# Cohomologie de de Rham

Abdelhak Abouqateb

*Colloquium de l'université Cadi Ayyad*

8 Mars 2013

# Topologie

Elle s'intéresse à l'étude des formes globales d'*objets* :

# Topologie

Elle s'intéresse à l'étude des formes globales d'*objets* :
**Classifications** par *transformations bicontinues* (*Homéomorphismes*).

# Topologie

Elle s'intéresse à l'étude des formes globales d'*objets* :
**Classifications** par *transformations bicontinues* (*Homéomorphismes*).

Par exemple, d'un point de vue topologique :

# Topologie

Elle s'intéresse à l'étude des formes globales d'*objets* :
**Classifications** par *transformations bicontinues* (*Homéomorphismes*).

Par exemple, d'un point de vue topologique :
- Une courbe fermée simple s'identifie à un cercle.

# Topologie

Elle s'intéresse à l'étude des formes globales d'*objets* :
**Classifications** par *transformations bicontinues* (*Homéomorphismes*).

Par exemple, d'un point de vue topologique :

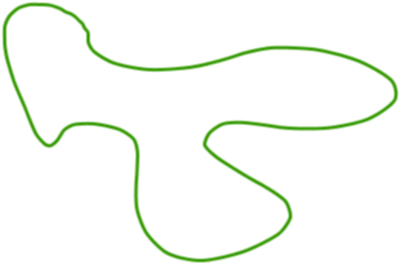
- Une courbe fermée simple s'identifie à un cercle.

# Topologie

Elle s'intéresse à l'étude des formes globales d'*objets* :
**Classifications** par *transformations bicontinues* (*Homéomorphismes*).

Par exemple, d'un point de vue topologique :

- Une courbe fermée simple s'identifie à un cercle.



- Une ellipsoïde s'identifie à une sphère.

# Topologie

Elle s'intéresse à l'étude des formes globales d'*objets* :
**Classifications** par *transformations bicontinues* (*Homéomorphismes*).

Par exemple, d'un point de vue topologique :

• Une courbe fermée simple s'identifie à un cercle.

• Une ellipsoïde s'identifie à une sphère.(Topologie du globe terrestre)

# Exemples

• Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et un ouvert de $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes ?

# Exemples

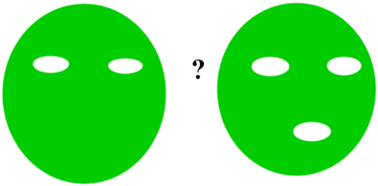
• Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et un ouvert de $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes ?

• $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 - \{O\}$ ne sont pas homéomorphes ?

# Exemples

- Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et un ouvert de $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes ?

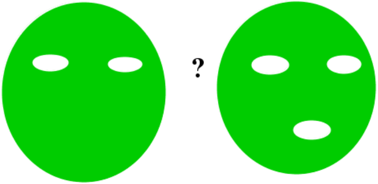
- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 - \{O\}$ ne sont pas homéomorphes ?

- 

# Exemples

- Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et un ouvert de $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes ?

- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 - \{O\}$ ne sont pas homéomorphes ?

- 

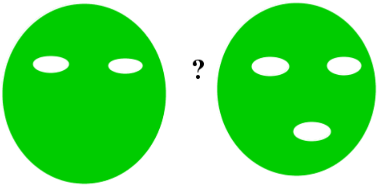
- Deux ouverts simplement connexes de $\mathbb{R}^2$ sont-ils homéomorphes ?

# Exemples

• Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et un ouvert de $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes ?

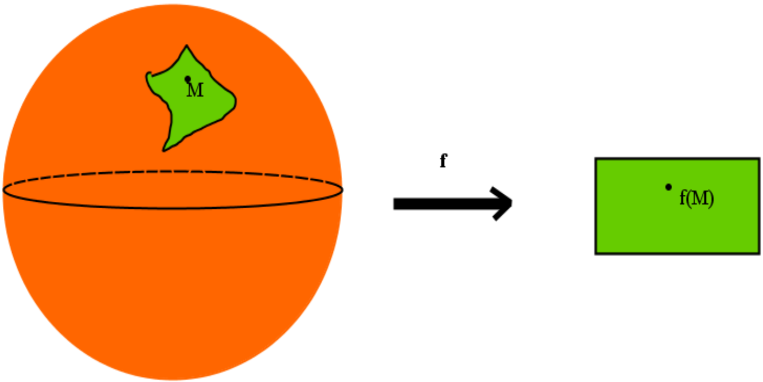
• $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 - \{O\}$ ne sont pas homéomorphes ?

•

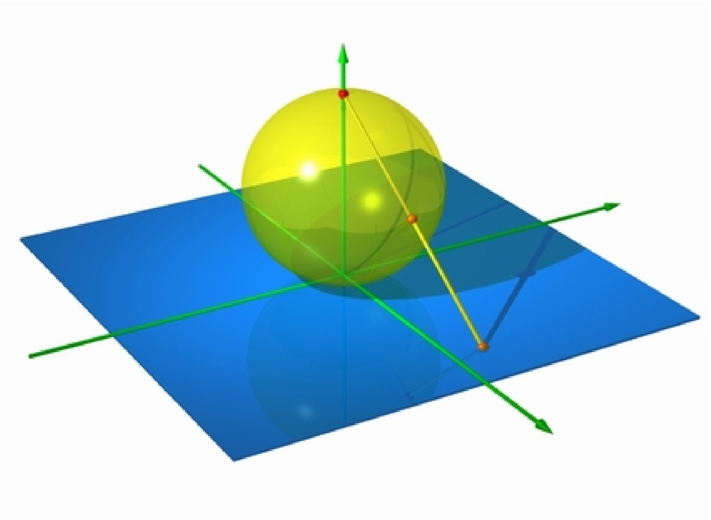


• Deux ouverts simplement connexes de $\mathbb{R}^2$ sont-ils homéomorphes ?(**Théorème de Riemann**)

# Carte d'une région



# Projection stéréographique



*Homéomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $S^2 - \{N\}$

# Projection stéréographique

# Topologie algébrique et topologie différentielle

• L'idée de la topologie algébrique consiste à associer à différents espaces des invariants de manière à pouvoir les classifier. Ces invariants sont des nombres ou des structures algébriques : groupes, anneaux.

# Topologie algébrique et topologie différentielle

• L'idée de la topologie algébrique consiste à associer à différents espaces des invariants de manière à pouvoir les classifier. Ces invariants sont des nombres ou des structures algébriques : groupes, anneaux.

• En topologie différentielle, on utilise les formes différentiables

# Topologie algébrique et topologie différentielle

• L'idée de la topologie algébrique consiste à associer à différents espaces des invariants de manière à pouvoir les classifier. Ces invariants sont des nombres ou des structures algébriques : groupes, anneaux.

• En topologie différentielle, on utilise les formes différentiables (sur des objets) pour produire d'autres invariants algébriques : espaces vectoriels.

# Objets : Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1$

# Objets : Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1$

$$\mathbf{\Sigma} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{U} / \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

# Objets : Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1$

$$\mathbf{\Sigma} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{U} /\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

$\Sigma$ est une variété de dimension $p = n - m$ dès que

# Objets : Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1$

$$\mathbf{\Sigma} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{U} /\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

$\Sigma$ est une variété de dimension $p = n - m$ dès que $rang[\frac{\partial f}{\partial x}(x)] = m$ pour $f(x) = 0$.

# Objets : Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{U} /\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

$\Sigma$ est une variété de dimension $p = n - m$ dès que $rang[\frac{\partial f}{\partial x}(x)] = m$ pour $f(x) = 0$. ($\Sigma$ ressemble localement à l'espace $\mathbb{R}^p$)

# Objets : Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1$

$$\mathbf{\Sigma} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{U} /\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

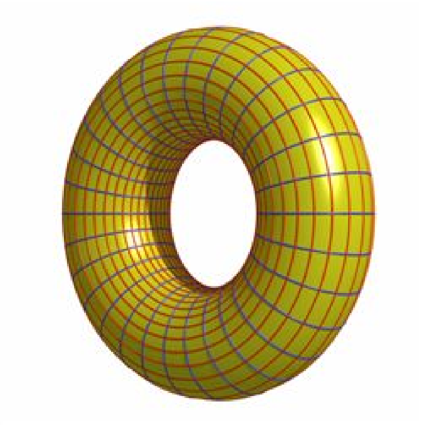
$\Sigma$ est une variété de dimension $p = n - m$ dès que $rang[\frac{\partial f}{\partial x}(x)] = m$ pour $f(x) = 0$. ($\Sigma$ ressemble localement à l'espace $\mathbb{R}^p$)

<u>Exemple</u> : Une sphère de dimension $p$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$.

# Surface (variété de dimension $2$)

## Surface (variété de dimension $2$)

# Surface (variété de dimension 2)



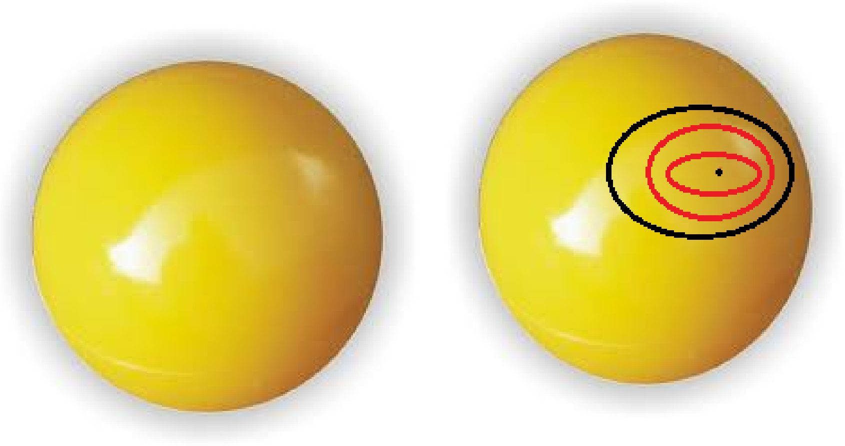
# Caractérisation de la sphère $S^2$

# Caractérisation de la sphère $S^2$

# Caractérisation de la sphère $S^2$

*La sphère de dimension 2 est la seule surface dans laquelle tout chemin fermée peut être déformé en un point.*

# Caractérisation de la sphère $S^2$



*La sphère de dimension 2 est la seule surface dans laquelle tout chemin fermée peut être déformé en un point.*

# La conjecture de Poincaré, 1904

Théorème (Perelman, 2004)(médaille Fields) : Toute 3-variété (compacte, connexe) simplement connexe est homéomorphe à la sphère $S^3$.

# La conjecture de Poincaré, 1904

Théorème (Perelman, 2004)(médaille Fields) : Toute 3-variété (compacte, connexe) simplement connexe est homéomorphe à la sphère $S^3$.

• En dimension $\geq 5$ (Smale, 1960) (médaille Fields)

# La conjecture de Poincaré, 1904

Théorème (Perelman, 2004)(médaille Fields) : Toute 3-variété (compacte, connexe) simplement connexe est homéomorphe à la sphère $S^3$.

- En dimension $\geq 5$ (Smale, 1960) (médaille Fields)
- En dimension 4 (M. Freedman, 1982) (médaille Fields)

# La conjecture de Poincaré, 1904

Théorème (Perelman, 2004)(médaille Fields) : Toute 3-variété (compacte, connexe) simplement connexe est homéomorphe à la sphère $S^3$.

- En dimension $\geq 5$ (Smale, 1960) (médaille Fields)
- En dimension 4 (M. Freedman, 1982) (médaille Fields)
- *Lien avec la topologie de l'univers ! ?*

# Mathématiques en Licence

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les champs considérés sur U sont $C^\infty$.

# Mathématiques en Licence

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les champs considérés sur U sont $C^\infty$.

**Analyse 1 ($n = 1$)** : Toute application (continue) $f : U \to \mathbb{R}$ admet des primitives.

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les champs considérés sur U sont $C^\infty$.

**Analyse 1 ($n = 1$)** : Toute application (continue) $f : U \to \mathbb{R}$ admet des primitives.

**Analyse 2 ($n = 2$)** : Soit $f = (f_1, f_2)$ un champ de vecteurs sur $U$ tel que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

**Question** : Existence de $F : U \to \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{grad} F = f$.

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les champs considérés sur U sont $C^\infty$.

**Analyse 1 ($n = 1$)** : Toute application (continue) $f : U \to \mathbb{R}$ admet des primitives.

**Analyse 2 ($n = 2$)** : Soit $f = (f_1, f_2)$ un champ de vecteurs sur $U$ tel que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

**Question** : Existence de $F : U \to \mathbb{R}$ tels que grad$F = f$.

**Réponse** : Oui lorsque $U$ est étoilé.

# Mathématiques en Licence

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les champs considérés sur U sont $C^\infty$.

**Analyse 1 ($n = 1$)** : Toute application (continue) $f : U \to \mathbb{R}$ admet des primitives.

**Analyse 2 ($n = 2$)** : Soit $f = (f_1, f_2)$ un champ de vecteurs sur $U$ tel que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

**Question** : Existence de $F : U \to \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{grad} F = f$.

**Réponse** : Oui lorsque $U$ est étoilé.

<u>L'idée</u> : Lorsque $U$ est étoilé par rapport à 0, On prend

$$F(x) = \int_0^1 < f(tx), x > dt$$

# Langage d'opérateurs

Le gradient

$$\begin{array}{rccc} grad : & C^\infty(U,\mathbb{R}) & \to & C^\infty(U,\mathbb{R}^2) \\ & f & \mapsto & grad f \end{array}$$

# Langage d'opérateurs

Le gradient

$$\begin{array}{rccc} grad: & C^\infty(U, \mathbb{R}) & \to & C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \\ & f & \mapsto & gradf \end{array}$$

Le rotationnel

$$\begin{array}{rccc} rot: & C^\infty(U, \mathbb{R}^2) & \to & C^\infty(U, \mathbb{R}) \\ & g & \mapsto & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} \end{array}$$

# Langage d'opérateurs

Le gradient

$$\begin{array}{rccc} grad : & C^\infty(U, \mathbb{R}) & \to & C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \\ & f & \mapsto & grad f \end{array}$$

Le rotationnel

$$\begin{array}{rccc} rot : & C^\infty(U, \mathbb{R}^2) & \to & C^\infty(U, \mathbb{R}) \\ & g & \mapsto & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} \end{array}$$

$$rot \circ grad = 0$$

# Langage d'opérateurs

Le gradient

$$\begin{array}{rccc} grad: & C^\infty(U,\mathbb{R}) & \to & C^\infty(U,\mathbb{R}^2) \\ & f & \mapsto & grad f \end{array}$$

Le rotationnel

$$\begin{array}{rccc} rot: & C^\infty(U,\mathbb{R}^2) & \to & C^\infty(U,\mathbb{R}) \\ & g & \mapsto & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} \end{array}$$

$$rot \circ grad = 0$$

**Définition** 1 :

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = \ker(rot)/\mathrm{Im}(grad)$$

# Calcul

- Pour $U$ étoilé, on a

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = 0$$

# Calcul

- Pour $U$ étoilé, on a

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = 0$$

- Pour $U_0 = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, on prend

$$g_0(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

# Calcul

- Pour $U$ étoilé, on a

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = 0$$

- Pour $U_0 = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, on prend

$$g_0(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

alors $rot(g_0) = 0$ et $g_0$ n'est pas un champ de gradient sur $U_0$

# Calcul

- Pour $U$ étoilé, on a

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = 0$$

- Pour $U_0 = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, on prend

$$g_0(x_1, x_2) = (-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2})$$

alors $rot(g_0) = 0$ et $g_0$ n'est pas un champ de gradient sur $U_0$ puisque si prend le lacet : $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ ; on a

$$\int_0^{2\pi} < g_0(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = 2\pi \neq 0$$

# Calcul

- Pour $U$ étoilé, on a

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = 0$$

- Pour $U_0 = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, on prend

$$g_0(x_1, x_2) = (-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2})$$

alors $rot(g_0) = 0$ et $g_0$ n'est pas un champ de gradient sur $U_0$ puisque si prend le lacet : $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ ; on a

$$\int_0^{2\pi} < g_0(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = 2\pi \neq 0$$

Ainsi : $\mathrm{H}^1(\mathrm{U}_0) \neq 0$.

# Calcul

- Pour $U$ étoilé, on a

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = 0$$

- Pour $U_0 = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, on prend

$$g_0(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

alors $rot(g_0) = 0$ et $g_0$ n'est pas un champ de gradient sur $U_0$ puisque si prend le lacet : $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)),\ t \in [0, 2\pi]$ ; on a

$$\int_0^{2\pi} < g_0(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = 2\pi \neq 0$$

Ainsi : $\mathrm{H}^1(\mathrm{U}_0) \neq 0$. On verra que $\mathrm{H}^1(\mathrm{U}_0) \cong \mathbb{R}$

# Interprétation

On verra aussi que si $F_k$ est un ensemble fini de $k$ points du plan, alors

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2 - F_k) \cong \mathbb{R}^k$$

# Interprétation

On verra aussi que si $F_k$ est un ensemble fini de $k$ points du plan, alors

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2 - F_k) \cong \mathbb{R}^k$$

En d'autres termes $\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{U})$ serait "le nombre de trous" dans l'ouvert U.

# Interprétation

On verra aussi que si $F_k$ est un ensemble fini de $k$ points du plan, alors

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2 - F_k) \cong \mathbb{R}^k$$

En d'autres termes $\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{U})$ serait "le nombre de trous" dans l'ouvert U.

**Définition 2** : Pour $U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{U}) = \ker(grad)$$

# Interprétation

On verra aussi que si $F_k$ est un ensemble fini de $k$ points du plan, alors

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2 - F_k) \cong \mathbb{R}^k$$

En d'autres termes $\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{U})$ serait "le nombre de trous" dans l'ouvert U.

**Définition 2** : Pour $U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{U}) = \ker(grad)$$

**Théorème** : $U$ est connexe si et seulement si $\mathrm{H}^0(\mathrm{U}) \cong \mathbb{R}$.

# Interprétation

On verra aussi que si $F_k$ est un ensemble fini de $k$ points du plan, alors

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2 - F_k) \cong \mathbb{R}^k$$

En d'autres termes $\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{U})$ serait "le nombre de trous" dans l'ouvert $\mathrm{U}$.

**Définition 2** : Pour $U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{U}) = \ker(grad)$$

**Théorème** : $U$ est connexe si et seulement si $\mathrm{H}^0(\mathrm{U}) \cong \mathbb{R}$.

Plus généralement, on montre que $\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{U})$ est le nombre de composantes connexes

# Trois variables ($n = 3$)

**Gradient :** $grad : C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$

**Rotationnel :** $rot : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$

**Divergence :** $div : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R})$

# Trois variables ($n = 3$)

**Gradient :** $grad : C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$

**Rotationnel :** $rot : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$

**Divergence :** $div : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R})$

$$rot \circ grad = 0 \quad \text{et} \quad div \circ rot = 0$$

# Trois variables ($n = 3$)

**Gradient :** $grad : C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$

**Rotationnel :** $rot : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$

**Divergence :** $div : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R})$

$$rot \circ grad = 0 \quad \text{et} \quad div \circ rot = 0$$

**Définition 3** : $\mathrm{H}^0(\mathrm{U})$ et $\mathrm{H}^1(\mathrm{U})$ sont déjà définis. On pose

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{U}) = \ker(div)/\mathrm{Im}(rot)$$

**Théorème** : Si $U$ est étoilé, on a

$$\mathsf{H}^0(\mathsf{U}) \cong \mathbb{R}, \quad \mathsf{H}^1(\mathsf{U}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathsf{H}^2(\mathsf{U}) = 0$$

**Théorème** : Si $U$ est étoilé, on a

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{U}) \cong \mathbb{R}, \quad \mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^2(\mathrm{U}) = 0$$

L'idée : Lorsque $U$ est étoilé par rapport à l'origine, et si $div(F) = 0$, on considère

$$G(x) = \int_0^1 F(tx) \wedge tx dt$$

Puis on vérifie que

$$rot(F(tx) \wedge tx) = \frac{d}{dt}(t^2 F(tx)).$$

# Situation générale : $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$

**Définition** [Forme différentielle]

# Situation générale : $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$

**Définition** [Forme différentielle]
Une $p$-forme différentielle sur $U$ ($p = 0, 1, \cdots, n$) est la donnée d'une application

$$\omega : U \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$$

# Situation générale : $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$

**Définition** [Forme différentielle]
Une $p$-forme différentielle sur $U$ ($p = 0, 1, \cdots, n$) est la donnée d'une application

$$\omega : U \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$$

L'espace vectoriel des $p$-formes différentielles sera noté $\Omega^p(U)$.

# Situation générale : $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$

**Définition** [Forme différentielle]
Une $p$-forme différentielle sur $U$ ($p = 0, 1, \cdots, n$) est la donnée d'une application

$$\omega : U \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$$

L'espace vectoriel des $p$-formes différentielles sera noté $\Omega^p(U)$.

**Expression générale** :

# Situation générale : $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$

**Définition** [Forme différentielle]
Une $p$-forme différentielle sur $U$ ($p = 0, 1, \cdots, n$) est la donnée d'une application

$$\omega : U \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$$

L'espace vectoriel des $p$-formes différentielles sera noté $\Omega^p(U)$.

**Expression générale** :
Pour $p = 0$, on a $\Omega^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$.

# Situation générale : $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$

**Définition** [Forme différentielle]
Une $p$-forme différentielle sur $U$ ($p = 0, 1, \cdots, n$) est la donnée d'une application

$$\omega : U \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$$

L'espace vectoriel des $p$-formes différentielles sera noté $\Omega^p(U)$.

**Expression générale** :
Pour $p = 0$, on a $\Omega^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$.
Pour $p = 1$, l'expression générale d'une 1-forme différentielle :

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$$

où $f_i \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ et $dx_i$ la différentielle de la $i$-ème projection (c'-à-d $(dx_i)_x(v) = v_i$ la $i$-ème coordonnée du vecteur $v = (v_1, \ldots, v_n)$)

• Pour $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1(U)$ on définit $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p \in \Omega^p(U)$ par la formule

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v^1, \ldots, v^p) = \det[\omega_i(v^j)]$$

• Pour $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1(U)$ on définit $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p \in \Omega^p(U)$ par la formule

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v^1, \ldots, v^p) = \det[\omega_i(v^j)]$$

▶ L'expression générale d'un élément $\omega \in \Omega^p(U)$ :

$$\omega = \sum_I f_I dx_I$$

où la sommation porte sur les $p$-uplets $I = (i_1, \ldots, i_p)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, $f_I \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ et $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$.

• Pour $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Omega^1(U)$ on définit $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \in \Omega^p(U)$ par la formule

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v^1, \dots, v^p) = \det[\omega_i(v^j)]$$

▶ L'expression générale d'un élément $\omega \in \Omega^p(U)$ :

$$\omega = \sum_I f_I dx_I$$

où la sommation porte sur les $p$-uplets $I = (i_1, \dots, i_p)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, $f_I \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ et $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$. En particulier, lorsque $\omega_1 \in \Omega^p(U)$ et $\omega_2 \in \Omega^q(U)$ on définit le produit (externe) $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{p+q}(U)$. On a : $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq} \omega_2 \wedge \omega_1$.

• Pour $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1(U)$ on définit $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p \in \Omega^p(U)$ par la formule

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v^1, \ldots, v^p) = \det[\omega_i(v^j)]$$

▶ L'expression générale d'un élément $\omega \in \Omega^p(U)$ :

$$\omega = \sum_I f_I dx_I$$

où la sommation porte sur les $p$-uplets $I = (i_1, \ldots, i_p)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, $f_I \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ et $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$. En particulier, lorsque $\omega_1 \in \Omega^p(U)$ et $\omega_2 \in \Omega^q(U)$ on définit le produit (externe) $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{p+q}(U)$. On a : $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq} \omega_2 \wedge \omega_1$. On obtient une algèbre graduée anti-commutative

$$\Omega^*(U) = \oplus_{0 \leq p \leq n} \Omega^p(U)$$

# Différentielle externe

**Théorème** : Pour tout ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique opérateur linéaire

$$d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$$

pour tout $p = 0, 1, \ldots, n$ tel que :

# Différentielle externe

**Théorème** : Pour tout ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique opérateur linéaire

$$d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$$

pour tout $p = 0, 1, \ldots, n$ tel que :

1. Pour $f \in \Omega^0(U)$, $df = \sum_{i=1}^{n} dx_i$
2. $d \circ d = 0$
3. $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$, pour $\omega_1 \in \Omega^p(U)$.

# Le complexe de de Rham

**Définition** Le complexe de de Rham de $U$ est le couple

$$(\Omega^*(U), d)$$

# Le complexe de de Rham

**Définition** Le complexe de de Rham de $U$ est le couple

$$(\Omega^*(U), d)$$

C'est une algèbre différentielle graduée anti-commutative.

# Le complexe de de Rham

**Définition** Le complexe de de Rham de $U$ est le couple

$$(\Omega^*(U), d)$$

C'est une algèbre différentielle graduée anti-commutative.

**Définition** La cohomologie de de Rham de $U$ est le quotient

$$\mathrm{H}^p(U) = \frac{\ker(d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U))}{Im(d : \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U))}$$

# Le complexe de de Rham

**Définition** Le complexe de de Rham de $U$ est le couple

$$(\Omega^*(U), d)$$

C'est une algèbre différentielle graduée anti-commutative.

**Définition** La cohomologie de de Rham de $U$ est le quotient

$$\mathrm{H}^p(U) = \frac{\ker(d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U))}{Im(d : \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U))}$$

$\mathrm{H}^*(U) = \oplus_{0 \leq p \leq n} \mathrm{H}^p(U)$ est une algèbre anti-commutative pour la multiplication : $[\omega_1][\omega_2] = [\omega_1 \wedge \omega_2]$.

# Effet d'une application

Soit $\phi : U_1 \to U_2$ une application de $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ vers $U_1 \subset \mathbb{R}^m$.

# Effet d'une application

Soit $\phi : U_1 \to U_2$ une application de $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ vers $U_1 \subset \mathbb{R}^m$.
On définit $\phi^* : \Omega^p(U_2) \to \Omega^p(U_1)$

# Effet d'une application

Soit $\phi : U_1 \to U_2$ une application de $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ vers $U_1 \subset \mathbb{R}^m$.
On définit $\phi^* : \Omega^p(U_2) \to \Omega^p(U_1)$ par l'expression :

$$\phi^*(\sum_I f_I dx_I) = \sum_I (f_I \circ \phi) d\phi_I$$

où $d\phi_I = d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_p}$ et $\phi_i$ désigne la $i$-ème fonction coordonnée de $\phi$.

Par exemple :

- Pour $\gamma : [0,1] \to U$ une courbe dans $U$ et $\omega = \sum_i f_i dx_i$, on a

$$\gamma^*(\omega) =< f(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt$$

.

Par exemple :

- Pour $\gamma : [0,1] \to U$ une courbe dans $U$ et $\omega = \sum_i f_i dx_i$, on a
$$\gamma^*(\omega) =< f(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt$$
- Lorsque $n = m$, on a
$$\phi^*(d\phi_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)_x = \det((d\phi)_x) dx_1 \wedge \cdots dx_n$$

.

Par exemple :

- Pour $\gamma : [0,1] \to U$ une courbe dans $U$ et $\omega = \sum_i f_i dx_i$, on a
$$\gamma^*(\omega) =< f(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt$$

- Lorsque $n = m$, on a
$$\phi^*(d\phi_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)_x = \det((d\phi)_x) dx_1 \wedge \cdots dx_n$$

- Pour $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par $\phi(x,t) = k(t)x$ avec $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Par exemple :

- Pour $\gamma : [0,1] \to U$ une courbe dans $U$ et $\omega = \sum_i f_i dx_i$, on a

$$\gamma^*(\omega) =< f(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt$$

- Lorsque $n = m$, on a

$$\phi^*(d\phi_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)_x = \det((d\phi)_x) dx_1 \wedge \cdots dx_n$$

- Pour $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par $\phi(x,t) = k(t)x$ avec $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a :

$$\phi^*(dx_i) = k(t)dx_i + x_i k'(t) dt$$

# Foncteur : $U \to H^*(U)$

On a

- $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$
- $\phi^*(f) = f \circ \phi$ pour $f$ une fonction.
- $d(\phi^* \omega) = \phi^*(d\omega)$.

# Foncteur : $U \to H^*(U)$

On a

- $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$
- $\phi^*(f) = f \circ \phi$ pour $f$ une fonction.
- $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$.

<u>Conséquence</u> : À toute application $\phi : U_1 \to U_2$ on associe une application linéaire :

$$H^p(\phi) : H^p(U_2) \to H^p(U_1)$$

# Foncteur : $U \to H^*(U)$

On a

- $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$
- $\phi^*(f) = f \circ \phi$ pour $f$ une fonction.
- $d(\phi^* \omega) = \phi^*(d\omega)$.

Conséquence : À toute application $\phi : U_1 \to U_2$ on associe une application linéaire :

$$H^p(\phi) : H^p(U_2) \to H^p(U_1)$$

définie par $H^p(\phi)[\omega] = [\phi^*(\omega)]$.

# Foncteur : $U \to H^*(U)$

On a

- $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$
- $\phi^*(f) = f \circ \phi$ pour $f$ une fonction.
- $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$.

Conséquence : À toute application $\phi : U_1 \to U_2$ on associe une application linéaire :

$$H^p(\phi) : H^p(U_2) \to H^p(U_1)$$

définie par $H^p(\phi)[\omega] = [\phi^*(\omega)]$.

On a : $H^p(\phi_2 \circ \phi_1) = H^p(\phi_1) \circ H^p(\phi_2)$.

# Lemme de Poincaré

**Théorème** Pour tout ouvert étoilé $U$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$H^p(U) = 0 \ \text{ pour } p > 0 \quad \text{et} \quad H^0(U) = \mathbb{R}$$

# Lemme de Mayer-Vietoris :

**Proposition.** Soient $U_1$ et $U_2$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $U = U_1 \cup U_2$. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \to 0$$

est exate ;
où $I^p(\omega) = (\omega_{|_{U_1}}, \omega_{|_{U_2}})$ et $J^p(\alpha, \beta) = \alpha_{|_{U_1 \cap U_2}} - \beta_{|_{U_1 \cap U_2}}$.

:

# Lemme de Mayer-Vietoris :

**Proposition.** Soient $U_1$ et $U_2$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $U = U_1 \cup U_2$. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \to 0$$

est exate ;
où $I^p(\omega) = (\omega_{|_{U_1}}, \omega_{|_{U_2}})$ et $J^p(\alpha, \beta) = \alpha_{|_{U_1 \cap U_2}} - \beta_{|_{U_1 \cap U_2}}$.

**Démonstration.**

Seule la surjectivité de $J^p$ mérite une explication :

# Lemme de Mayer-Vietoris :

**Proposition.** Soient $U_1$ et $U_2$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $U = U_1 \cup U_2$. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \to 0$$

est exate ;
où $I^p(\omega) = (\omega_{|U_1}, \omega_{|U_2})$ et $J^p(\alpha, \beta) = \alpha_{|U_1 \cap U_2} - \beta_{|U_1 \cap U_2}$.

**Démonstration.**

Seule la surjectivité de $J^p$ mérite une explication : On considère une partition de l'unité $\{\rho_1, \rho_2\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_1, U_2\}$ ( $\mathrm{Supp}(\rho_i) \subset U_i$ et $\rho_1 + \rho_2 = 1$)

# Lemme de Mayer-Vietoris :

**Proposition.** Soient $U_1$ et $U_2$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $U = U_1 \cup U_2$. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \to 0$$

est exate ;
où $I^p(\omega) = (\omega_{|_{U_1}}, \omega_{|_{U_2}})$ et $J^p(\alpha, \beta) = \alpha_{|_{U_1 \cap U_2}} - \beta_{|_{U_1 \cap U_2}}$.

**Démonstration.**

Seule la surjectivité de $J^p$ mérite une explication : On considère une partition de l'unité $\{\rho_1, \rho_2\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_1, U_2\}$ ( $\mathrm{Supp}(\rho_i) \subset U_i$ et $\rho_1 + \rho_2 = 1$) puis il suffit d'écrire $\omega = \rho_2\omega - (-\rho_1\omega)$ et de remarquer que $(\rho_2\omega, -\rho_1\omega) \in \Omega^*(U_1) \oplus \Omega^*(U_2)$. $\square$

# Suite exacte longue :

**Corollaire 1.** Soit $U = U_1 \cup U_2$. Alors il existe une suite exacte longue (naturelle) de cohomologie :

$$\cdots \longrightarrow H^p(U) \xrightarrow{H(I)} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{H(J)} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(U)$$

où $\delta^p$ est l'opérateur connectant.

# Suite exacte longue :

**Corollaire 1.** Soit $U = U_1 \cup U_2$. Alors il existe une suite exacte longue (naturelle) de cohomologie :

$$\cdots \longrightarrow H^p(U) \xrightarrow{H(I)} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{H(J)} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(U)$$

où $\delta^p$ est l'opérateur connectant.

**Corollaire 2.** Si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, alors

$$H^p(U_1 \cup U_2) \cong H^p(U_1) \oplus H^p(U_2)$$

# Exemple : $H^*(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On prend

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \geq 0, y = 0\}$$

et

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \leq 0, y = 0\}$$

.

# Exemple : $H^*(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On prend

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \geq 0, y = 0\}$$

et

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \leq 0, y = 0\}$$

$U_1$ et $U_2$ sont étoilés, $U_1 \cup U_2 = U$ et $U_1 \cap U_2$ est réunion disjointe de deux ouverts convexes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$.

.

## Exemple : $H^*(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On prend

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \geq 0, y = 0\}$$

et

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \leq 0, y = 0\}$$

$U_1$ et $U_2$ sont étoilés, $U_1 \cup U_2 = U$ et $U_1 \cap U_2$ est réunion disjointe de deux ouverts convexes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. Donc $H^p(U_1 \cap U_2) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

# Exemple : $H^*(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On prend

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \geq 0, y = 0\}$$

et

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \leq 0, y = 0\}$$

$U_1$ et $U_2$ sont étoilés, $U_1 \cup U_2 = U$ et $U_1 \cap U_2$ est réunion disjointe de deux ouverts convexes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. Donc $H^p(U_1 \cap U_2) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. On obtient alors que pour $p > 0$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(U) \longrightarrow 0$$

# Exemple : $H^*(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On prend

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \geq 0, y = 0\}$$

et

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \leq 0, y = 0\}$$

$U_1$ et $U_2$ sont étoilés, $U_1 \cup U_2 = U$ et $U_1 \cap U_2$ est réunion disjointe de deux ouverts convexes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. Donc $H^p(U_1 \cap U_2) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. On obtient alors que pour $p > 0$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(U) \longrightarrow 0$$

Donc $H^q(U) = 0$ pour $q \geq 2$.

# Exemple : $H^*(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On prend

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \geq 0, y = 0\}$$

et

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \leq 0, y = 0\}$$

$U_1$ et $U_2$ sont étoilés, $U_1 \cup U_2 = U$ et $U_1 \cap U_2$ est réunion disjointe de deux ouverts convexes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. Donc $H^p(U_1 \cap U_2) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. On obtient alors que pour $p > 0$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(U) \longrightarrow 0$$

Donc $H^q(U) = 0$ pour $q \geq 2$. Pour le calcul de $H^1(U)$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(U) \xrightarrow{I^0} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^0} H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^0} H^1(U) \to 0$$

# Exemple : $H^*(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$)

On prend

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \geq 0, y = 0\}$$

et

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \leq 0, y = 0\}$$

$U_1$ et $U_2$ sont étoilés, $U_1 \cup U_2 = U$ et $U_1 \cap U_2$ est réunion disjointe de deux ouverts convexes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. Donc $H^p(U_1 \cap U_2) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. On obtient alors que pour $p > 0$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(U) \longrightarrow 0$$

Donc $H^q(U) = 0$ pour $q \geq 2$. Pour le calcul de $H^1(U)$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(U) \xrightarrow{I^0} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^0} H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^0} H^1(U) \to 0$$

Donc $H^1(U) \cong \mathbb{R}$.

# Homotopie entre deux applications

**Définition** Deux applications continues $f_0$ et $f_1$, de $X$ vers $Y$ (deux espaces topologiques), sont homotopes s'il existe une application continue

$$F : [0,1] \times X \to Y$$

telle que $F(0,x) = f_0(x)$ et $F(1,x) = f_1(x)$. On note $f_0 \sim f_1$. L'application $F$ est appelée une homotopie de $f_0$ à $f_1$. (Penser à $F$ comme une famille de fonctions $f_t : X \to Y$).

# Homotopie entre deux applications

**Définition** Deux applications continues $f_0$ et $f_1$, de $X$ vers $Y$ (deux espaces topologiques), sont homotopes s'il existe une application continue

$$F : [0,1] \times X \to Y$$

telle que $F(0,x) = f_0(x)$ et $F(1,x) = f_1(x)$. On note $f_0 \sim f_1$. L'application $F$ est appelée une homotopie de $f_0$ à $f_1$. (Penser à $F$ comme une famille de fonctions $f_t : X \to Y$).

Exemples :

1. Pour $X = Y = \mathbb{R}$, $f_0(x) = 0$ et $f_1(x) = x$ sont homotopes ($F(t,x) = tx$).
2. Pour $X = [0, 2\pi]$, $Y = \mathbb{C}^*$, $\gamma_0(\theta) = 1$ et $\gamma_1(\theta) = e^{i\theta}$ ne sont pas homotopes.

# Type d'homotopie d'un espace

**Définition** Deux espaces topologiques $X$ et $Y$ ont même type d'homotopie s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g \sim id_Y$ et $g \circ f \sim id_X$.

# Type d'homotopie d'un espace

**Définition** Deux espaces topologiques $X$ et $Y$ ont même type d'homotopie s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g \sim id_Y$ et $g \circ f \sim id_X$. On note $X \sim Y$ ; c'est une relation d'équivalence entre les espaces topologiques.

.

# Type d'homotopie d'un espace

**Définition** Deux espaces topologiques $X$ et $Y$ ont même type d'homotopie s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g \sim id_Y$ et $g \circ f \sim id_X$. On note $X \sim Y$ ; c'est une relation d'équivalence entre les espaces topologiques.

- Deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie.

.

# Type d'homotopie d'un espace

**Définition** Deux espaces topologiques $X$ et $Y$ ont même type d'homotopie s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g \sim id_Y$ et $g \circ f \sim id_X$. On note $X \sim Y$ ; c'est une relation d'équivalence entre les espaces topologiques.

- Deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie.
- Un espace $X$ est dit contractile s'il a le même type d'homotopie qu'un point.

.

# Type d'homotopie d'un espace

**Définition** Deux espaces topologiques $X$ et $Y$ ont même type d'homotopie s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g \sim id_Y$ et $g \circ f \sim id_X$. On note $X \sim Y$ ; c'est une relation d'équivalence entre les espaces topologiques.

- Deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie.
- Un espace $X$ est dit contractile s'il a le même type d'homotopie qu'un point.
- Tout ouvert étoilé est contractile.

**Définition** On dira qu'une partie $\iota : A \hookrightarrow U$ est un retract par déformation de $U$ s'il existe une application différentiable $r : U \to A$ (rétraction) telle que :

1. $r \circ \iota = Id_A$ ,
2. $\iota \circ r$ est homotope à $Id_U$.

**Définition** On dira qu'une partie $\iota : A \hookrightarrow U$ est un retract par déformation de $U$ s'il existe une application différentiable $r : U \to A$ (rétraction) telle que :

1. $r \circ \iota = Id_A$ ,
2. $\iota \circ r$ est homotope à $Id_U$.

Les applications $\iota$ et $r$ sont ainsi des équivalences d'homotopie.

**Définition** On dira qu'une partie $\iota : A \hookrightarrow U$ est un retract par déformation de $U$ s'il existe une application différentiable $r : U \to A$ (rétraction) telle que :

1. $r \circ \iota = Id_A$ ,
2. $\iota \circ r$ est homotope à $Id_U$.

Les applications $\iota$ et $r$ sont ainsi des équivalences d'homotopie.

**Définition** On dira qu'une partie $\iota : A \hookrightarrow U$ est un retract par déformation de $U$ s'il existe une application différentiable $r : U \to A$ (rétraction) telle que :

1. $r \circ \iota = Id_A$ ,
2. $\iota \circ r$ est homotope à $Id_U$.

Les applications $\iota$ et $r$ sont ainsi des équivalences d'homotopie.

**Exemple** Les espaces $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ et la sphère $S^n$ ont même type d'homotopie.

**Définition** On dira qu'une partie $\iota : A \hookrightarrow U$ est un retract par déformation de $U$ s'il existe une application différentiable $r : U \to A$ (rétraction) telle que :

1. $r \circ \iota = Id_A$ ,
2. $\iota \circ r$ est homotope à $Id_U$.

Les applications $\iota$ et $r$ sont ainsi des équivalences d'homotopie.

**Exemple** Les espaces $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ et la sphère $S^n$ ont même type d'homotopie.

En effet, considérons l'application $r : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to S^n$ définie par $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. On a $r \circ \iota = id_{S^n}$ et $\iota \circ r \sim id_{\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}}$ par l'homotopie : $F(t, x) = tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|}$.

# Homotopie différentiable

**Lemme** Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ (ouverts).

- Toute application continue $h : U \to V$ est homotpe à une application $C^\infty$.
- Si $f_0, f_1 : U \to V$ sont $C^\infty$ et homotopes, alors il existe une homotopie $C^\infty$ reliant $f_0$ et $f_1$ (càd $F : \mathbb{R} \times U \to V$ $C^\infty$ avec $F(t,x) = f_0$ pour $t \leq 0$ et $F(t,x) = f_1$ pour $t \geq 1$).

**Proposition** Deux applications différentiables différentiablement homotopes induisent la même application en cohomologie de de Rham.

**Théorème** Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ (ouverts) ont même type d'homotopie (en particulier s'ils sont homéomorphes), alors : $H^*(U) \cong H^*(V)$.

**Théorème** Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ (ouverts) ont même type d'homotopie (en particulier s'ils sont homéomorphes), alors : $H^*(U) \cong H^*(V)$.

**Corollaire** Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert contractile, alors $H^p(U) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U) = \mathbb{R}$.

**Théorème** Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ (ouverts) ont même type d'homotopie (en particulier s'ils sont homéomorphes), alors : $H^*(U) \cong H^*(V)$.

**Corollaire** Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert contractile, alors $H^p(U) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U) = \mathbb{R}$.

**Proposition ($\sharp$)** Soit $A$ un fermé de $\mathbb{R}^n$, $A \neq \mathbb{R}^n$. On identifie $A$ à un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ : $A \subset \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

**Théorème** Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ (ouverts) ont même type d'homotopie (en particulier s'ils sont homéomorphes), alors : $H^*(U) \cong H^*(V)$.

**Corollaire** Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert contractile, alors $H^p(U) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U) = \mathbb{R}$.

**Proposition (♯)** Soit $A$ un fermé de $\mathbb{R}^n$, $A \neq \mathbb{R}^n$. On identifie $A$ à un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ : $A \subset \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
On a des isomorphismes :

- $H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} - A) \cong H^p(\mathbb{R}^n - A)$, pour $p \geq 1$
- $H^1(\mathbb{R}^{n+1} - A) \cong H^0(\mathbb{R}^n - A)/\mathbb{R} \cdot 1$
- $H^0(\mathbb{R}^{n+1} - A) \cong \mathbb{R}$.

**Démonstration.**

On utilise les deux ouverts :

- $U_1 = (\mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times ] - 1, +\infty[)$
- $U_2 = (\mathbb{R}^n \times ] - \infty, 0[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times ] - \infty, 1[)$

$\square$

**Démonstration.**

On utilise les deux ouverts :

- $U_1 = (\mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times ] - 1, +\infty[)$
- $U_2 = (\mathbb{R}^n \times ] - \infty, 0[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times ] - \infty, 1[)$

On vérifie que

- $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1} - A$
- $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n - A) \times ] - 1, 1[$

$\square$

**Démonstration.**

On utilise les deux ouverts :

- $U_1 = (\mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times ]-1, +\infty[)$
- $U_2 = (\mathbb{R}^n \times ]-\infty, 0[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times ]-\infty, 1[)$

On vérifie que

- $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1} - A$
- $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n - A) \times ]-1, 1[$

La suite exacte longue de Mayer-Vietoris permet de conclure. $\square$

**Démonstration.**

On utilise les deux ouverts :

- $U_1 = (\mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times ] - 1, +\infty[)$
- $U_2 = (\mathbb{R}^n \times ] - \infty, 0[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times ] - \infty, 1[)$

On vérifie que

- $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1} - A$
- $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n - A) \times ] - 1, 1[$

La suite exacte longue de Mayer-Vietoris permet de conclure. $\square$

**Corollaire** Pour $n \geq 2$, on a

$$H^p(\mathbb{R}^n - \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad p = 0,\ n - 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

# Applications

$D^n$ désigne le disque unité de $\mathbb{R}^n$.

**Théorème** [du point fixe de Brouwer] Toute application continue $f : D^n \to D^n$ a un point fixe.

# Applications

$D^n$ désigne le disque unité de $\mathbb{R}^n$.

**Théorème** [du point fixe de Brouwer] Toute application continue $f : D^n \to D^n$ a un point fixe.

Supposons que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in D^n$.

# Applications

$D^n$ désigne le disque unité de $\mathbb{R}^n$.

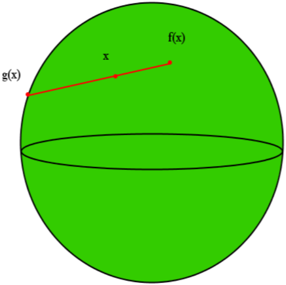
**Théorème** [du point fixe de Brouwer] Toute application continue $f : D^n \to D^n$ a un point fixe.

Supposons que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in D^n$.Pour $x \in D^n$, on désigne par $g(x)$ le point d'intersection de la demi droite passant par $x$ d'origine $f(x)$, avec la sphère $S^{n-1}$.

$D^n$ désigne le disque unité de $\mathbb{R}^n$.

**Théorème** [du point fixe de Brouwer] Toute application continue $f : D^n \to D^n$ a un point fixe.

Supposons que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in D^n$.Pour $x \in D^n$, on désigne par $g(x)$ le point d'intersection de la demi droite passant par $x$ d'origine $f(x)$, avec la sphère $S^{n-1}$.

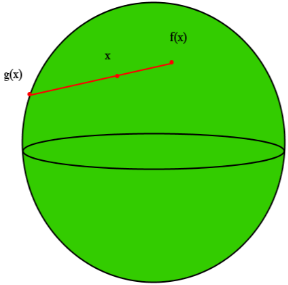


# Applications

$D^n$ désigne le disque unité de $\mathbb{R}^n$.

**Théorème** [du point fixe de Brouwer] Toute application continue $f : D^n \to D^n$ a un point fixe.

Supposons que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in D^n$.Pour $x \in D^n$, on désigne par $g(x)$ le point d'intersection de la demi droite passant par $x$ d'origine $f(x)$, avec la sphère $S^{n-1}$. L'application $g : D^n \to S^{n-1}$ est une rétraction de $D^n$ sur $S^{n-1}$ !



**Lemme** Il n'existe pas d'application continue $g : D^n \to S^{n-1}$ telle que $g_{|_{S^{n-1}}} = id_{S^{n-1}}$.

$\square$

**Lemme** Il n'existe pas d'application continue $g : D^n \to S^{n-1}$ telle que $g_{|_{S^{n-1}}} = id_{S^{n-1}}$.

**Démonstration.**

($n \geq 2$). L'application

$$r : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad r(x) = \frac{x}{\| x \|}$$

est homotope à $id_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$.

$\square$

**Lemme** Il n'existe pas d'application continue $g : D^n \to S^{n-1}$ telle que $g_{|_{S^{n-1}}} = id_{S^{n-1}}$.

**Démonstration.**

$(n \geq 2)$. L'application

$$r : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad r(x) = \frac{x}{\| x \|}$$

est homotope à $id_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$. D'un autre côté, l'application $g$ permet de construire une homotopie entre $r$ et l'application constante $x \mapsto g(0)$ (en prenant $G(t, x) = g(tr(x))$).

□

**Lemme** Il n'existe pas d'application continue $g : D^n \to S^{n-1}$ telle que $g_{|_{S^{n-1}}} = id_{S^{n-1}}$.

**Démonstration.**

$(n \geq 2)$. L'application

$$r : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad r(x) = \frac{x}{\| x \|}$$

est homotope à $id_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$. D'un autre côté, l'application $g$ permet de construire une homotopie entre $r$ et l'application constante $x \mapsto g(0)$ (en prenant $G(t, x) = g(tr(x))$). Il en résulte que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est contractile.

□

**Lemme** Il n'existe pas d'application continue $g : D^n \to S^{n-1}$ telle que $g_{|_{S^{n-1}}} = id_{S^{n-1}}$.

**Démonstration.**

$(n \geq 2)$. L'application

$$r : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad r(x) = \frac{x}{\| x \|}$$

est homotope à $id_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$. D'un autre côté, l'application $g$ permet de construire une homotopie entre $r$ et l'application constante $x \mapsto g(0)$ (en prenant $G(t, x) = g(tr(x))$). Il en résulte que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est contractile.Ce qui est faux puisque $H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) = \mathbb{R}$. $\square$

**Théorème** Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère $S^n$ si et seulement si $n$ est impair.

$\square$

**Théorème** Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère $S^n$ si et seulement si $n$ est impair.

**Démonstration.**

Lorsque $n = 2m - 1$, on peut considérer le champ

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

$\square$

**Théorème** Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère $S^n$ si et seulement si $n$ est impair.

**Démonstration.**

Lorsque $n = 2m - 1$, on peut considérer le champ

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

Dans le cas $n$ est pair, supposons l'existence de $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v(x) \neq 0$ et $< v(x), x >= 0$ pour tout $x \in S^n$.

$\square$

**Théorème** Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère $S^n$ si et seulement si $n$ est impair.

**Démonstration.**

Lorsque $n = 2m - 1$, on peut considérer le champ

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

Dans le cas $n$ est pair, supposons l'existence de $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v(x) \neq 0$ et $< v(x), x >= 0$ pour tout $x \in S^n$.

$\square$

**Théorème** Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère $S^n$ si et seulement si $n$ est impair.

**Démonstration.**

Lorsque $n = 2m - 1$, on peut considérer le champ

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

Dans le cas $n$ est pair, supposons l'existence de $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v(x) \neq 0$ et $< v(x), x >= 0$ pour tout $x \in S^n$. On pose $w(x) = v(\frac{x}{\| x \|})$, et on considère l'application $F(t, x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)w(x)$

$\square$

**Théorème** Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère $S^n$ si et seulement si $n$ est impair.

**Démonstration.**

Lorsque $n = 2m - 1$, on peut considérer le champ

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

Dans le cas $n$ est pair, supposons l'existence de $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v(x) \neq 0$ et $< v(x), x >= 0$ pour tout $x \in S^n$. On pose $w(x) = v(\frac{x}{\| x \|})$, et on considère l'application $F(t, x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)w(x)$ $F$ définit une homotopie entre $id_{\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}}$ et l'application $f(x) = -x$.

$\square$

**Théorème** Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère $S^n$ si et seulement si $n$ est impair.

**Démonstration.**

Lorsque $n = 2m - 1$, on peut considérer le champ

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

Dans le cas $n$ est pair, supposons l'existence de $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v(x) \neq 0$ et $< v(x), x >= 0$ pour tout $x \in S^n$. On pose $w(x) = v(\frac{x}{\| x \|})$, et on considère l'application $F(t, x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)w(x)$ $F$ définit une homotopie entre $id_{\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}}$ et l'application $f(x) = -x$. D'où $H^n(f) = Id$ identité de $H^n(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$.

$\square$

**Théorème** Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère $S^n$ si et seulement si $n$ est impair.

**Démonstration.**

Lorsque $n = 2m - 1$, on peut considérer le champ

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

Dans le cas $n$ est pair, supposons l'existence de $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v(x) \neq 0$ et $< v(x), x >= 0$ pour tout $x \in S^n$. On pose $w(x) = v(\frac{x}{\| x \|})$, et on considère l'application $F(t, x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)w(x)$ $F$ définit une homotopie entre $id_{\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}}$ et l'application $f(x) = -x$. D'où $H^n(f) = Id$ identité de $H^n(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$. Ceci est faux : $n$ étant supposé pair, on montre (exercice !) que $H^n(f) = -Id$. □

**Remarque** Lorsque $A$ et $B$ sont deux fermés de $\mathbb{R}^n$ et que $A$ est homéomorphe à $B$,

**Remarque** Lorsque $A$ et $B$ sont deux fermés de $\mathbb{R}^n$ et que $A$ est homéomorphe à $B$, alors $\mathbb{R}^n - A$ n'est pas forcement homéomorphe à $\mathbb{R}^n - B$

**Remarque** Lorsque $A$ et $B$ sont deux fermés de $\mathbb{R}^n$ et que $A$ est homéomorphe à $B$, alors $\mathbb{R}^n - A$ n'est pas forcement homéomorphe à $\mathbb{R}^n - B$

Ref. *Rushing "Topological Embeddings. Academic Press, 1973."*

**Remarque** Lorsque $A$ et $B$ sont deux fermés de $\mathbb{R}^n$ et que $A$ est homéomorphe à $B$, alors $\mathbb{R}^n - A$ n'est pas forcement homéomorphe à $\mathbb{R}^n - B$ :Il existe $\Sigma \approx S^2$ mais $\mathbb{R}^3 - \Sigma$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^3 - S^2$. Ref. *Rushing "Topological Embeddings. Academic Press, 1973."*

**Théorème** Supposons que $A \neq \mathbb{R}^n$ et $B \neq \mathbb{R}^n$ soient deux fermés de $\mathbb{R}^n$. Si $A$ est homeomorphe à $B$, alors

$$H^p(\mathbb{R}^n - A) \cong H^p(\mathbb{R}^n - B)$$

pour tout $p$.

**Démonstration.**

**Lemme** Si $\phi : A \to B$ est un homéomorphisme, alors il existe un homéomorphisme $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ prolongement de $\phi$.

$\square$

**Démonstration.**

**Lemme** Si $\phi : A \to B$ est un homéomorphisme, alors il existe un homéomorphisme $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ prolongement de $\phi$.
En particulier $\mathbb{R}^{2n} - A \approx \mathbb{R}^{2n} - B$.

$\square$

**Démonstration.**

**Lemme** Si $\phi : A \to B$ est un homéomorphisme, alors il existe un homéomorphisme $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ prolongement de $\phi$.
En particulier $\mathbb{R}^{2n} - A \approx \mathbb{R}^{2n} - B$. Il en résulte (et en utilisant proposition $\sharp$) que pour $p > 0$ :

$$H^p(\mathbb{R}^n - A) \cong H^{p+n}(\mathbb{R}^{2n} - A) \cong H^{p+n}(\mathbb{R}^{2n} - A) \cong H^p(\mathbb{R}^n - B)$$

et que

$$H^0(\mathbb{R}^n - A)/\mathbb{R} \cdot 1 \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} - A) \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} - A) \cong /\mathbb{R} \cdot 1$$

$\square$

**Corollaire** Soient $A$ et $B$ deux fermés de $\mathbb{R}^n$. Si $A \approx B$ alors $\mathbb{R}^n - A$ et $\mathbb{R}^n - B$ ont le même nombre de composantes connexes.

**Corollaire** Soient $A$ et $B$ deux fermés de $\mathbb{R}^n$. Si $A \approx B$ alors $\mathbb{R}^n - A$ et $\mathbb{R}^n - B$ ont le même nombre de composantes connexes.

**Théorème** (de séparation de Jordan-Brouwer)
Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) est un fermé homéomorphe à $S^{n-1}$, alors

**Corollaire** Soient $A$ et $B$ deux fermés de $\mathbb{R}^n$. Si $A \approx B$ alors $\mathbb{R}^n - A$ et $\mathbb{R}^n - B$ ont le même nombre de composantes connexes.

**Théorème** (de séparation de Jordan-Brouwer)
Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) est un fermé homéomorphe à $S^{n-1}$, alors $\mathbb{R}^n - \Sigma$ a deux composantes connexes $U_1$ et $U_2$ avec $U_1$ est borné et $U_2$ est non bornée. En plus, $\Sigma$ est leur frontière commune ($\Sigma = \partial U_1 = \partial U_2$).

**Théorème** (Brouwer)
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue et injective, alors $f(U)$ est un ouvert et $f$ est un homéomorphisme de $U$ sur $f(U)$.

**Théorème** (Brouwer)
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue et injective, alors $f(U)$ est un ouvert et $f$ est un homéomorphisme de $U$ sur $f(U)$.

**Corollaire 1.** Si $V \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble (qu'on muni de la topologie induite usuelle de $\mathbb{R}^n$) homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

**Théorème** (Brouwer)
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue et injective, alors $f(U)$ est un ouvert et $f$ est un homéomorphisme de $U$ sur $f(U)$.

**Corollaire 1.** Si $V \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble (qu'on muni de la topologie induite usuelle de $\mathbb{R}^n$) homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

**Corollaire 2.** Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{R}^m$ sont deux ouverts (non vides) et que $U$ est homéomorphe à $V$ alors $m = n$.

# Exercices

**Exercice 1.** Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ un noeud ($\Sigma \approx S^1$). Montrer que

$$H^p(\mathbb{R}^3 - \Sigma) = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad p = 0, 1, 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

# Exercices

**Exercice 1.** Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ un noeud ($\Sigma \approx S^1$). Montrer que

$$H^p(\mathbb{R}^3 - \Sigma) = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad p = 0, 1, 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

**Exercice 2.** Soit $F_k = \{m_1, \cdots, m_k\}$ un ensemble de $k$-points du plan $\mathbb{R}^2$. Montrer que $H^1(\mathbb{R}^2 - F_k) \cong \mathbb{R}^k$.

# Exercices

**Exercice 1.** Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ un noeud $(\Sigma \approx S^1)$. Montrer que

$$H^p(\mathbb{R}^3 - \Sigma) = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad p = 0, 1, 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

**Exercice 2.** Soit $F_k = \{m_1, \cdots, m_k\}$ un ensemble de $k$-points du plan $\mathbb{R}^2$. Montrer que $H^1(\mathbb{R}^2 - F_k) \cong \mathbb{R}^k$.

**Exercice 3.** Soient $D_1, \cdots, D_m$ $m$-disques fermés disjoints de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$H^p(\mathbb{R}^n - (\cup_{j=1}^m D_j)) = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad p = 0 \\ \mathbb{R}^m & si \quad p = n - 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$