Courants invariants par des groupes de transformations

Abdelhak Abouqateb

Université Cadi Ayyad
Faculté des sciences et Techniques Marrakech

R.N.G.D.A. 2018
Faculté des Sciences Ben M'sik
Casa - 13 et 14 juillet 2018

Introduction

Le problème de déterminer les distributions invariantes sur sur une variété différentiable par un groupe de Lie a été initié par divers auteurs : Methée, de Rham, Gärding, Tengstrand, Zhu, Ziemian, Herz $\cdots$

Introduction

Le problème de déterminer les distributions invariantes sur sur une variété différentiable par un groupe de Lie a été initié par divers auteurs : Methée, de Rham, Gärding, Tengstrand, Zhu, Ziemian, Herz $\cdots$

▶ Nous nous proposons de discuter l'étude des sections-distributions invariantes par une action propre d'un groupe de Lie.

Introduction

Le problème de déterminer les distributions invariantes sur sur une variété différentiable par un groupe de Lie a été initié par divers auteurs : Methée, de Rham, Gärding, Tengstrand, Zhu, Ziemian, Herz $\cdots$

▶ Nous nous proposons de discuter l'étude des sections-distributions invariantes par une action propre d'un groupe de Lie.

▶ Nous allons étudier le cas des G-fibrés vectoriels $E \to M$.

Introduction

Le problème de déterminer les distributions invariantes sur sur une variété différentiable par un groupe de Lie a été initié par divers auteurs : Methée, de Rham, Gärding, Tengstrand, Zhu, Ziemian, Herz $\cdots$

▶ Nous nous proposons de discuter l'étude des sections-distributions invariantes par une action propre d'un groupe de Lie.

▶ Nous allons étudier le cas des G-fibrés vectoriels $E \to M$. Lorsqu'on a une action différentiable $G \to \mathrm{Diff}(M)$, Le fibré tangent $TM \to M$ et le fibré produit extérieur $\bigwedge^p T^*M \to M$ en sont des exemples.

Introduction

Le problème de déterminer les distributions invariantes sur sur une variété différentiable par un groupe de Lie a été initié par divers auteurs : Methée, de Rham, Gärding, Tengstrand, Zhu, Ziemian, Herz $\cdots$

▶ Nous nous proposons de discuter l'étude des sections-distributions invariantes par une action propre d'un groupe de Lie.

▶ Nous allons étudier le cas des G-fibrés vectoriels $E \to M$. Lorsqu'on a une action différentiable $G \to \mathrm{Diff}(M)$, Le fibré tangent $TM \to M$ et le fibré produit extérieur $\bigwedge^p T^*M \to M$ en sont des exemples.

▶ Il s'agit de déterminer l'espace $(C_c^\infty(E))'_G$ des formes linéaires continues G-invariantes.

Topologie de Schwartz

Soit $E \stackrel{\pi}{\to} M$ un fibré vectoriel C^∞ au-dessus d'une variété différentiable de dimension m. Désignons par $C^\infty(E)$ l'espace de toutes les sections C^∞ muni de la topologie C^∞, celle-ci en fait un espace de Fréchet (i.e. espace vectoriel topologique localement convexe séparé métrisable et complet).

Topologie de Schwartz

Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel C^∞ au-dessus d'une variété différentiable de dimension m. Désignons par $C^\infty(E)$ l'espace de toutes les sections C^∞ muni de la topologie C^∞, celle-ci en fait un espace de Fréchet (i.e. espace vectoriel topologique localement convexe séparé métrisable et complet).

- $C_c^\infty(E)$ désignera l'espace des sections C^∞à support compact muni de sa topologie usuelle (de Schwartz) : Une suite (σ_n) converge pour cette topologie vers σ si, et seulement si, il existe un compact A de V tel que $supp(\sigma) \subset A$, $supp(\sigma_n) \subset A$ pour tout n, et $\sigma_n \rightarrow \sigma$ au sens de la topologie C^∞.

Topologie de Schwartz

Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel C^∞ au-dessus d'une variété différentiable de dimension m. Désignons par $C^\infty(E)$ l'espace de toutes les sections C^∞ muni de la topologie C^∞, celle-ci en fait un espace de Fréchet (i.e. espace vectoriel topologique localement convexe séparé métrisable et complet).

- $C_c^\infty(E)$ désignera l'espace des sections C^∞à support compact muni de sa topologie usuelle (de Schwartz) : Une suite (σ_n) converge pour cette topologie vers σ si, et seulement si, il existe un compact A de V tel que $supp(\sigma) \subset A$, $supp(\sigma_n) \subset A$ pour tout n, et $\sigma_n \to \sigma$ au sens de la topologie C^∞. Il s'agit en fait d'une topologie limite inductive stricte d'espaces de Fréchet, qui est plus fine que la topologie C^∞ et fait de $C_c^\infty(E)$ un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et complet (non métrisable en général) souvent appelé espace L.F.

Sections-distributions

Une forme linéaire continue sur $C_c^\infty(E)$ est dite **section-distribution** du fibré $E \xrightarrow{\pi} M$.

Sections-distributions

Une forme linéaire continue sur $C_c^\infty(E)$ est dite **section-distribution** du fibré $E \xrightarrow{\pi} M$.
Dans le cas particulier du fibré $\Lambda^{m-p} T^*(M)$ (produit extérieur $(n-p)$-fois du fibré cotangeant $T^*(M)$ à la variété M), on obtient la notion de p-**courant** (de De-Rham) sur la variété M (ou **distribution** (de Schwartz) sur M en prenant le fibré trivial $E = M \times \mathbb{R}$)

Sections-distributions

Une forme linéaire continue sur $C_c^\infty(E)$ est dite **section-distribution** du fibré $E \xrightarrow{\pi} M$.
Dans le cas particulier du fibré $\Lambda^{m-p} T^*(M)$ (produit extérieur $(n-p)$-fois du fibré cotangeant $T^*(M)$ à la variété M), on obtient la notion de p-**courant** (de De-Rham) sur la variété M (ou **distribution** (de Schwartz) sur M en prenant le fibré trivial $E = M \times \mathbb{R}$) : On note $\Omega_c^{m-p}(M)$ l'espace des $m-p$-formes différentielles à support compact ; un élément T du dual topologique $C^p(M)$ de $\Omega_c^{m-p}(M)$ est appelé p-courant (ou courant de degré p) sur M ; l'évaluation de T sur ω sera noté $< T, \omega >$.

G-fibrés vectoriels

Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un G-fibré vectoriel (La projection π est G-équivariante et l'action de G sur E est par des isomorphismes linéaires entre fibres.

G-fibrés vectoriels

Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un G-fibré vectoriel (La projection π est G-équivariante et l'action de G sur E est par des isomorphismes linéaires entre fibres.

▶ L'action induite de G sur $C_c^\infty(E)$ (et sur $C^\infty(E)$) est décrite par

G-fibrés vectoriels

Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un G-fibré vectoriel (La projection π est G-équivariante et l'action de G sur E est par des isomorphismes linéaires entre fibres.

► L'action induite de G sur $C_c^\infty(E)$ (et sur $C^\infty(E)$) est décrite par : pour $g \in G$ et σ une section du fibré, $g\sigma$ est la section donnée par :

$$(g\sigma)(x) = g\sigma(g^{-1}x) \quad \forall x \in M$$

G-fibrés vectoriels

Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un G-fibré vectoriel (La projection π est G-équivariante et l'action de G sur E est par des isomorphismes linéaires entre fibres.

► L'action induite de G sur $C_c^\infty(E)$ (et sur $C^\infty(E)$) est décrite par : pour $g \in G$ et σ une section du fibré, $g\sigma$ est la section donnée par :

$$(g\sigma)(x) = g\sigma(g^{-1}x) \quad \forall x \in M$$

Définition

σ est dite G-invariante si pour tout $g \in G$, $g \cdot \sigma = \sigma$

G-fibrés vectoriels

Soit $E \stackrel{\pi}{\to} M$ un G-fibré vectoriel (La projection π est G-équivariante et l'action de G sur E est par des isomorphismes linéaires entre fibres.

► L'action induite de G sur $C_c^\infty(E)$ (et sur $C^\infty(E)$) est décrite par : pour $g \in G$ et σ une section du fibré, $g\sigma$ est la section donnée par :

$$(g\sigma)(x) = g\sigma(g^{-1}x) \quad \forall x \in M$$

Définition

σ est dite G-invariante si pour tout $g \in G$, $g \cdot \sigma = \sigma$

Si X_h désigne un champ fondamental sur M associé à $h \in \mathcal{G}$, et $\sigma \in C^\infty(E)$, la dérivé de Lie $L_{X_h}\sigma$ est la section :

$$(L_{X_h}\,\sigma)(x) = \frac{d}{dt}_{|_{t=0}}((\exp th)\sigma)(x) \quad \forall x \in M$$

Actions propres

Definition

Une action de G sur M est **propre** si pour tout compact C de M l'ensemble

$$\{g \in G / gC \cap C \neq \emptyset\}$$

est compact.

Actions propres

Definition

Une action de G sur M est **propre** si pour tout compact C de M l'ensemble

$$\{g \in G / gC \cap C \neq \emptyset\}$$

est compact.

Exemple.

- Soit E un espace euclidien. Le groupe $G = O(E) \ltimes E$ des isométries de E opérant sur E par : $(u, b) \cdot x = u(x) + b$. Cette action est propre.
- Le groupe $\mathrm{Aut}(U, J)$ des transformations bi-holomorphes d'un ouvert borné simplement connexe de $\mathbb{C}$ opère proprement sur U.

Définition équivalente

On rappelle qu'une application $f : M \to N$ est dite propre si l'image réciproque d'un compact est un compact.

Proposition.

Définition équivalente

On rappelle qu'une application $f : M \to N$ est dite propre si l'image réciproque d'un compact est un compact.

Proposition. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'action de G sur M est propre.
2. L'application $G \times M \ni (g, x) \longmapsto (g \cdot x, x) \in M \times M$, est propre

Définition équivalente

On rappelle qu'une application $f : M \to N$ est dite propre si l'image réciproque d'un compact est un compact.

Proposition. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'action de G sur M est propre.
2. L'application $G \times M \ni (g, x) \longmapsto (g \cdot x, x) \in M \times M$, est propre
3. Pour tout compact C de M, l'application $G \times C \ni (g, x) \longmapsto g \cdot x \in M$, est propre.

Remarques

- Si G est compact, toute G-action est propre.

Remarques

- Si G est compact, toute G-action est propre.
- Si M est compact et $G \to \mathrm{Diff}(M)$ une action propre, alors G est compact.

Remarques

- Si G est compact, toute G-action est propre.
- Si M est compact et $G \to \mathrm{Diff}(M)$ une action propre, alors G est compact.
- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une action soit propre est la suivante :
  Pour toute suite $(g_n, x_n) \in G \times M$, telle que $g_n \cdot x_n \to y$ et $x_n \to x$, la suite $(g_n)_n$ admet une sous-suite convergente.

Exemples

- Soient G un sous-groupe fermé de H et K est un sous groupe compact de H, alors l'action homogène naturelle de G sur H/K est propre.

Exemples

- Soient G un sous-groupe fermé de H et K est un sous groupe compact de H, alors l'action homogène naturelle de G sur H/K est propre.
- Soit $H \times M \to M$ une action transitive d'un groupe de Lie H sur une variété M, tel que le groupe d'isotropie en un point soit compact.

Exemples

- Soient G un sous-groupe fermé de H et K est un sous groupe compact de H, alors l'action homogène naturelle de G sur H/K est propre.
- Soit $H \times M \to M$ une action transitive d'un groupe de Lie H sur une variété M, tel que le groupe d'isotropie en un point soit compact. Alors l'action induite de H sur M est propre.

Exemples

- Soient G un sous-groupe fermé de H et K est un sous groupe compact de H, alors l'action homogène naturelle de G sur H/K est propre.
- Soit $H \times M \to M$ une action transitive d'un groupe de Lie H sur une variété M, tel que le groupe d'isotropie en un point soit compact. Alors l'action induite de H sur M est propre. Par exemple l'action

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ est transitive et le groupe d'isotropie en i est $SO(2)$ donc cet action est propre.

Moyennisation.

Soit $(E \xrightarrow{\pi} M)$ un G-fibré vectoriel propre, G un groupe de Lie connexe et unimodulaire.
Pour tout $\sigma \in C_c^\infty(E)$ et pour tout $x \in M$, l'ensemble $\{g \in G \ / \ g^{-1}x \in supp(\sigma)\}$ est un compact de G, à l'extérieur duquel l'application $g \longmapsto (g\sigma)(x)$ est nulle. D'où l'existence de l'intégrale $\int_G (g \cdot \sigma)(x) dg$. On obtient ainsi une application linéaire

$$\begin{array}{cccc} m : & C_c^\infty(E) & \longrightarrow & C^\infty(E) \\ & \sigma & \longmapsto & m\sigma \end{array}$$

donnée par :

$$(m\sigma)(x) = \int_G (g \cdot \sigma)(x) dg$$

L’espace des sections à support G-compact

Le support d’une section G-invariante est G-stable par l’action. L’espace vectoriel de toutes les sections τ (qui sont C^∞ et non nécessairement à support compact) telles que $supp(\tau)$ soit G-stable par l’action et $supp(\tau)/G$ soit compact, sera désigné par $\overline{C}^\infty(E)$. Celui-ci coïncide avec $C^\infty(E)$ si l’espace des orbites M/G est compact, et n’est autre que $C_c^\infty(E)$ si le groupe G est compact.

Une topologie d'espace L.F. sur $\overline{C}^{\infty}(E)$

Notons $\mathcal{B}$ la famille des sous-ensembles fermés B de M tels que B soit G-stable et B/G soit compact. Pour tout B dans cette famille, l'espace $C_B^{\infty}(E)$ des sections à support dans B, muni de la topologie C_B^{∞} (:= celle induite par la topologie C^{∞}) est un espace de Fréchet (puisqu'il est fermé dans $C^{\infty}(E)$). On munira alors l'espace

$$\overline{C}^{\infty}(E) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} C_B^{\infty}(E)$$

de la topologie limite inductive stricte des topologies C_B^{∞} ; on obtient ainsi un espace L.F. : Une suite $(\tau_n)_n$ dans $\overline{C}^{\infty}(E)$ converge vers τ si, et seulement si, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $supp(\tau_n) \in B$, $supp(\tau) \in B$ et $\tau_n \to \tau$ au sens de la topologie C^{∞}.

L'espace $\overline{C}_G^{\infty}(E)$ des sections τ qui sont G-invariantes telles que $supp(\tau)/G$ soit compact, sera muni de la topologie induite de celle de $\overline{C}^{\infty}(E)$.

Cas des courants

Dans le cas du G-fibré vectoriel $\Lambda^p T^*(M)$, nous utiliserons la notation $\overline{\Omega}_G^p(M)$. Un courant $T \in C^p(M)$ est alors dit G-invariants si, pour toute forme $\omega \in \Omega_c^{m-p}(M)$ et tout $g \in G$, on a $< T, g\omega >=< T, \omega >$ (où $g\omega$ désigne la transposée de la forme ω par le difféomorphisme associé à l'élément g). Le sous espace de $C^p(M)$ des p-courants G-invariants sur M sera désigné par $C_G^p(M)$.

$E \to M$ un G-fibré vectoriel propre avec G connexe unimodulaire

L'opérateur de moyennisation

$$\begin{array}{rccc} m: & C_c^\infty(E) & \longrightarrow & C^\infty(E) \\ & \sigma & \longmapsto & m\sigma \end{array}$$

définie par :

$$(m\sigma)(x) = \int_G (g\sigma)(x)dg \quad pour \quad x \in V.$$

Théorème

1. *$Image(m) = \overline{C}_G^\infty(E)$.*
2. *en tant qu'application de $C_c^\infty(E)$ vers $\overline{C}_G^\infty(E)$, m est continue et ouverte.*
3. *Le noyau $\ker(m)$ est le sous-espace de $C_c^\infty(E)$ engendré par les éléments $L_X\tau$ où X est un champ fondamental.*

Théorème

Soit $E \xrightarrow{\pi} V$ un G- fibré vectoriel propre avec G connexe et unimodulaire.
Alors l'espace vectoriel topologique $(C_c^\infty(E))'_G$ des formes linéaires continues G-invariantes sur $C_c^\infty(E)$ est isomorphe au dual de $\overline{C}_G^\infty(E)$.

Corollaire

Soient G un groupe de Lie compact connexe et $E \xrightarrow{\pi} M$ un G-fibré vectoriel. Désignons par F l'un des espaces $C_c^\infty(E)$ ou $C^\infty(E)$. Alors on la décomposition topologique

$$F = F^G \oplus L_G F$$

($L_G F$ étant le sous-espace de F engendré par les éléments $L_X \tau$ pour X champ fondamental).

Corollaire

Soit $G \to \mathrm{Diff}(M)$ une action différentiable propre avec G connexe et M/G compact. Alors l'espace des p-courants G-invariants sur M s'identifie au dual topologique de $(\Omega^{m-p}(M))^G$, espace de toutes les $(m-p)$-formes G-invariantes sur M muni de la topologie C^∞.

Formes G-invariantes et courants G-invariants sur G/H

1. L'espace $(\Omega^k(G/H))^G$ des formes différentielles G-invariantes est isomorphe à l'espace $(\bigwedge^k(\mathcal{G}/\mathcal{H})^*)^H$. L'action de H sur $\bigwedge^k(\mathcal{G}/\mathcal{H})^*$ étant définie par :

$$(a \cdot \lambda)(u_1 + \mathcal{H}, \cdots, u_k + \mathcal{H}) =$$

$$\lambda(\mathrm{Ad}_{(a^{-1})}(u_1) + \mathcal{H}, \cdots, \mathrm{Ad}_{(a^{-1})}(u_k) + \mathcal{H}).$$

2. Lorsque H est **compact**, l'espace des p-courants G-invariants sur G/H est isomorphe à $(\bigwedge^{m-p}(\mathcal{G}/\mathcal{H})^*)^H$.

L'inclusion de $\overline{C}^{\infty}_{G}(E)$ dans l'image de m ?

Soit τ une section G-invariante de support B tel que B/G soit compact.

L'inclusion de $\overline{C}_G^\infty(E)$ dans l'image de m ?

Soit τ une section G-invariante de support B tel que B/G soit compact. Il existe un compact A tel que $B = GA$.

L'inclusion de $\overline{C}_G^\infty(E)$ dans l'image de m ?

Soit τ une section G-invariante de support B tel que B/G soit compact. Il existe un compact A tel que $B = GA$. En effet :
Soit $(V_i)_i$ un recouvrement localement fini de B par des ouverts relativement compacts ; on peut alors écrire $B/G = \cup_{j \in J} p(V_j)$ où J est un sous ensemble fini d'indices et $p : V \to V/G$ la projection canonique. Le compact $A = \cup_{j \in J} \overline{V_j}$ répond alors à la question.

L'inclusion de $\overline{C}^{\infty}_{G}(E)$ dans l'image de m ?

Soit τ une section G-invariante de support B tel que B/G soit compact. Il existe un compact A tel que $B = GA$. En effet :
Soit $(V_i)_i$ un recouvrement localement fini de B par des ouverts relativement compacts ; on peut alors écrire $B/G = \cup_{j \in J} p(V_j)$ où J est un sous ensemble fini d'indices et $p : V \to V/G$ la projection canonique. Le compact $A = \cup_{j \in J} \overline{V_j}$ répond alors à la question.
Considérons ensuite une fonction C^{∞} positive, $\psi : M \to \mathbb{R}$, à support compact telle que $\psi = 1$ sur A ; soit U un voisinage ouvert de A sur lequel ψ est strictement positive.

La section $\psi\tau$ est alors à support compact inclus dans GA ; de plus puisque τ est G-invariante, il est facile de vérifier l'égalité :

$$m(\psi\tau) = (M_\psi)\tau$$

où $M_\psi : V \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée par :
$(M_\psi)(x) = \int_G \psi(g^{-1}x)dg$.

La section $\psi\tau$ est alors à support compact inclus dans GA ; de plus puisque τ est G-invariante, il est facile de vérifier l'égalité :

$$m(\psi\tau) = (M_\psi)\tau$$

où $M_\psi : V \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée par : $(M_\psi)(x) = \int_G \psi(g^{-1}x)dg$. Pour tout $x \in U$, la fonction : $g \in G \mapsto \psi(g^{-1}x)$ est positive sur l'ouvert $\rho_x^{-1}(U)$ de G (avec $\rho_x : g \in G \mapsto (g^{-1}x) \in V$), on en déduit que : $(M_\psi)(x) > 0$ pour tout $x \in U$. De plus, il est facile de vérifier que M_ψ est une fonction G-invariante (i.e. $(M_\psi)(ax) = (M_\psi)(x) \ \ \forall a \in G, \ \ \forall x \in V$). D'où : M_ψ est strictement positive sur le saturé GU de l'ouvert U.

Considérons alors la section $J_A\tau$ donnée par :

$$(*) \qquad (J_A\tau)(x) = \begin{cases} (\frac{\psi}{M_\psi}\tau)(x) & si\ x \in GU \\ o & sinon \end{cases}$$

Considérons alors la section $J_A\tau$ donnée par :

$$(*) \qquad\qquad (J_A\tau)(x) = \begin{cases} (\frac{\psi}{M_\psi}\tau)(x) & si\ x \in GU \\ o & sinon \end{cases}$$

Cette section est bien définie sur l'ouvert GU de M, et nulle à l'extérieur du fermé GA de M (puisque $GA = supp(\tau)$), donc $J_A\tau$ est une section C^∞, qui est clairement à support compact ($supp(J_A\tau) \subset supp(\psi)$).
On vérifie ensuite facilement l'égalité : $m(J_A\tau) = \tau$.
Ainsi $m : C_c^\infty(E) \to \overline{C}^\infty_{Gs}(E)$ est surjective.