Actions propres

Abdelhak Abouqateb

Séminaire de l'équipe GTA

26 Mars 2016

Groupes de transformations classiques

Théorème

Soit (M, ∇) *une variété munie d'une connection. Une transformation* $\varphi \in \mathit{Diff}(M)$ *est dite affine si elle preserve la connection* ∇ *(i.e.* $\varphi(\nabla_Y Z) = \nabla_{\varphi Y} \varphi Z$*). L'ensemble des transfomations affines est un groupe de Lie* $\mathrm{Aff}(M, \nabla)$.

Groupes de transformations classiques

Théorème

Soit (M, ∇) *une variété munie d'une connection. Une transformation* $\varphi \in \mathit{Diff}(M)$ *est dite affine si elle preserve la connection* ∇ *(i.e.* $\varphi(\nabla_Y Z) = \nabla_{\varphi Y} \varphi Z$*). L'ensemble des transfomations affines est un groupe de Lie* $\mathrm{Aff}(M, \nabla)$*.*

$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n, \nabla) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$.

Groupes de transformations classiques

Théorème

Soit (M, ∇) *une variété munie d'une connection. Une transformation* $\varphi \in Diff(M)$ *est dite affine si elle preserve la connection* ∇ *(i.e.* $\varphi(\nabla_Y Z) = \nabla_{\varphi Y}\varphi Z$*). L'ensemble des transfomations affines est un groupe de Lie* $\mathrm{Aff}(M, \nabla)$*.*

$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n, \nabla) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$.

Théorème

Soit (M, g) *une variété Riemannienne. Une transformation* $\varphi \in Diff(M)$ *est dite une isométrie si elle preserve la métrique (i.e.* $g(\varphi_* X_x, \varphi_* Y_x) = (X_x, Y_x), \forall x \in M, \forall X_x, Y_x \in T_x M$ *). L'ensemble des isométries est un groupe de Lie* $\mathrm{Iso}(M, g)$

Groupes de transformations classiques

Théorème

Soit (M, ∇) *une variété munie d'une connection. Une transformation* $\varphi \in Diff(M)$ *est dite affine si elle preserve la connection* ∇ *(i.e.* $\varphi(\nabla_Y Z) = \nabla_{\varphi Y} \varphi Z$*). L'ensemble des transfomations affines est un groupe de Lie* $\mathrm{Aff}(M, \nabla)$.

$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n, \nabla) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$.

Théorème

Soit (M, g) *une variété Riemannienne. Une transformation* $\varphi \in Diff(M)$ *est dite une isométrie si elle preserve la métrique (i.e.* $g(\varphi_* X_x, \varphi_* Y_x) = (X_x, Y_x), \forall x \in M, \forall X_x, Y_x \in T_x M$ *). L'ensemble des isométries est un groupe de Lie* $\mathrm{Iso}(M, g)$

$\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n, g) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$.

Groupes de transformations

Théorème

Soit $G \subset \mathrm{Diff(M)}$ *un sous-groupe. On pose :*

$$\mathcal{S} := \{X \text{ champ de vecteur complet } / \varphi_t^X \in G,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Si l'algèbre de Lie engendré par $\mathcal{S}$ *est de dimension finie, alors* G *est un groupe de Lie d'algèbre de Lie* $\mathcal{S}$.

Groupes de transformations

Théorème

Soit $G \subset \mathrm{Diff}(\mathrm{M})$ *un sous-groupe. On pose :*

$$\mathcal{S} := \{X \text{ champ de vecteur complet } / \varphi_t^X \in G,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Si l'algèbre de Lie engendré par $\mathcal{S}$ *est de dimension finie, alors* G *est un groupe de Lie d'algèbre de Lie* $\mathcal{S}$*.*

Théorème

Un groupe topologique localement euclidien est un groupe de Lie.

Groupes de transformations

Théorème

Soit $G \subset \mathrm{Diff}(\mathrm{M})$ un sous-groupe. On pose :

$$\mathcal{S} := \{X \text{ champ de vecteur complet } / \varphi_t^X \in G,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Si l'algèbre de Lie engendré par $\mathcal{S}$ est de dimension finie, alors G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{S}$.

Théorème

Un groupe topologique localement euclidien est un groupe de Lie.

Théorème

Tout sous-goupe connexe par arcs d'un groupe de Lie est un groupe de Lie.

Actions de groupes

Soit G un groupe et M un ensemble.

Définition

Une action de G sur M est une famille d'applications

$$\varphi_a : M \to M$$

avec $a \in G$ et telle que $\varphi_e = id$ et $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$

Actions de groupes

Soit G un groupe et M un ensemble.

Définition

Une action de G sur M est une famille d'applications

$$\varphi_a : M \to M$$

avec $a \in G$ et telle que $\varphi_e = id$ et $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$

On note $a \cdot m$ au lieu de $\varphi_a(m)$.

Actions de groupes

Soit G un groupe et M un ensemble.

Définition

Une action de G sur M est une famille d'applications

$$\varphi_a : M \to M$$

avec $a \in G$ et telle que $\varphi_e = id$ et $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$

On note $a \cdot m$ au lieu de $\varphi_a(m)$.

▶ Lorsque G est un groupe de Lie et que M est une variété, l'action est dite différentiable si l'application $G \times M \to M, \quad (a, m) \to a \cdot m$ est C^∞.

Actions de groupes

Soit G un groupe et M un ensemble.

Définition

Une action de G sur M est une famille d'applications

$$\varphi_a : M \to M$$

avec $a \in G$ et telle que $\varphi_e = id$ et $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$

On note $a \cdot m$ au lieu de $\varphi_a(m)$.

▶ Lorsque G est un groupe de Lie et que M est une variété, l'action est dite différentiable si l'application
$G \times M \to M, \quad (a, m) \to a \cdot m$ est C^∞.
Ce qui équivaut à la donnée d'un morphisme de groupes

$$G \to \mathrm{Diff}(M)$$

tel que l'application $(a, m) \to a \cdot m$ est C^∞.

Le groupe d'isotropie en m est

$$G_m = \{g \in G / g \cdot m = m\}$$

L'action est dite **effective** si $\bigcap_{m \in M} G_m = e$
(*l'homomorphisme de l'action* $G \to \mathrm{Diff}(M)$ *est injectif*)

Le groupe d'isotropie en m est

$$G_m = \{g \in G / g \cdot m = m\}$$

L'action est dite **effective** si $\bigcap_{m \in M} G_m = e$
(*l'homomorphisme de l'action* $G \to \mathrm{Diff}(M)$ *est injectif*)

Théorème

Soit $G \to \mathrm{Diff}^1(M)$ *une action effective par des* C^1*-difféomorphismes d'un groupe topologique localement compact* G*. Alors* G *est un groupe de Lie et l'action est différentiable.*

L'action est dite :

- **libre** si $G_m = e$ pour tout $m \in M$.

L'action est dite :

- **libre** si $G_m = e$ pour tout $m \in M$.
- **localement libre** si tous les groupes d'isotropie sont discrets.

L'action est dite :

- **libre** si $G_m = e$ pour tout $m \in M$.
- **localement libre** si tous les groupes d'isotropie sont discrets.

Pour $m \in M$, l'application évaluation

$$\varphi(\cdot, m) : g \mapsto g \cdot m$$

induit une bijection de G/G_m sur l'orbite $G \cdot m$. L'**espace des orbites** M/G est muni de la topologie quotient.

L'action est dite :

- **libre** si $G_m = e$ pour tout $m \in M$.
- **localement libre** si tous les groupes d'isotropie sont discrets.

Pour $m \in M$, l'application évaluation

$$\varphi(\cdot, m) : g \mapsto g \cdot m$$

induit une bijection de G/G_m sur l'orbite $G \cdot m$. L'**espace des orbites** M/G est muni de la topologie quotient.

Exemple

Les rotations autour de l'axe des z engendrent une action du cercle S^1 sur la sphère S^2. Les orbites sont des points ou des cercles. L'espace des orbites s'identifie à $[-1, 1]$.

Exemple

Soit α un nombre irrationnel et considérons l'action de $\mathbb{R}$ sur le tore $S^1 \times S^1$ donnée par $t \cdot (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_1}) = (e^{i(t+\theta_1)}, e^{i(\alpha t+\theta_2)})$. Les orbites sont denses et l'espace des orbites n'est pas séparé.

Exemple

Soit α *un nombre irrationnel et considérons l'action de* $\mathbb{R}$ *sur le tore* $S^1 \times S^1$ *donnée par* $t \cdot (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_1}) = (e^{i(t+\theta_1)}, e^{i(\alpha t+\theta_2)})$. *Les orbites sont denses et l'espace des orbites n'est pas séparé.*

Exemple

Soit K *un sous groupe d'un groupe de Lie* H *et* G *un sous groupe de* H. **L'action homogène** *de* G *sur* H/K *est donnée par :* $g \cdot (hK) = ghK$.

Exemple

Soit α un nombre irrationnel et considérons l'action de $\mathbb{R}$ sur le tore $S^1 \times S^1$ donnée par $t \cdot (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_1}) = (e^{i(t+\theta_1)}, e^{i(\alpha t+\theta_2)})$. Les orbites sont denses et l'espace des orbites n'est pas séparé.

Exemple

Soit K un sous groupe d'un groupe de Lie H et G un sous groupe de H. **L'action homogène** *de G sur H/K est donnée par : $g \cdot (hK) = ghK$.*

Exemple (Exercice)

Pour l'action adjointe de $U(n)$ sur $u(n)$, toute orbite rencontre Σ l'ensemble des matrices diagonales $Diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ avec $\alpha_k \in i\mathbb{R}$. Si par exemple m désigne une matrice diagonale où toutes les valeurs propres sont distinctes, alors le groupe d'isotropie G_m s'identifie au tore $(S^1)^n$ et l'orbite $Gm \simeq U(n)/(S^1)^n$.

Actions d'algèbres de Lie

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension finie et soit M une variété différentiable. Une action de $\mathcal{G}$ sur M est la donnée d'un homomorphisme d'algèbres de Lie

$$\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$$

Actions d'algèbres de Lie

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension finie et soit M une variété différentiable. Une action de $\mathcal{G}$ sur M est la donnée d'un homomorphisme d'algèbres de Lie

$$\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$$

Ceci équivaut à la donnée d'une famille finie $\{X_1, \ldots, X_p\} \in \mathcal{V}(M)$ dont les crochets sont données par les constantes de structures C_{ij}^k de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ relativement à une base, soit :

$$[X_i, X_j] = \sum_{1 \leq k \leq p} C_{ij}^k X_k$$

Correspondance "Actions de groupes de Lie - Action d'algèbres de Lie"

Une $\mathcal{G}$-action $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ est dite *complète* si les champs de vecteurs $\tau(h)$ sont complets.

Correspondance "Actions de groupes de Lie - Action d'algèbres de Lie"

Une $\mathcal{G}$-action $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ est dite *complète* si les champs de vecteurs $\tau(h)$ sont complets.

▶ Toute action du groupe de Lie G sur M induit une action complète de son algèbre de Lie

$$\rho' : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$$

Correspondance "Actions de groupes de Lie - Action d'algèbres de Lie"

Une $\mathcal{G}$-action $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ est dite *complète* si les champs de vecteurs $\tau(h)$ sont complets.

▶ Toute action du groupe de Lie G sur M induit une action complète de son algèbre de Lie

$$\rho' : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$$

où le flot du champ de vecteurs $\rho'(h) = X^h$ est donné par

$$\Phi^{X^h}(t, x) = \rho(\exp(-th)) \cdot x$$

Intégrabilité

Définition

Soit $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ *une action d'une algèbre de Lie, on dira qu'elle est intégrable s'ils existent un groupe de Lie* G *d'algèbre de Lie* $\mathcal{G}$ *et une action* $\rho : G \to \mathit{Diff}(M)$ *tel que* $\rho' = \tau$*. L'action* ρ *sera dite une primitive de* τ*.*

Théorème

Soit $\tau : \mathcal{G} \to \chi(M)$ *une action complète. Désignons par :*

- G *le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie* $\mathcal{G}$.
- $T(\mathcal{G})$ *le sous-groupe de* $\mathrm{Diff}(M)$ *engendré par les difféomorphismes* (φ_t^X) *pour* $t \in \mathbb{R}$ *et* $X \in \tau(\mathcal{G})$.

Théorème

Soit $\tau : \mathcal{G} \to \chi(M)$ *une action complète. Désignons par :*

- G *le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie* $\mathcal{G}$.
- $T(\mathcal{G})$ *le sous-groupe de* $\mathrm{Diff}(M)$ *engendré par les difféomorphismes* (φ_t^X) *pour* $t \in \mathbb{R}$ *et* $X \in \tau(\mathcal{G})$.

Alors :

1. *Il existe une action* $\rho : G \to \mathrm{Diff}(M)$ *telle que* $\rho' = \tau$ *et* $\rho(G) = T(\mathcal{G})$.
2. *Le groupe* $T(\mathcal{G})$ *admet une structure de groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie* $\tau(\mathcal{G})$, *opérant effectivement sur* M.

Actions propres

Definition

Une action de G sur M est **propre** si pour tout compact C de M l'ensemble

$$\{g \in G / gC \cap C \neq \emptyset\}$$

est compact.

Actions propres

Definition

Une action de G sur M est **propre** si pour tout compact C de M l'ensemble
$$\{g \in G / gC \cap C \neq \emptyset\}$$
est compact.

<u>Exercice</u>.

- Soit E un espace euclidien. Le groupe $G = O(E) \ltimes E$ des isométries de E opérant sur E par : $(u, b) \cdot x = u(x) + b$. Montrer que cette action est propre.
- Le groupe $\mathrm{Aut}(U, J)$ des transformations bi-holomorphes d'un ouvert borné simplement connexe de $\mathbb{C}$ opère proprement sur U.

Définition équivalente

On rappelle qu'une application $f : M \to N$ est dite propre si l'image réciproque d'un compact est un compact.
Exercice.

Définition équivalente

On rappelle qu'une application $f : M \to N$ est dite propre si l'image réciproque d'un compact est un compact.
Exercice. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. L'action de G sur M est propre.
2. L'application $G \times M \ni (g, x) \longmapsto (g \cdot x, x) \in M \times M$, est propre

Définition équivalente

On rappelle qu'une application $f : M \to N$ est dite propre si l'image réciproque d'un compact est un compact.
Exercice. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. L'action de G sur M est propre.
2. L'application $G \times M \ni (g, x) \longmapsto (g \cdot x, x) \in M \times M$, est propre
3. Pour tout compact C de M, l'application $G \times C \ni (g, x) \longmapsto g \cdot x \in M$, est propre.

Remarques

- Si G est compact, toute G-action est propre.

Remarques

- Si G est compact, toute G-action est propre.
- Si M est compact et $G \to \mathrm{Diff}(M)$ une action propre, alors G est compact.

Remarques

- Si G est compact, toute G-action est propre.
- Si M est compact et $G \to \mathrm{Diff}(M)$ une action propre, alors G est compact.
- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une action soit propre est la suivante :
  Pour toute suite $(g_n, x_n) \in G \times M$, telle que $g_n \cdot x_n \to y$ et $x_n \to x$, la suite $(g_n)_n$ admet une sous-suite convergente.

Proposition

Pour une action propre, les groupes d'isotropies G_x sont compacts, les orbites $G.x$ sont des fermés de M et l'espace des orbites M/G est séparé.

Proposition

Pour une action propre, les groupes d'isotropies G_x sont compacts, les orbites $G.x$ sont des fermés de M et l'espace des orbites M/G est séparé.

En effet

Proposition

Pour une action propre, les groupes d'isotropies G_x sont compacts, les orbites $G.x$ sont des fermés de M et l'espace des orbites M/G est séparé.

En effet Supposons que x et y sont deux points de M tels que $\overline{x}$ et $\overline{y}$ ne peuvent pas être séparés dans M/G.

Proposition

Pour une action propre, les groupes d'isotropies G_x sont compacts, les orbites $G.x$ sont des fermés de M et l'espace des orbites M/G est séparé.

En effet Supposons que x et y sont deux points de M tels que $\overline{x}$ et $\overline{y}$ ne peuvent pas être séparés dans M/G. Soit d une distance sur M. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les ouverts $G.B(x, \frac{1}{n})$ et $G.B(y, \frac{1}{n})$ se rencontrent.

Proposition

Pour une action propre, les groupes d'isotropies G_x sont compacts, les orbites $G.x$ sont des fermés de M et l'espace des orbites M/G est séparé.

En effet Supposons que x et y sont deux points de M tels que $\overline{x}$ et $\overline{y}$ ne peuvent pas être séparés dans M/G. Soit d une distance sur M. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les ouverts $G.B(x, \frac{1}{n})$ et $G.B(y, \frac{1}{n})$ se rencontrent. D'où l'existence de trois suites $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$, $y_n \in B(y, \frac{1}{n})$ et $g_n \in G$ telles que $y_n = g_n \cdot x_n$.

Proposition

Pour une action propre, les groupes d'isotropies G_x sont compacts, les orbites $G.x$ sont des fermés de M et l'espace des orbites M/G est séparé.

En effet Supposons que x et y sont deux points de M tels que $\overline{x}$ et $\overline{y}$ ne peuvent pas être séparés dans M/G. Soit d une distance sur M. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les ouverts $G.B(x, \frac{1}{n})$ et $G.B(y, \frac{1}{n})$ se rencontrent. D'où l'existence de trois suites $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$, $y_n \in B(y, \frac{1}{n})$ et $g_n \in G$ telles que $y_n = g_n \cdot x_n$. La suite $g_n \cdot x_n = y_n$ converge alors vers y et x_n converge vers x,

Proposition

Pour une action propre, les groupes d'isotropies G_x sont compacts, les orbites $G.x$ sont des fermés de M et l'espace des orbites M/G est séparé.

En effet Supposons que x et y sont deux points de M tels que $\overline{x}$ et $\overline{y}$ ne peuvent pas être séparés dans M/G. Soit d une distance sur M. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les ouverts $G.B(x, \frac{1}{n})$ et $G.B(y, \frac{1}{n})$ se rencontrent. D'où l'existence de trois suites $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$, $y_n \in B(y, \frac{1}{n})$ et $g_n \in G$ telles que $y_n = g_n \cdot x_n$. La suite $g_n \cdot x_n = y_n$ converge alors vers y et x_n converge vers x, la suite g_n admet alors une sous-suite $g_{\varphi(n)}$ convergente vers $g \in G$.

Proposition

Pour une action propre, les groupes d'isotropies G_x sont compacts, les orbites $G.x$ sont des fermés de M et l'espace des orbites M/G est séparé.

En effet Supposons que x et y sont deux points de M tels que $\overline{x}$ et $\overline{y}$ ne peuvent pas être séparés dans M/G. Soit d une distance sur M. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les ouverts $G.B(x, \frac{1}{n})$ et $G.B(y, \frac{1}{n})$ se rencontrent. D'où l'existence de trois suites $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$, $y_n \in B(y, \frac{1}{n})$ et $g_n \in G$ telles que $y_n = g_n \cdot x_n$. La suite $g_n \cdot x_n = y_n$ converge alors vers y et x_n converge vers x, la suite g_n admet alors une sous-suite $g_{\varphi(n)}$ convergente vers $g \in G$. Il en résulte que $y = g \cdot x$ et donc $\overline{x} = \overline{y}$.

Exemples

- Soient G un sous-groupe fermé de H et K est un sous groupe compact de H, alors l'action homogène naturelle de G sur H/K est propre.

Exemples

- Soient G un sous-groupe fermé de H et K est un sous groupe compact de H, alors l'action homogène naturelle de G sur H/K est propre.
- Soit $H \times M \to M$ une action transitive d'un groupe de Lie H sur une variété M, tel que le groupe d'isotropie en un point soit compact.

Exemples

- Soient G un sous-groupe fermé de H et K est un sous groupe compact de H, alors l'action homogène naturelle de G sur H/K est propre.
- Soit $H \times M \to M$ une action transitive d'un groupe de Lie H sur une variété M, tel que le groupe d'isotropie en un point soit compact. Alors l'action induite de H sur M est propre.

Exemples

- Soient G un sous-groupe fermé de H et K est un sous groupe compact de H, alors l'action homogène naturelle de G sur H/K est propre.
- Soit $H \times M \to M$ une action transitive d'un groupe de Lie H sur une variété M, tel que le groupe d'isotropie en un point soit compact. Alors l'action induite de H sur M est propre. Par exemple l'action

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ est transitive et le groupe d'isotropie en i est $SO(2)$ donc cet action est propre.

- Soit G est un groupe de Lie opérant effectivement par isométries sur une variété riemannienne M. S'il existe un point x dans V tel que le groupe d'isotropie G_x soit compact et que l'orbite Gx soit fermé dans V, alors l'action de G sur M est propre (Kulkarni).

- Soit G est un groupe de Lie opérant effectivement par isométries sur une variété riemannienne M. S'il existe un point x dans V tel que le groupe d'isotropie G_x soit compact et que l'orbite Gx soit fermé dans V, alors l'action de G sur M est propre (Kulkarni).
- Le sous-groupe discret Γ de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et D le sous-groupe fermé des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ avec $a > 0$. Montrer que l'action homogène de Γ sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/D$ est libre, les orbites sont fermées et l'action n'est pas propre [Exercice].

Les formes de Clifford-Klein

Ce sont les triplets $G \subset H \supset \Gamma$ où H est un groupe de Lie, G un sous-groupe de Lie fermé connexe de H et Γ un sous-groupe discret de H, tels que l'action de G sur H/Γ est propre.

Les formes de Clifford-Klein

Ce sont les triplets $G \subset H \supset \Gamma$ où H est un groupe de Lie, G un sous-groupe de Lie fermé connexe de H et Γ un sous-groupe discret de H, tels que l'action de G sur H/Γ est propre. Il est facile de vérifier que l'action de Γ sur H/G est proprement discontinue si et seulement si l'action de G sur H/Γ est propre.

Les formes de Clifford-Klein

Ce sont les triplets $G \subset H \supset \Gamma$ où H est un groupe de Lie, G un sous-groupe de Lie fermé connexe de H et Γ un sous-groupe discret de H, tels que l'action de G sur H/Γ est propre. Il est facile de vérifier que l'action de Γ sur H/G est proprement discontinue si et seulement si l'action de G sur H/Γ est propre.

<u>Exemples géométriques</u> : Soit M une variété et $\mathcal{T}$ une structure géométrique (métrique riemannienne, structure complexe…). Il en résulte une structure encore noté $\mathcal{T}$ sur $\widetilde{M}$. On pose

$$H = \mathrm{Aut}(\widetilde{M}, \mathcal{T}) = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(\widetilde{M}) / \varphi \text{ preserve } \mathcal{T}\}$$

Les formes de Clifford-Klein

Ce sont les triplets $G \subset H \supset \Gamma$ où H est un groupe de Lie, G un sous-groupe de Lie fermé connexe de H et Γ un sous-groupe discret de H, tels que l'action de G sur H/Γ est propre. Il est facile de vérifier que l'action de Γ sur H/G est proprement discontinue si et seulement si l'action de G sur H/Γ est propre.

Exemples géométriques : Soit M une variété et $\mathcal{T}$ une structure géométrique (métrique riemannienne, structure complexe...). Il en résulte une structure encore noté $\mathcal{T}$ sur $\widetilde{M}$. On pose

$$H = \mathrm{Aut}(\widetilde{M}, \mathcal{T}) = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(\widetilde{M}) / \varphi \text{ preserve } \mathcal{T}\}$$

Lorsque H opère transitivement sur $\widetilde{M}$,

Les formes de Clifford-Klein

Ce sont les triplets $G \subset H \supset \Gamma$ où H est un groupe de Lie, G un sous-groupe de Lie fermé connexe de H et Γ un sous-groupe discret de H, tels que l'action de G sur H/Γ est propre. Il est facile de vérifier que l'action de Γ sur H/G est proprement discontinue si et seulement si l'action de G sur H/Γ est propre.

Exemples géométriques : Soit M une variété et $\mathcal{T}$ une structure géométrique (métrique riemannienne, structure complexe…). Il en résulte une structure encore noté $\mathcal{T}$ sur $\widetilde{M}$. On pose

$$H = \mathrm{Aut}(\widetilde{M}, \mathcal{T}) = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(\widetilde{M})/\varphi \text{ preserve } \mathcal{T}\}$$

Lorsque H opère transitivement sur $\widetilde{M}$, on obtient $\widetilde{M} \simeq H/G$ (où G est le groupe d'istropie en un point de $\widetilde{M}$) et $M \simeq \Gamma \setminus H/G$ où Γ sous-groupe discret de H qui s'identifie au groupe fondamental de M.

Surfaces de Riemann

Soit Σ une surface de Riemann (J sa structure complexe). $\widetilde{\Sigma}$ son revêtement universel : c'est une surface de Riemann simplement connexe.

Surfaces de Riemann

Soit Σ une surface de Riemann (J sa structure complexe). $\widetilde{\Sigma}$ son revêtement universel : c'est une surface de Riemann simplement connexe.

Théorème (D'uniformisation de Riemann)

Toute surface de Riemann simplement connexe est holomorphiquement isomorphe à l'une des trois surfaces :

$$\mathbb{C}P^1, \quad \mathbb{C} \ \textit{ou} \ \mathbb{H} \cong \mathbb{D}$$

Surfaces de Riemann

Soit Σ une surface de Riemann (J sa structure complexe). $\widetilde{\Sigma}$ son revêtement universel : c'est une surface de Riemann simplement connexe.

Théorème (D'uniformisation de Riemann)

Toute surface de Riemann simplement connexe est holomorphiquement isomorphe à l'une des trois surfaces :

$$\mathbb{C}P^1, \quad \mathbb{C} \ \textit{ou} \ \mathbb{H} \cong \mathbb{D}$$

Dans les trois cas, l'action du groupe des transformations holomorphes est transitive. Il en résulte que toute surface de Riemann est de la forme $\Gamma \setminus H/G$.

1. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}, J) \simeq \mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{C}$ opère transitivement sur $\mathbb{C}$: $(a, b) \cdot z = az + b$. On a : $\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{C}/\mathbb{C}^*$.

1. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}, J) \simeq \mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{C}$ opère transitivement sur $\mathbb{C}$: $(a, b) \cdot z = az + b$. On a : $\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{C}/\mathbb{C}^*$.
2. Le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ opère transitivement par bi-holomorphismes sur $\mathbb{C}P^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$: $[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}] \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$. On a : $\mathbb{C}P^1 \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})/B$.

1. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}, J) \simeq \mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{C}$ opère transitivement sur $\mathbb{C}$: $(a, b) \cdot z = az + b$. On a : $\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{C}/\mathbb{C}^*$.
2. Le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ opère transitivement par bi-holomorphismes sur $\mathbb{C}P^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$: $[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}] \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$. On a : $\mathbb{C}P^1 \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})/B$.
3. $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}, J) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ opère transitivement sur $\mathbb{H} \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/SO(2)$.

1. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}, J) \simeq \mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{C}$ opère transitivement sur $\mathbb{C}$: $(a,b) \cdot z = az + b$. On a : $\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{C}/\mathbb{C}^*$.
2. Le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ opère transitivement par bi-holomorphismes sur $\mathbb{C}P^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$: $[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}] \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$. On a : $\mathbb{C}P^1 \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})/B$.
3. $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}, J) \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ opère transitivement sur $\mathbb{H} \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/SO(2)$.

▶ Lorsque Σ est une surface de Riemann **compacte et connexe**. On trouve $\Sigma \simeq \mathbb{C}P^1$, ou $\Sigma \simeq \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{C}$ ou $\Sigma \simeq \Gamma_g \backslash \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/SO(2)$.

Variétés affines complètes

M est dite variété affine complète lorsqu'elle est munie d'une connection ∇ sans courbure ni torsion.

Variétés affines complètes

M est dite variété affine complète lorsqu'elle est munie d'une connection ∇ sans courbure ni torsion. Pour une telle variété $\widetilde{M} \simeq \mathbb{R}^n$.

Variétés affines complètes

M est dite variété affine complète lorsqu'elle est munie d'une connection ∇ sans courbure ni torsion. Pour une telle variété $\widetilde{M} \simeq \mathbb{R}^n$. Et puisque
$\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n, \nabla) \simeq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n / \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$,

Variétés affines complètes

M est dite variété affine complète lorsqu'elle est munie d'une connection ∇ sans courbure ni torsion. Pour une telle variété $\widetilde{M} \simeq \mathbb{R}^n$. Et puisque
$\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n, \nabla) \simeq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n / \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, on obtient

$$M \simeq \Gamma \backslash \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n / \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

Ensemble de points fixes

Soit M une G-variété propre. L'existence d'un point fixe m par l'action impose la compacité du groupe. De plus, les applications linéaires tangentes des difféomorphismes associés à g induisent une représentation $G \to \mathrm{GL}(T_m M)$.

Ensemble de points fixes

Soit M une G-variété propre. L'existence d'un point fixe m par l'action impose la compacité du groupe. De plus, les applications linéaires tangentes des difféomorphismes associés à g induisent une représentation $G \to \mathrm{GL}(T_m M)$.

Théorème (Linéarisation locale)

Supposons que G est compact et soit $m \in M^G$ un point fixe. Alors, il existe un difféormorphisme G-équivariant d'un voisinage de 0 dans $T_m M$ sur un voisinage ouvert m dans M.

Ensemble de points fixes

Soit M une G-variété propre. L'existence d'un point fixe m par l'action impose la compacité du groupe. De plus, les applications linéaires tangentes des difféomorphismes associés à g induisent une représentation $G \to \mathrm{GL}(T_m M)$.

Théorème (Linéarisation locale)

Supposons que G est compact et soit $m \in M^G$ un point fixe. Alors, il existe un difféormorphisme G-équivariant d'un voisinage de 0 dans $T_m M$ sur un voisinage ouvert m dans M.

Ceci découle du fait que si l'on muni M d'une métrique riemannienne G-invariante, alors l'application $\exp_m : T_m M \to M$ est G-équivante.

Corollaire

Soit M une G-variété propre et $H \subset G$ un sous-groupe de G. Alors les composantes connexes de l'ensemble des points fixes par H

$$M^H = \{m \in M / H \subset G_m\}$$

sont des sous-variété fermée de M de codimension paire.

Corollaire

Soit M une G-variété propre et $H \subset G$ un sous-groupe de G. Alors les composantes connexes de l'ensemble des points fixes par H

$$M^H = \{m \in M / H \subset G_m\}$$

sont des sous-variété fermée de M de codimension paire.

L'idée de démonstration de ce corollaire repose sur le fait que $M^H = M^{\overline{H}}$ où $\overline{H}$ est l'adhérence de H dans G (par continuité de l'application $(h, m) \mapsto h \cdot m$) et que l'inclusion $\overline{H} \subset G_m$ implique que $\overline{H}$ est compact.

La représentation d'isotropie

Soit M une G-variété propre, $m \in M$ et $K = G_m$.

La représentation d'isotropie

Soit M une G-variété propre, $m \in M$ et $K = G_m$. Pour tout $a \in K$, la différentielle de $a : M \to M$ est un isomorphisme de TmM.

La représentation d'isotropie

Soit M une G-variété propre, $m \in M$ et $K = G_m$. Pour tout $a \in K$, la différentielle de $a : M \to M$ est un isomorphisme de TmM. Nous obtenons une représentation linéaire

$$K \to \mathrm{GL}(T_m M)$$

La représentation d'isotropie

Soit M une G-variété propre, $m \in M$ et $K = G_m$. Pour tout $a \in K$, la différentielle de $a : M \to M$ est un isomorphisme de TmM. Nous obtenons une représentation linéaire

$$K \to \mathrm{GL}(T_m M)$$

Le sous-espace $T_m(Gm)$ étant K-stable, on peut alors choisir un produit scalaire K-invariant sur $T_m M$ et considérer la décomposition orthogonale

$$T_m M = T_m(Gm) \oplus (T_m(Gm))^{\perp}$$

La représentation d'isotropie

Soit M une G-variété propre, $m \in M$ et $K = G_m$. Pour tout $a \in K$, la différentielle de $a : M \to M$ est un isomorphisme de TmM. Nous obtenons une représentation linéaire

$$K \to \mathrm{GL}(T_m M)$$

Le sous-espace $T_m(Gm)$ étant K-stable, on peut alors choisir un produit scalaire K-invariant sur $T_m M$ et considérer la décomposition orthogonale

$$T_m M = T_m(Gm) \oplus (T_m(Gm))^{\perp}$$

On note $V = (T_m(Gm))^{\perp}$ et $K \to O(V)$ la représentation obtenue.

Fibré associé

La projection $G \to G/K$ est un K-fibré principal.

Fibré associé

La projection $G \to G/K$ est un K-fibré principal. À toute représentation $K \to GL(V)$,

Fibré associé

La projection $G \to G/K$ est un K-fibré principal. À toute représentation $K \to GL(V)$, on peut fait correspondre le fibré vectoriel

$$G \times_K V \to G/K$$

Fibré associé

La projection $G \to G/K$ est un K-fibré principal. À toute représentation $K \to GL(V)$, on peut fait correspondre le fibré vectoriel

$$G \times_K V \to G/K$$

C'est un G-fibré vectoriel : l'action de G sur l'espace total est donnée par $g.[a, v] = [ga, v]$.

Local slice theorem

Théorème (Local slice theorem)

Soit M une G-variété propre, $m \in M$ et $K = G_m$. Alors il existe un difféomorphisme G-équivariant de $G \times_K V$ sur un voisinage ouvert G-stable de l'orbite Gm dans M, dont la restriction à la section nulle est l'identification canonique de G/K sur Gm.

Conséquences

Corollaire

Si l'action de G sur M est propre et libre, alors M/G est une variété et la projection $M \to M/G$ est un G-fibré principal.

Conséquences

Corollaire

Si l'action de G sur M est propre et libre, alors M/G est une variété et la projection $M \to M/G$ est un G-fibré principal.

- l'action à droite de G sur M est donnée par $m \cdot g = g^{-1} \cdot m$.

Conséquences

Corollaire

Si l'action de G sur M est propre et libre, alors M/G est une variété et la projection $M \to M/G$ est un G-fibré principal.

- l'action à droite de G sur M est donnée par $m \cdot g = g^{-1} \cdot m$.

Corollaire

Si l'action de G sur M est propre et localement libre, alors M/G est une pseudo-variété (orbifold) .

Conséquences

Corollaire

Si l'action de G sur M est propre et libre, alors M/G est une variété et la projection $M \to M/G$ est un G-fibré principal.

• l'action à droite de G sur M est donnée par $m \cdot g = g^{-1} \cdot m$.

Corollaire

Si l'action de G sur M est propre et localement libre, alors M/G est une pseudo-variété (orbifold) .

• Une carte de M/G au point $\overline{m}$ est donnée par un homéomorphisme du quotient V/G_m de l'espace vectoriel V par un sous-groupe fini de $O(V)$ sur un U/G avec U voisinage ouvert G-stable de l'orbite.

Global slice theorem

Théorème (Global slice theorem)

Soit M une G-variété propre avec G un groupe de Lie connexe et K un sous-groupe compact maximal. Alors il existe un difféomorphisme G-équivariant de $G \times_K S$ sur M.

Global slice theorem

Théorème (Global slice theorem)

Soit M une G-variété propre avec G un groupe de Lie connexe et K un sous-groupe compact maximal. Alors il existe un difféomorphisme G-équivariant de $G \times_K S$ sur M.

- On peut par exemple illustrer le théorème de tranche (global) pour montrer que sur toute G-variété propre il existe une métrique Riemannienne sur M qui soit G-invariante.

Global slice theorem

Théorème (Global slice theorem)

Soit M une G-variété propre avec G un groupe de Lie connexe et K un sous-groupe compact maximal. Alors il existe un difféomorphisme G-équivariant de $G \times_K S$ sur M.

• On peut par exemple illustrer le théorème de tranche (global) pour montrer que sur toute G-variété propre il existe une métrique Riemannienne sur M qui soit G-invariante. En effet nous commençons par mettre une métrique Riemannienne K-invariante sur le K-fibré $TM_{|_S} \to S$ (ce qui est possible à cause de la compacité du groupe K),

Global slice theorem

Théorème (Global slice theorem)

Soit M une G-variété propre avec G un groupe de Lie connexe et K un sous-groupe compact maximal. Alors il existe un difféomorphisme G-équivariant de $G \times_K S$ sur M.

• On peut par exemple illustrer le théorème de tranche (global) pour montrer que sur toute G-variété propre il existe une métrique Riemannienne sur M qui soit G-invariante. En effet nous commençons par mettre une métrique Riemannienne K-invariante sur le K-fibré $TM_{|_S} \to S$ (ce qui est possible à cause de la compacité du groupe K), puis nous utilisons l'identification naturelle

$$TM \cong G \times_K TM_{|_S}$$

cette identification est dûe au fait que $M \cong G \times_K S$.

Types d'orbite

Soit M une G-variété propre. Pour m et m' dans la même orbite, les groupes d'isotropie sont conjugués ($G_{a\cdot m} = aG_m a^{-1}$).

Types d'orbite

Soit M une G-variété propre. Pour m et m' dans la même orbite, les groupes d'isotropie sont conjugués ($G_{a\cdot m} = aG_m a^{-1}$). Pour $H \subset G$ un sous-groupe de G, on note (H) la classe de conjugaison de H (le conjugaison définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-groupes de G).

Types d'orbite

Soit M une G-variété propre. Pour m et m' dans la même orbite, les groupes d'isotropie sont conjugués ($G_{a\cdot m} = aG_m a^{-1}$). Pour $H \subset G$ un sous-groupe de G, on note (H) la classe de conjugaison de H (le conjugaison définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-groupes de G). Une relation d'ordre partielle est définie sur l'ensemble de ces classes d'équivalence en posant :

$$(H) < (H') \Leftrightarrow H \text{ est conjugué à un sous groupe de } H'$$

Types d'orbite

Soit M une G-variété propre. Pour m et m' dans la même orbite, les groupes d'isotropie sont conjugués ($G_{a \cdot m} = aG_m a^{-1}$). Pour $H \subset G$ un sous-groupe de G, on note (H) la classe de conjugaison de H (le conjugaison définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-groupes de G). Une relation d'ordre partielle est définie sur l'ensemble de ces classes d'équivalence en posant :

$$(H) < (H') \Leftrightarrow H \text{ est conjugué à un sous groupe de } H'$$

Pour tout sous-groupe de $H \subset G$, on pose :

$$M_{(H)} = \{m \in M/(G_m) = (H)\} \text{ et } M_H = \{m \in M/G_m = H\}$$

Types d'orbite

Soit M une G-variété propre. Pour m et m' dans la même orbite, les groupes d'isotropie sont conjugués ($G_{a\cdot m} = aG_m a^{-1}$). Pour $H \subset G$ un sous-groupe de G, on note (H) la classe de conjugaison de H (le conjugaison définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-groupes de G). Une relation d'ordre partielle est définie sur l'ensemble de ces classes d'équivalence en posant :

$$(H) < (H') \Leftrightarrow H \text{ est conjugué à un sous groupe de } H'$$

Pour tout sous-groupe de $H \subset G$, on pose :

$$M_{(H)} = \{m \in M/(G_m) = (H)\} \text{ et } M_H = \{m \in M/G_m = H\}$$

$M_{(H)}$ est G-stable, c'est le saturé de M_H.

Stratification par le type d'orbite

Théorème (Stratification par le type d'orbite)

Les composantes connexes des $M_{(H)}$ pour H sous-groupe de G constitue une partition

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i$$

Stratification par le type d'orbite

Théorème (Stratification par le type d'orbite)

Les composantes connexes des $M_{(H)}$ pour H sous-groupe de G constitue une partition

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i$$

avec les propriétés :

1. *Chaque M_i est une sous-variété plongée G-stable de M et la projection $M_i \to M_i/G$ est une submersion.*

Stratification par le type d'orbite

Théorème (Stratification par le type d'orbite)

Les composantes connexes des $M_{(H)}$ pour H sous-groupe de G constitue une partition

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i$$

avec les propriétés :

1. *Chaque M_i est une sous-variété plongée G-stable de M et la projection $M_i \to M_i/G$ est une submersion.*
2. *La partition est localement finie (un compact de M ne rencontrent qu'un nombre fini de M_i).*

Stratification par le type d'orbite

Théorème (Stratification par le type d'orbite)

Les composantes connexes des $M_{(H)}$ pour H sous-groupe de G constitue une partition

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i$$

avec les propriétés :

1. *Chaque M_i est une sous-variété plongée G-stable de M et la projection $M_i \to M_i/G$ est une submersion.*
2. *La partition est localement finie (un compact de M ne rencontrent qu'un nombre fini de M_i).*
3. *Pour tous $i, j \in I$, $M_i \cap \overline{M_j} \neq \emptyset \Rightarrow M_i \subset \overline{M_j}$.*

Le type d'orbite principale

Théorème (Le type d'orbite principale)

Supposons que M est connexe. Alors

1. *Il existe une unique classe de conjugaison (K_{pr}) avec la propriété $(K_{pr}) < (G_m)$ pour tout $m \in M$.*

Le type d'orbite principale

Théorème (Le type d'orbite principale)

Supposons que M est connexe. Alors

1. *Il existe une unique classe de conjugaison (K_{pr}) avec la propriété $(K_{pr}) < (G_m)$ pour tout $m \in M$.*
2. *$M_{K_{pr}}$ est un ouvert dense dans M.*

Le type d'orbite principale

Théorème (Le type d'orbite principale)

Supposons que M est connexe. Alors

1. *Il existe une unique classe de conjugaison (K_{pr}) avec la propriété $(K_{pr}) < (G_m)$ pour tout $m \in M$.*
2. *$M_{K_{pr}}$ est un ouvert dense dans M.*

Corollaire

Supposons que M est connexe, G est commutatif et que l'action est effective. Alors l'ensemble des points où l'action est libre est un ouvert dense dans M

Le type d'orbite principale

Théorème (Le type d'orbite principale)

Supposons que M est connexe. Alors

1. *Il existe une unique classe de conjugaison (K_{pr}) avec la propriété $(K_{pr}) < (G_m)$ pour tout $m \in M$.*
2. *$M_{K_{pr}}$ est un ouvert dense dans M.*

Corollaire

Supposons que M est connexe, G est commutatif et que l'action est effective. Alors l'ensemble des points où l'action est libre est un ouvert dense dans M

En effet, puisque G est commutatif, $M_{(K_{pr})} = M_{K_{pr}}$.

Le type d'orbite principale

Théorème (Le type d'orbite principale)

Supposons que M est connexe. Alors

1. *Il existe une unique classe de conjugaison (K_{pr}) avec la propriété $(K_{pr}) < (G_m)$ pour tout $m \in M$.*
2. *$M_{K_{pr}}$ est un ouvert dense dans M.*

Corollaire

Supposons que M est connexe, G est commutatif et que l'action est effective. Alors l'ensemble des points où l'action est libre est un ouvert dense dans M

En effet, puisque G est commutatif, $M_{(K_{pr})} = M_{K_{pr}}$. Donc K_{pr} opère trivialement sur $M_{(K_{pr})}$.

Le type d'orbite principale

Théorème (Le type d'orbite principale)

Supposons que M est connexe. Alors

1. *Il existe une unique classe de conjugaison (K_{pr}) avec la propriété $(K_{pr}) < (G_m)$ pour tout $m \in M$.*
2. *$M_{K_{pr}}$ est un ouvert dense dans M.*

Corollaire

Supposons que M est connexe, G est commutatif et que l'action est effective. Alors l'ensemble des points où l'action est libre est un ouvert dense dans M

En effet, puisque G est commutatif, $M_{(K_{pr})} = M_{K_{pr}}$. Donc K_{pr} opère trivialement sur $M_{(K_{pr})}$. Puisque $M_{(K_{pr})}$ est dense, l'action de K_{pr} sur M est aussi triviale.

Le type d'orbite principale

Théorème (Le type d'orbite principale)

Supposons que M est connexe. Alors

1. *Il existe une unique classe de conjugaison (K_{pr}) avec la propriété $(K_{pr}) < (G_m)$ pour tout $m \in M$.*
2. *$M_{K_{pr}}$ est un ouvert dense dans M.*

Corollaire

Supposons que M est connexe, G est commutatif et que l'action est effective. Alors l'ensemble des points où l'action est libre est un ouvert dense dans M

En effet, puisque G est commutatif, $M_{(K_{pr})} = M_{K_{pr}}$. Donc K_{pr} opère trivialement sur $M_{(K_{pr})}$. Puisque $M_{(K_{pr})}$ est dense, l'action de K_{pr} sur M est aussi triviale. Puisque l'action est effective, $K_{pr} = \{e\}$.

Sections G-invariantes

Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un G-fibré vectoriel. Une action induite de G sur l'espace des sections $C^\infty(E)$ est définie par : pour $g \in G$ et $\sigma \in C^\infty(E)$, $g \cdot \sigma$ est la section donnée par :

$$(g \cdot \sigma)(x) = g\sigma(g^{-1} \cdot x)$$

Si X_h désigne un champ fondamental sur M associé à un vecteur $h \in \mathcal{G}$, et $\sigma \in C^\infty(E)$, on pose :

$$(L_{X_h}\sigma)(x) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,((\exp th) \cdot \sigma)(x)$$

Définition

σ est dite G-invariante si pour tout $g \in G$, $g \cdot \sigma = \sigma$

Ce qui est équivalent, si le le groupe G est connexe, à $L_{X_h}\sigma = 0$ pour tout $h \in \mathcal{G}$.

Moyennisation

Désormais ($E \xrightarrow{\pi} M$) sera un G-fibré vectoriel **propre** et le groupe G est connexe et unimodulaire. Pour tout $\sigma \in C_c^\infty(E)$ et pour tout $x \in V$, l'ensemble $\{g \in G \;/\; g^{-1}x \in supp(\sigma)\}$ est un compact de G, à l'extérieur duquel l'application $g \longmapsto (g\sigma)(x)$ est nulle. D'où l'existence de l'intégrale $\int_G (g \cdot \sigma)(x) dg$ pour une mesure de Haar dg invariante à droite sur G. On obtient ainsi une application linéaire

$$\begin{array}{cccc} m: & C_c^\infty(E) & \longrightarrow & C^\infty(E) \\ & \sigma & \longmapsto & m\sigma \end{array}$$

donnée par :

$$(m\sigma)(x) = \int_G (g \cdot \sigma)(x) dg$$

On désignera par $\overline{C}_G^{\infty}(E)$ l'espace des sections G-invariantes à support G-compact. soit compact

Théorème

1. *$Image(m) = \overline{C}_G^{\infty}(E)$*
2. *Le noyau $Ker(m)$ est le sous-espace de $C_c^{\infty}(E)$ engendré par les éléments $L_X\tau$ où X est un champ fondamental et $\tau \in C_c^{\infty}(E)$.*

Théorème

Soit $E \xrightarrow{\pi} V$ un G- fibré vectoriel propre avec G connexe et unimodulaire.
Alors l'espace vectoriel topologique $(C_c^{\infty}(E))'_G$ des formes linéaires continues G-invariantes sur $C_c^{\infty}(E)$ est isomorphe au dual de $\overline{C}_G^{\infty}(E)$.

Corollaire

Soient G un groupe de Lie compact connexe et $E \xrightarrow{\pi} M$ un G-fibré vectoriel. Désignons par F l'un des espaces $C_c^\infty(E)$ ou $C^\infty(E)$. Alors on la décomposition topologique

$$F = F_G \oplus L_G F$$

($L_G F$ étant le sous-espace de F engendré par les éléments $L_X \tau$ pour X champ fondamental et $\tau \in F$, F_G est le sous-espace de F des éléments G-invariants).

Actions propres d'algèbres de Lie

Definition

Une action d'algèbre de Lie $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{V}(M)$ sera dite *propre* si elle admet une primitive propre i.e. si elle est intégrable en une action propre de groupe de Lie. On dira alors que M est une $\mathcal{G}$-variété propre.

Exemple

Pour toute variété riemannienne (M, g), l'action naturelle de l'algèbre de Lie des champs de Killing $Kill_g(M)$ sur M est propre.

Exemple

Désignons par $S(n)$ *l'espace des matrices de* $M_n(\mathbb{R})$ *qui sont symétriques. L'action de* $GL^+(n,\mathbb{R})$ *sur* $S(n)$ *donnée par :* $g.B := gBg^\top$*, est non propre. Par contre, si on se limite à* $M := S^+(n)$ *l'espace des matrices symétriques définies positives (qui est un ouvert de* $S(n)$*), l'action est propre et transitive (le groupe d'isotropie en* I_n *est* $SO(n)$*). L'algèbre de Lie de* $GL^+(n,\mathbb{R})$ *étant l'algèbre de Lie usuelle* $M_n(\mathbb{R})$*. L'action infinitésimale* $\tau : M_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{V}(M)$ *est donnée par :* $H \in M(n,\mathbb{R}) \mapsto \tau(H)$ *la restriction à* $S^+(n)$ *du champ de vecteurs* X^H *défini sur* $S(n)$ *par l'endomorphisme :* $X^H(B) := -HB - BH^\top$*. L'action* τ *est une action propre de l'algèbre de Lie* $M_n(\mathbb{R})$ *sur* $S^+(n)$*.*