{-1}-qxe_1, [e_4,e_5]=-qe_3-a^{-1}qye_1$	αe^{12}	Diag$(1,1,1,1,1)$	$\alpha\neq 0, a\neq 0, z\neq 0$
$[e_3,e_2]=xe_1-ae_4, [e_4,e_2]=ye_1+ae_3, [e_3,e_4]=be_1+ce_2, [e_3,e_5]=qe_4-a^{-1}-qxe_1, [e_4,e_5]=-qe_3-a^{-1}qye_1$	αe^{12}	Diag$(1,1,1,1,1)$	$\alpha\neq 0, a\neq 0$

Tableau 9: Five-dimensional Riemann-Poisson Lie algebras of rank 2 with abelian k$\ddot{a}$hler subalgebra(Contuned)

Ce théorème inconnu à notre connaissance peut être utilise pour construire des exemples d'algèbres de Lie de Riemann-Poisson.

Theorem 3.4.1 *Soit $(G,<,>)$ un groupe de Lie Riemannien dimensionnel plat. Alors il existe une 2-forme différentielle invariant à gauche Ω sur G tel que $(G,<,>,\Omega)$ est un groupe de Lie K$\ddot{a}$hlerien.*

Proof 3.4.1 *Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\varrho=<,>(e)$. Selon Le théorème de Milnor $[[13], Theorem 1.5]$ et sa version améliorée $[[3], Theorem 3.1]$ la planéité de la métrique sur G est équivalente à $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est abélienne dimensionnelle, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\perp=\{u\in\mathfrak{g}, ad_u+ad_u^*=0\}$ est aussi abélienne dimensionnelle et $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\oplus[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\perp$. En outre, le produit de Levi-Civita est donné par*

$$L_a=\begin{cases} ad_a & si \quad a\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\\ 0 & si \quad a\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\perp\end{cases} \tag{3.16}$$

et il existe une base $(e_1,f_1,...,e_r,f_r)$ de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et $\lambda_1,...,\lambda_r\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\perp-\{0\}$ tel que pour tout $a\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\perp$,

$$[a,e_i]=\lambda_i(a)f_i \text{ et } [a,f_i]=-\lambda_i(a)e_i.$$

On considère une 2-forme non dégénérée skew-symmetric ω_0 sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\perp$ et ω_1 la 2-forme non dégénérée skew-symmetric sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\perp$ définie par $\omega_1=\sum_{i=1}^r e_i^*\wedge f_i^*$. On peut voir facilement que $\omega=\omega_0\oplus\omega_1$ est une forme de K$\ddot{a}$hler sur $\mathfrak{g}$.

□

Bibliography

[1] M. Boucetta, Compatibilité des structures pseudo-riemannienne et des structures de Poisson, C.R. Acad. Sci. Paris sér. **I 333** (2001) 763-768.

[2] M. Boucetta, Riemann-Poisson manifolds and Kähler-Riemann foliations, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. **I 336** (2003) 423-428.

[3] M. Boucetta, Poisson manifolds with compatible pseudo-metric and pseudo-Riemannian Lie algebras. Differantial Geometry and its applications. Sér. **20** (2004) 279-291.

[4] M. Boucetta, On the Riemann-Lie algebras and Riemann-Poisson Lie groups, Journal of Lie Theory. **15. 1** (2005) 183-195.

[5] C. Deninger, W. Singhof, Real polarizable hodge structures arising from foliations, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002) 377-399.

[6] J.P. Dufour and N. T. Zung, Poisson Structures and Their Normal Forms, Progress in Mathematics, Vol. **242**, Birkhäuser Verlag 2005.

[7] R. L. Fernandes, Connections in Poisson Geometry 1: holonomy and invariants, J. Diff. Geom. **54**, p. 303-366, 2000.

[8] E. Hawkins, The structure of noncommutative deformations, J. Differential Geom. **77** (2007) 385-424.

[9] G. Ovando, Invariant pseudo-kähler metrics in dimension four, Journal of Lie Theory Volume **16** (2006) 371-391.

[10] I. Vaisman, Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds, Progress in Mathematics, vol. **118**, Birkhauser, Berlin, 1994.

[11] A. Lichnerowicz and A. Medina, On Lie groups with left-invariant symplectique or Kählerian structures, Letter in Mathematical Physic 16(1988), 225-235.

[12] Ha, K. Y., Lee, J. B. Left invariant metrics and curvatures on simply connected three dimensional Lie groups. Math.Nachr.282(2009),868-898.

[13] Milnor,J., Curvatures of left invariant metrics on Lie Groups, Advances in Mathematics 21(1976),293-329.

[14] A.Lichnerowicz, Les varietes de Poisson et leurs algebre de Lie associees, J.Diff.Geo. **12**(1977)253-300.

[15] A.Nijenhuis, Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields, J.Indag.Math.**17**(1955)390-403.

[16] A.A. Kirillov, local Lie algebras, Russian Math. Surveys 31 (1976) 55-75.

[17] C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau and P. Vanhaecke, Poisson structures, Grundlehren der mathematishen Wissenchaften, 347, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013.

[18] J.M. Gracia-Bondia, J. C. Varily, H. Figueroa, Elements of noncommutative geometry, Birkhauser Advenced Texts 2001.

[19] I.Vaismann, On the geometric quantization of Poisson manifolds, J. of math. Physics, 32 (1991) 3339-3345.

[20] M. Crainic and I. Marcut, On the existence of symplectic realization, J. Symplectic Geom. Vol. 9, number 4(2011), 435-444.

[21] A. V. Karabegov, Fedesov's formal symplectic groupoid and contravariant connections, Journal of Geometry and Physics, Vol 56, Issue 10 (2006) 1985-2009.

[22] E. Hawkins, Noncommutative rigidity, Commun. Math. Phys. 246(2004) 211-235.

[23] H. Bursztyn, Bimodule deformations, Picard groups and and contravariant connections, http://arxive.org/abs/math/0207255.

[24] M. Ait Haddou, H. Lebzioui, Left-invariant Lorentzian flat metrics on Lie groups, Journal of Lie theory 22(2012), No. 1,269-289.

[25] A. Weinstein, Poisson geometry, Differential Geometry and its Application, 9(1998)213-238 North-Holland.

[26] I. Vaismann, Lectures on the geometry of Poisson manifolds, Progr. in Math. Vol.118, Birkhäsher, Berlin 1994.