Introduction a la cohomologie de de Rham

Abdelhak ABOUQATEB
Université Cadi Ayyad - Marrakech

Rencontre du GGTM
Géométrie, Topologie et systèmes dynamiques
Casablanca, du 26-28 octobre 2011

Résumé. Dans des problèmes de géométrie ou topologie, la cohomologie joue un rôle fondamental (cohomologie de de Rham, cohomologie singulière, cohomologie bornée, cohomologie de groupes, cohomologie de Hochschild, cohomologie cyclique, cohomologie feuilletée, cohomologie basique, cohomologie de Poisson...). Elle permet souvent de mettre en place des théorèmes importants (de classifications, d'annulation, d'obstruction, d'indice, de résidus).
La cohomologie de de Rham est un outil algébrique qui mesure la complexité topologique d'une variété différentiable ; c'est un invariant topologique définit à l'aide de formes différentielles.
Nous allons donner les principales propriétés de cette cohomologie : Lemme de Poincaré, Invariance par homotopie, Lemme de Mayer-Vietoris, Théorème de de Rham, Dualité de Poincaré, Degré d'applications différentiables et Théorème de Künneth. Ensuite, on démontre un théorème selon lequel la cohomologie des formes invariantes sous l'action d'un groupe compact connexe permet de calculer toute la cohomologie de la variété. Comme application, on calcule la cohomologie d'un groupe de Lie compact connexe et on en déduit que les seules sphères qui possèdent une structure de groupe de Lie sont ceux de dimensions 0,1 et 3.

1 Formes différentielles

Soit V une variété différentielle de dimension n. Soit $p \in \{1, \dots, n\}$. Une p-forme différentielle ω sur V est la donnée d'une section C^∞ du fibré produit extérieur $\bigwedge^p (TV)^*$; il s'agit donc d'une application qui associe à tout point $x \in V$ une p-forme multilinéaire alternée ω_x sur l'espace tangent $T_x V$ et telle pour toute famille $X^1, \dots, X^p$ de champs de vecteurs sur V, l'application $\omega(X^1, \cdots, X^p)$ définie par :

$$\omega(X^1, \cdots, X^p)(x) = \omega_x(X^1_x, \cdots, X^p_x)$$

soit différentiable. Ainsi, si on désigne par $\nu(V)$ le $C^\infty(V)$-module des champs de vecteurs sur V, alors l'application $(X^1, \cdots, X^p) \mapsto \omega(X^1, \cdots, X^p)$ est $C^\infty(V)$-multi-linéaire alternée de

$\nu(V) \times \cdots \times \nu(V)$ à valeurs dans $C^\infty(V)$. Réciproquement, en partant d'une telle application, on peut définir naturellement une section différentiable de $\bigwedge^p(TV)^*$.
Lorsque $(U, (x_1, \cdots, x_p))$ désigne un système de coordonnées locales, l'expression locale de ω_U (restriction de ω à l'ouvert U) est donnée par :

$$\omega_U = \sum_I f_I dx_I$$

où la sommation porte sur l'ensemble des multi-indices $I = (i_1 < \ldots < i_p)$, $f_I \in C^\infty(V)$ et $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$. On peut évidement procéder par recollement pour définir une forme différentielle : Si on part d'un recouvrement de V par des ouverts (U_α) et que l'on se donne sur une famille de p-formes différentielles ω_α telle que sur les intersections non vides $U_\alpha \bigcap U_\beta$ on a $\omega_\alpha = \omega_\beta$, alors il existe une forme différentielle globale ω sur V dont la restriction à chaque U_α coïncide avec U_α.

On pose $\Omega^0_{DR}(V) = C^\infty(V)$ et on désignera par $\Omega^p_{DR}(V)$ l'espace des p-formes différentielles sur V. L'espace vectoriel gradué :

$$\Omega^*_{DR}(V) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Omega^p_{DR}(V)$$

est muni d'une structure d'algèbre : Si $\omega \in \Omega^p(V)$ et $\eta \in \Omega^q(V)$, le produit $\omega \wedge \eta$ est la $p+q$-forme différentielle définie par :

$$\omega \wedge \eta(X^1, \ldots, X^{p+q}) = \sum sign(\sigma) \omega(X^{i_1}, \cdots, X^{i_p}) \eta(X^{j_1}, \cdots, X^{j_p})$$

où la sommation porte sur l'ensemble des multi-indices $I = (i_1 < \ldots < i_p)$, $J = (j_1 < \ldots < j_p)$ et où $sign(\sigma)$ est la signature de la permutation $(1, \ldots, p+q) \mapsto (i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q)$. Dans un système de coordonnées $(U, (x^1, \ldots, x^p))$, si $\omega = f dx_I$ et $\eta = g dx_J$ alors $\omega \wedge \eta = fg dx_I \wedge dx_J$.

Soit $\psi : V \to W$ est une application C^∞ entre deux variétés différentiables V et W. Pour tout $x \in V$, on désigne par $T_x\psi : T_xV \to T_xW$ l'application linéaire tangente au point x. On définit $\psi^* : \Omega^p(W) \to \Omega^p(V)$ en posant :

$$\psi^*(\omega)(X^1, \ldots, X^p)(x) = \omega_x(T_x\psi(X^1), \ldots, T_x\psi(X^p)$$

Et pour $p = 0$, on pose $\psi^*(f) = f \circ \psi$.
Nous avons les propriétés :

1. $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.
2. $\psi^*(\beta \wedge \eta) = \psi^*(\beta) \wedge \psi^*(\eta)$.

2 Complexe de de Rham

Soit V une variété différentiable. Pour toute p-forme différentielle ω la différentielle $d\omega$ est la $(p+1)$-forme différentielle définie par :

$$d\omega(X^0, \ldots, X^p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i X^i(\omega(X^0, \cdots, \widehat{X^i}, \cdots, X^p)) +$$

$$\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X^i,X^j],X^0,\cdots,\widehat{X^i},\cdots,X^p)$$

Lorsque $f \in \Omega^0(V)$, la différentielle df est la 1-forme différentielle donnée par $df(X) = Xf$ pour tout $X \in \nu(V)$. Si U est un ouvert avec un système de coordonnées $(x_1,\dots,x_p)$, nous avons l'expression

$$d(f dx_I) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_I$$

Nous obtenons ainsi un opérateur linéaire

$$d : \Omega^*_{DR}(V) \to \Omega^{*+1}_{DR}(V)$$

qui a la propriété :

$$d \circ d = 0.$$

On appelle d la *différentielle extérieure* sur V ou différentielle usuelle de de Rham. Le complexe de de Rham est le couple $(\Omega^*_{DR}(V), d)$. Une p-forme ω est dite *fermée* si $d\omega = 0$, elle est dite *exacte* s'il existe $\beta \in \Omega^{p-1}_{DR}(V)$ telle que $\omega = d\beta$. L'espace des formes exactes $\mathrm{im}(d : \Omega^{p-1}_{DR}(V) \to \Omega^p_{DR}(V))$ est un sous-espace de l'espace des formes fermées $\ker(d : \Omega^p_{DR}(V) \to \Omega^{p+1}_{DR}(V))$. On appellera p^{ime} espace de *cohomologie de de Rham* de V le quotient :

$$H^p_{DR}(V) = \frac{\ker(d : \Omega^p_{DR}(V) \to \Omega^{p+1}_{DR}(V))}{\mathrm{im}(d : \Omega^{p-1}_{DR}(V) \to \Omega^p_{DR}(V))}$$

Pour tous $\omega \in \Omega^p(V)$ et $\eta \in \Omega^q(V)$ on a : $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$. On dit que d est une différentielle d'algèbre. Une structure d'algèbre est induite sur

$$H^*_{DR}(V) = \bigoplus_{p=0}^{n} H^p_{DR}(V)$$

Pour toute fonction $\psi : V \to W$, on a $\psi^*(d\beta) = d(\psi^*\beta)$. Ce qui permet d'obtenir un homomorphisme d'algèbres graduées $H^*(\psi) : H^*_{DR}(W) \to H^*_{DR}(W)$.
Dans ce qui suit nous allons donner les principales propriétés et des exemples de calcul de la cohomologie de de Rham.

2.0.1 Invariance par homotopie

Définition 2.1. *Soient $\varphi, \psi : V \to W$ deux applications C^∞. On dira que φ et ψ sont différentiablements homotopes s'il existe une application différentiable $H : V \times \mathbb{R} \to W$ ayant les propriétés :*

1. *$H(x,t) = \varphi(x)$ pour tout $t \leq 0$.*
2. *$H(x,t) = \psi(x)$ pour tout $t \geq 1$.*

Proposition 2.1 (Opérateur d'homotopie). *Deux applications différentiables différentiablement*[1] *homotopes induisent la même application en cohomologie de de Rham.*

Démonstration. Soit $F : V' \times [0,1] \to V$ une homotopie différentiable entre deux applications différentiables f_0 et f_1 de V' dans V. D'après la formule de Stokes, l'intégration $\fint_0^1$ des formes différentielles sur $V' \times [0,1]$ le long de la fibre de la projection $p_1 : V' \times [0,1] \to V'$, composée avec $F^* : \Omega^*_{DR}(V) \to \Omega^*_{DR}(V' \times [0,1])$ vérifie $\fint_0^1 \circ\, d \circ F^* + d \circ \fint_0^1 \circ\, F^* = f_1^* - f_0^*$. Par conséquent $f_1^*(\alpha) - f_0^*(\alpha) = d\big(\fint_0^1 \circ\, F^*(\alpha)\big)$ dès que α est une forme fermée. ☐

Exemple 2.1. *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ (contenant le point 0). Alors, pour toute ω une $(p+1)$-forme fermée sur U, on a : $\omega = d(H(\omega))$ où H est l'opérateur défini par*

$$H(f dx_{j_0} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{p+1}}) = (\int_0^1 t^p f(tx) dt) \cdot (\sum_{i=0}^{p} (-1)^i x_{j_i} dx_{j_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{j_i}} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p})$$

Ainsi : $H^p(U) = 0$ pour tout $p \geq 1$.

Définition 2.2. *Soit $\iota : W \hookrightarrow V$ une sous-variété plongée. On dira que W est un retract par déformation de V s'il existe une application différentiable $r : V \to W$ (rétraction) telle que :*

1. *$r \circ \iota = Id_W$,*
2. *$\iota \circ r$ est homotope à Id_V.*

Exemple 2.2. *Pour tout n, la sphère S^n est un retract par déformation de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. La rétraction $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ est définie par $r(x) = \frac{x}{|x|}$. Nous obtenons ainsi que pour tout disque épointé $\dot{D}$, on a : $H^*(\dot{D}) = H^*(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = H^*(S^n)$.*

Corollaire 2.1. *Si W est un retract par déformation de V, alors : W et V ont mêmes espaces de cohomologie de de Rham.*

2.0.2 Lemme de Mayer-Vietoris

Proposition 2.2. *Soient U_1 et U_2 deux ouverts d'une variété différentiable V tels que $M = U_1 \cup U_2$. Alors il existe une suite exacte courte :*

$$0 \longrightarrow \Omega^*_{DR}(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{J} \Omega^*_{DR}(U_1) \oplus \Omega^*_{DR}(U_2) \xrightarrow{\psi} \Omega^*_{DR}(U_1 \cap U_2) \to 0$$

où $\iota : \omega \mapsto (\omega_{|U_1}, \omega_{|U_2})$ et $\psi : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha_{|U_1 \cap U_2} - \beta_{|U_1 \cap U_2}$.

Démonstration. Seule la surjectivité de ψ n'est pas immédiate, pour l'établir on considère une partition de l'unité $\{\rho_1, \rho_2\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_1, U_2\}$ ($\mathrm{Supp}(\rho_i) \subset U_i$ et $\rho_1 + \rho_2 = 1$) puis il suffit d'écrire $\omega = \rho_2\omega - (-\rho_1\omega)$ et de remarquer que $(\rho_2\omega, -\rho_1\omega) \in \Omega^*_{DR}(U_1) \oplus \Omega^*_{DR}(U_2)$.

1. On démontre que si deux applications différentiables sont topologiquement homotopes (i.e. l'homotopie H est seulement continue) alors ils sont différentiablement homotopes. Toute application continue entre variétés différentiables et homotope à une application différentiable ([1]) pp.213

Corollaire 2.2. *Pour tout recouvrement de V par deux ouverts $\{U_1, U_2\}$, il existe une suite exacte longue (naturelle) de cohomologie :*

$$\cdots \longrightarrow H^p_{DR}(V) \xrightarrow{H(\iota)} H^p_{DR}(U_1) \oplus H^p_{DR}(U_2) \xrightarrow{H(\psi)} H^p_{DR}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}_{DR}(V) \longrightarrow \cdots$$

où δ est l'opérateur connectant.

Exemple 2.3.
1. *La cohomologie de la sphère S^n : $H^p(S^n) = \mathbb{R}$ pour $p = 0$ ou $p = n$, et $H^p(S^n) = 0$ pour $0 < p < n$.*
2. *Dans ce qui suit $\Sigma_k = \{m_1, \cdots, m_k\}$ désigne un ensemble de k-points du plan $\mathbb{R}^2$. On peut recouvrir $\mathbb{R}^2$ par deux ouverts $U = \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_k$ et U_0 la réunion de k-disques disjoints $D_1, \cdots, D_k$ centrés respectivement autour des points $m_1, \cdots, m_k$. En écrivant la suite exacte de Mayer-Vietoris associée à ce recouvrement nous obtenons : $H^1(U) \cong \mathbb{R}^k$. Conséquences : Si $k \neq k'$, alors $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_k$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_{k'}$ ne sont pas homéomorphes.*

Exemple 2.4 (Cohomologie de l'espace projectif compelxe.)**.** *L'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est la base du S^1-fibré principal (fibration de Hopf) :*

$$\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

Désignons par A un champ de vecteurs fondamental associé à l'action de S^1 sur S^{2n+1}. On dira qu'une forme différentielle α sur S^{2n+1} est basique si elle est à la fois S^1-invariante et verticale : $i_A\alpha = 0$. Il est facile de voir que l'ensemble des formes basiques $\Omega^*_b(S^{2n+1})$ est un sous-complexe du complexe de de Rham et que l'injection $\pi^* : \Omega^*_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \hookrightarrow \Omega^*(S^{2n+1})$ définit un isomorphisme de $\Omega^*_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ sur $\Omega^*_b(S^{2n+1})$. Ainsi le calcul de $H^*_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ est ramené au calcul de la cohomologie de $\Omega^*_b(S^{2n+1})$. Pour cela, on montre (exercice) que nous avons une suite axacte courte :

$$0 \longrightarrow \Omega^*_b(S^{2n+1}) \xrightarrow{\iota} (\Omega^*_{DR}(S^{2n+1}))^{S^1} \xrightarrow{i_A} \Omega^{*-1}_b(S^{2n+1}) \to 0$$

où le complexe du milieu est celui des formes S^1-invariantes[2]*. En écrivant la suite exacte longue de cohomologie associée, nous obtenons que pour tout $j = 1, \cdots, n$ on a*

$$H^{2j}_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) = \mathbb{R} \quad et \quad H^{2j+1}_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) = 0.$$

3 Théorème de de Rham

Le théorème de de Rham établit une identification entre la cohomologie de de Rham et la cohomologie singulière réelle. C'est ce que nous allons préciser dans ce qui suit. Nous allons donc commencer par rappeler la cohomologie singulière.

Pour tout entier $p \geq 1$, le p-simplexe standard dans $\mathbb{R}^p$ est le compact $\triangle_p$ défini par :

$$\triangle_p = \{(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p / \sum_{i=1}^{p} x_i \leq 1, \text{ et } x_i \geq 0 \text{ pour tout } i\}.$$

2. Puisque S^1 est compacte connexe, la cohomologie de ce complexe est la même que $H^*_{DR}S^{2n+1}$ cf. Th. 4.3.2 page 89

Pour $p = 0$ on pose $\triangle_0 = \{0\}$.
On définit, pour tous $p \geq 0$ et $0 \leq i \leq p+1$, l'application $k_i^p : \triangle_p \to \triangle_{p+1}$ en posant :

$$\begin{aligned} k_i^p(x_1, \cdots, x_p) &= (x_1, \cdots x, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_p) \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq p+1 \ \text{ et } \ p \geq 1 \\ &= (1 - \textstyle\sum_{i=1}^p x_i, x_1, \cdots, x_p) \quad \text{si} \quad i = 0 \ \text{ et } \ p \geq 1 \\ &= 1 \quad \text{si} \quad i = 0 \ \text{ et } \ p = 0 \\ &= 0 \quad \text{si} \quad i = 1 \ \text{ et } \ p = 0 \end{aligned}$$

Soit V une variété différentiable. Un p-simplexe singulier sur V est la donnée d'une application $\sigma : \triangle_p \to V$. On appelle p-chaine singulière réelle toute combinaison linéaire finie $c = \sum_\sigma a_\sigma \sigma$ à coefficients réels ($a_\sigma \in \mathbb{R}$) de p-simplexes singuliers $\triangle_p$. L'ensemble $C_p(V; \mathbb{R})$ de telles p-chaines singulières est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel [3].
A tout p-simplexe σ sur V ($p \geq 1$), et pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, p\}$ on peut définir le $(p-1)$-simplexe $\partial_i \sigma = \sigma \circ k_i^{p-1}$. En effectuant la somme alternée : $\sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_i \sigma$, nous obtenons une $(p-1)$-chaine qu'on notera $\partial\sigma$. Nous pouvons ainsi définir un opérateur linéaire

$$\partial : C_p(V; \mathbb{R}) \to C_{p-1}(V; \mathbb{R})$$

Lemme 3.1. *$C_*(V; \mathbb{R})$ est un compexe différentiel : $\partial \circ \partial = 0$.*

L'espace vectoriel dual $C^*(V; \mathbb{R}) = Hom(C_*(V; \mathbb{R})$ muni de la différentielle transposée ∂', donnée par $< \partial' T, c >=< T, \partial c >$, est aussi un complexe différentiel. Les éléments de $C^*(V; \mathbb{R})$ sont appelés cochaînes sur V. La cohomologie du complexe $(C^*(V; \mathbb{R}), \partial')$ est appelée *cohomologie singulière* réelle de V ; et notée $H^*(V, \mathbb{R})$.

A toute p-forme $\omega \in \Omega^p(V)$, on peut associer la p-cochaîne $I_V(\omega)$ définie par :

$$I_V(\omega)(c) = \int_c \omega.$$

Nous obtenons ainsi une application linéaire :

$$I_V : \Omega^*(V) \to C^*(V; \mathbb{R}).$$

appelé homomorphisme de de Rham. Comme conséquence d'un théorème de Stokes, l'opérateur I_V commute aux différentiels et induit donc par passage à la cohomologie un homomorphisme : $H^*(I_V) : H^*_{DR}(V) \to H^*(V; \mathbb{R})$.

Théorème 3.1. *Pour toute variété différentiable, l'homomorphisme $H^*(I_V)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués.*

3. $C_p(V; \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel réel engendré par l'ensemble des p-simplexes. Cet espace peut être défini pour n'importe quel espace topologique

On peut consulter [5] (pp. 212) pour une de ce théorème.[4]

Corollaire 3.1. *Soit $\omega \in \Omega^p_{DR}(V)$ une forme différentielle fermée telle que $\int_c \omega = 0$ pour tout cycle $c \in C_p(V;\mathbb{R})$, alors ω est exacte.*

Corollaire 3.2. *Si deux variétés différentiables sont homéomorphes alors leurs espaces de cohomologies de de Rham sont isomorphes.*

4 Dualité de Poincaré

Soit V une variété différentiable orientée de dimension n. Pour tout p, on peut définir une application linéaire :

$$D_V : H^p_{DR}(V) \to (H^{n-p}_c(V))^*$$

en posant :

$$< D_V([\alpha]), [\beta] >= \int_V \alpha \wedge \beta$$

Théorème 4.1. *L'application D_V est un isomorphisme linéaire.*

Nous allons discuter quelques cas.
1) <u>Cas où V est connexe orientée</u>.
En intégrant les n-formes à support compact sur V nous obtenons un isomorphisme canonique

$$\int_V : H^n_c(V) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$$

L'élément $\theta_V \in H^n_c(V)$ tel que $\int_V \theta_V = 1$ est appelé *classe fondamentale* de V et noté $[V]$.

2) <u>Cas où V est compacte connexe orientée</u>.
(i) Pour tout $a \in H^p_{DR}(V)$ il existe $b \in H^{n-p}_{DR}(V)$ tel que $a \cdot b = [V]$.
(ii) Les nombres de Betti, définis par $b_p = \dim(H^p_{DR}(V))$, satisfont les relations $b_p = b_{n-p}$. En particulier

$$\chi(V) = \sum (-1)^p b_p = (-1)^n \sum (-1)^{n-p} b_{n-p} = (-1)^n \chi(V)$$

Et parsuite $\chi(V) = 0$ dès que $\dim(V)$ est impaire.

3) <u>Cas où V est connexe et non orientable</u>. Nous allons montrer $H^n_{DR}(V) = 0$.
Considérons le revêtement orientable à deux feuillets $\widetilde{V} \xrightarrow{\pi} V$. $\widetilde{V}$ variété connexe orientable munie d'une involution $s : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$. L'espace des formes $\Omega^*(V)$ s'identifie à l'espace des formes $\alpha \in \Omega^*(\widetilde{V})$ et qui sont $\mathbb{Z}_2$-invariante (i.e. $s^*(\alpha) = \alpha$). Nous obtenons : $H^n_{DR}(V) = (H^n_{DR}(\widetilde{V}))^{\mathbb{Z}_2}$.
Nous en déduisons alors :

- Si V est non compacte ; $\widetilde{V}$ est aussi non compacte ce qui aboutit à $H^n_{DR}(\widetilde{V}) = 0$ et parsuite $H^n_{DR}(V) = 0$.

4. Une classe de cohomologie $\theta \in H^p_{DR}(V)$ est dite entière si son image $I_V(\theta)$ est dans l'image de l'homorphisme naturel $H^*(V;\mathbb{Z}) \to H^*(V;\mathbb{R})$; ce qui signifie que pour tout cycle $c \in C_p(V;\mathbb{Z})$ l'intégrale $\int_c \theta \in \mathbb{Z}$. Ceci est notamment le cas de la classe d'Euler, des classes de Pontryagin et des classes de Chern.

– Si V est compacte. Soit $a = [\alpha] \in H^n_{DR}(\widetilde{V})$ telle que $[s^*\alpha] = [\alpha]$. Nous avons :$\int_{\widetilde{V}} s^*\alpha = \int_{\widetilde{V}} \alpha$, et puisque le difféomorphisme s renverse l'orientation de $\widetilde{V}$ (car sinon, la variété V serait orientable) nous obtenons $\int_{\widetilde{V}} \alpha = 0$. Ce qui aboutit à $a = 0$. Ainsi $H^n_{DR}(V) = 0$.

4) Soit V une variété compacte orientée de dimension n et $\pi : E \to V$ un fibré vectoriel orienté de rang q. Une orientation naturelle de la variété E en est alors induite. Par dualité de Poincaré, nous obtenons des isomorphismes : $\mathcal{P}_E : H^{q+k}_c(E) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(E)$ et $\mathcal{P}_V : H^k(V) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(V)$. D'un autre côté, l'homomorphisme $H_*(\pi) : H_*(V) \to H_*(E)$ est un isomorphisme (pour une section arbitraire s du fibré on a $\pi \circ s = id_V$ et $s \circ \pi$ est homotope à id_E : il suffit d'utiliser la structure d'espace vectoriel des fibres). Nous obtenons ainsi par composition un isomorphisme :

$$\mathcal{T} : H^*(V) \xrightarrow{\cong} H^{q+*}_c(E)$$

c'est l'*isomorphisme Thom*[5] dans le complexe de de Rham.

5 Degré

Soit $f : V \to W$ une application C^∞ entre variétés différentielles connexes compactes[6] orientées et de même dimension n. On appelle *degré* de f et on note $\deg f$ le nombre réel tel que

$$H^n(f)\theta_W = \deg(f)\theta_V$$

Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega^n_{DR}(W)$, on a $\int_V f^*(\omega) = \deg(f) \int_W \omega$.

Proposition 5.1. *1. Si $f, g : V \to W$ sont homotopes alors* $\deg(f) = \deg(g)$. [7]

2. $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$

3. Si $\deg(f) \neq 0$ *alors f est surjective.*

4. Si f est un difféomorphisme, alors $\deg(f) = +1$ *si f préserve l'orientation et* $\deg(f) = -1$ *sinon.*

La démonstration ne pose aucun problème.

Exercice 5.1. *Soit V une variété différentiable compacte connexe orientée et $f : S^n \to V$ une application C^∞. Montrer que si* $\deg(f) \neq 0$*, alors $H^p_{DR}(M) = 0$ pour tout $1 \leq p \leq n-1$. (Indication : On peut utiliser la dualité de Poincaré de V et de S^n pour montrer que $H^p(f)$ est injective).*

Nous allons montrer que le degré est un entier relatif $\deg(f) \in \mathbb{Z}$. L'argument se base sur une propriété importante des valeurs régulières. Soit $f : V \to W$ une application C^∞ entre variétés différentiables (non nécessairement de même dimension) ; on dira que $y \in W$ est une *valeur*

5. Dans le cas où V est compacte, l'isomorphisme de Thom découle de la dualité de Poincaré

6. Pour les variétés non compactes, il faut se restreindre à la catégorie des applications f qui sont propres.

7. Dans le cas $V = W = S^n$, on a l'équivalence entre l'égalité $\deg(f) = \deg(g)$ et le fait que f et g soient homotopes, c'est le théorème de Hopf [?] pp. 270

régulière de f si pour tout $x \in f^{-1}(y)$ l'application linéaire tangente $T_x f : T_x V \to T_y W$ est sujective. En particulier, tout point y qui n'est pas dans l'image $f(V)$ est une valeur régulière.

Théorème 5.1 (Brown-Sard)**.** *Pour toute application différentiable $f : V \to W$, l'ensemble des valeurs régulières est dense dans W.*

Revenons maintenant au cas où $\dim(V) = \dim(W) = n$ et soit y une valeur régulière de f. Pour tout $x \in f^{-1}(y)$ l'application $T_x f$ est alors un isomorphisme, et par suite un difféomorphisme local autour x. En particulier les éléments de $f^{-1}(y)$ sont des points isolés. La compacité de V implique alors que $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini $\{m_1, \cdots, m_k\}$. Il existe des voisinages ouverts disjoints D_i de m_i et un voisinage ouvert U de y tels que $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^k D_i$ et la restriction de f à D_i soit un difféomorphisme sur U. Soit $\omega \in \Omega_c^n(U)$ telle que $\int_W \omega = 1$, nous obtenons ainsi que $f^*(\omega) = \sum_{i=1}^k \omega_i$ avec ω_i est l'image réciproque de ω par le difféomorphisme $f_{|D_i}$. Il en découle :

$$\int_V f^*(\omega) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x) = 1$ si $T_x f : T_x V \to T_x W$ préserve l'orientation et $\epsilon(x) = -1$ sinon.
Nous venons ainsi d'établir que $\deg(f)$ est un entier.

6 Théorème de Künneth et Leray-Hirsch

Soient V et W deux variétés différentiables. L'espace produit tensoriel $\Omega_{DR}^*(V) \otimes \Omega_{DR}^*(W)$ est muni d'une structure canonique d'algèbre différentielle graduée :
(i) La graduation :

$$\Omega_{DR}^*(V) \otimes \Omega_{DR}^*(W) = \bigoplus_r E_r, \quad \text{avec } E_r = \oplus_{p+q=r}(\Omega_{DR}^p(V) \otimes \Omega_{DR}^q(W))$$

(ii)La multiplication :

$$(\alpha \otimes \beta) \cdot (\gamma \otimes \delta) = (-1)^{qr}(\alpha \wedge \gamma) \otimes (\beta \wedge \delta)$$

où $q = \deg \beta$ et $r = \deg \gamma$.

(iii) La différentielle :

$$d(\alpha \otimes \beta) = (d\alpha) \otimes \beta + (-1)^p \alpha \otimes (d\beta)$$

où $p = \deg \alpha$.

Une application linéaire

$$k : \Omega_{DR}^*(V) \otimes \Omega_{DR}^*(W) \longrightarrow \Omega_{DR}^*(V \times W)$$

est défini par : $k(\alpha \otimes \beta) = \pi_V^*\alpha \wedge \pi_W^*\beta$ (où $\pi_V : V \times W \to V$ et $\pi_W : V \times W \to W$ sont les projections canoniques). Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'un homomorphisme d'algèbre différentielles graduées, nous obtenons ainsi par passage à la cohomologie un homomorphisme :

$$H(k) : H^*_{DR}(V) \otimes H^*_{DR}(W) \longrightarrow H^*_{DR}(V \times W)$$

C'est l'homomorphisme de Künneth.

Théorème 6.1 (Théorème de Künneth)**.** *Si* $\dim(H^*_{DR}(V))$ *ou* $\dim(H^*_{DR}(W))$ *est finie, alors :* $H(k)$ *est un isomorphisme.*

Remarque 6.1.

- *Toute variété admet un bon recouvrement (i.e. un recouvrement ouvert* $\{U_\alpha\}$ *dont toutes les intersections finis* $U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}$ *soient difféomorphes à* $\mathbb{R}^n$*). Si une variété* V *admet un bon recouvrement fini (c'est le cas par exemple lorsque* V *est compacte), alors la cohomologie de de Rham de* V *est de dimension finie. On démontre ceci en utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris et en utilisant un raisonnement par récurence sur le cardinal du recouvrement.*
- *Comme application du théorème de Künneth, on montre que la caractéristique d'Euler-Poincaré du produit* $V \times W$ *est égale au produit de celle de* V *et de celle de* W *:*

$$\chi(V \times W) = \chi(V) \cdot \chi(W).$$

- *Soit* $\pi : E \to V$ *un fibré localement trivial de fibre* F*. Supposons l'existence de classes de cohomologies* $\{e_1, \cdots, e_k \in H^*_{DR}(E)\}$ *telles que pour tout* $x \in V$ *les restrictions des* e_i *à la fibre* F_x *forment une base de l'espace vectoriel* $H^*_{DR}(F_x)$*. Alors, on a l'isomorphisme :*

$$H^*_{DR}(E) \cong H^*_{DR}(V) \otimes H^*_{DR}(F)$$

C'est le théorème de Leray-Hirsch (dont la démonstration est analogue à celle de Künneth).

7 Cohomologie et actions de groupes

Soit V une variété différentiable sur laquelle opère différentiablement à droite un groupe de Lie G. Pour tout $g \in G$ et $\alpha \in \Omega^*(V)$ on pose $g.\alpha := R_g^*(\alpha)$; nous obtenons ainsi une action de G sur $\Omega^*(V)$. Il est facile de voir que cette action passe à la cohomologie et induit une action de G sur l'espace de cohomologie $H^*_{DR}(V)$.

Remarque 7.1. *Si* G *est connexe alors pour tout* p *on a* $(H^p_{DR}(V))^G = H^p(V)$*. Autrement dit, l'action de* G *sur la cohomologie est triviale ; la raison est que pour tout* $g \in G$ *le difféomorphisme* R_g *est homotope à l'identité de* V *(il suffit de considérer* $\gamma : [0,1] \to G$ *un chemin dans* G *reliant* e *et* g *et définir ensuite l'homotopie* $H(t,x) = \gamma(t).x$ *).*

Théorème 7.1. *si* G *est compact alors l'inclusion* $\iota : (\Omega^*(V))^G \hookrightarrow \Omega^*(V)$ *induit en cohomologie un isomorphisme de* $H^*((\Omega^*(V))^G)$ *sur* $(H^*_{DR}(V))^G$*.*

Puisque G est compact, il existe une unique r-forme $\mu_G \in \Omega^r_{DR}(G)$ (où r désigne la dimension de G), bi-invariante, normalisée par la condition $\int_G \mu_G = 1$.

Notons $F : V \times G \to V$ l'action (supposée à droite) de G sur W. Nous allons définir une rétraction $m : \Omega^*_{DR}(V) \to [\Omega^*_{DR}(V)]^G$, qui consiste à prendre, pour $\alpha \in \Omega^*_{DR}(V)$, la "moyenne" $m(\alpha)$ de tous les éléments $(R_g)^*\alpha$. Elle est définie par la formule

$$m(\alpha) = \fint_G F^*(\alpha) \wedge (p_2)^*(\mu_G),$$

$\fint_G : \Omega^*_{DR}(V \times G) \to \Omega^*_{DR}(V)$ désignant l'intégration le long de la fibre G de la première projection $p_1 : \Omega^*_{DR}(V \times G) \to V$, $p_2 : \Omega^*_{DR}(V \times G) \to G$ désignant la deuxième projection. La valeur de $m(\alpha)$ en un point x de V est alors donnée par l'intégrale

$$\big(m(\alpha)\big)_x = \int_G \big((R_g)^*(\alpha)\big)_V \ \mu_G,$$

ou encore

$$m(\alpha)_x(X^1, ..., X^k) = \int_G \alpha_{g^{-1}x}(g_*^{-1}X^1_x, ..., g_*^{-1}X^k_x)\mu_G$$

de sorte que

- la forme $m(\alpha)$ est invariante par G puisque μ_G est bi-invariante,
- et $m(\alpha) = \alpha$ si α est déja invariante puisque $\int_G \mu_G = 1$.

En outre, la formule de Stokes montre que m commute -au signe près- avec les différentielles [8], de sorte qu'elle induit une application m^* en cohomologie, et $m^* \circ \iota^*$ est l'identité dans

8. Voici une autre démonstration du fait que m commute aux différentielles :

$$d(m(\alpha))((X^0, X^1, ..., X^k)) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i X^i[(m\alpha)(X^0, ..., \widehat{X^i}, ..., X^k)] +$$

$$\sum_{i<j}(-1)^{i+j} m(\alpha)([X^i, X^j], X^0, ..., \widehat{X^i}, ..., \widehat{X^j}, ..., X^k)$$

Soit encore, pour tout $x \in V$, on a :

$$d(m(\alpha))_x(X^0, X^1, ..., X^k) = \sum_{i=0}^{k} \int_G X^i_x[((g^{-1})^*\alpha)(X^0, ..., \widehat{X^i}, ..., X^k)]dg +$$

$$\sum_{i<j}(-1)^{i+j} \int_G ((g^{-1})^*\alpha)_x([X^i, X^j], X^0, ..., \widehat{X^i}, ..., \widehat{X^j}, ..., X^k)dg$$

Nous avons :

$$d(m(\alpha))_x(X^0, X^1, ..., X^k) = \int_G [d(((g^{-1})^*\alpha))]_x(X^0, ..., X^k)dg$$

Ainsi :

$$d(m(\alpha))_x(X^0, X^1, ..., X^k) = \int_G [((g^{-1})^* d\alpha)]_x(X^0, ..., X^k)dg$$

c'est-à- dire :

$$d(m(\alpha))_x(X^0, X^1, ..., X^k) = [m(d\alpha)]_x(X^0, ..., X^k).$$

$H^*\big([\Omega^*_{DR}(W)]^G\big)$: l'application ι^* est donc injective (et m^* surjective).

Si la classe de cohomologie d'une forme fermée α est invariante par G, α et $m(\alpha)$ sont cohomologues : en effet, si c est un cycle sur W de même dimension que α, on obtient :

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_c\big(m(\alpha)-\alpha\big) &= \textstyle\int_c\Big(⨍_G(g.\alpha-\alpha)\wedge\mu_G\Big), \text{ puisque } ⨍_G(\alpha\wedge\mu_G)=\alpha,\\
&= \textstyle\int_G\Big(⨍_c(g.\alpha-\alpha)\Big)\mu_G, \text{ d'après le théorème de Fubini,}\\
&= 0, \text{ puisque } g.\alpha-\alpha \text{ est un cobord dans } W, \text{ et } c \text{ un cycle.}
\end{aligned}$$

La classe de cohomologie de α est donc la même que celle de la forme invariante $m(\alpha)$

Exemple 7.1 (Cohomologie de l'espace projectif réel $\mathbb{RP}^n$)**.** *On rappelle que l'espace projectif réel $\mathbb{RP}^n$ est l'espace des orbites de l'action du groupe $\mathbb{Z}_2 := \{-1,+1\}$ sur la sphère S^n (le difféomorphisme de S^n associé à -1 étant l'involution $\nu : x \mapsto -x$). La projection canonique $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ permet d'identifier les formes sur $\mathbb{RP}^n$ aux formes sur S^n qui sont $\mathbb{Z}_2$-invariantes (i.e. invariantes par l'involution ν), et par application du théorème nous obtenons :*

$$H^p(\mathbb{RP}^n) \cong (H^p_{DR}(S^n))^{\mathbb{Z}_2}$$

Par conséquent : $H^p(\mathbb{RP}^n) = 0$ pour tout $p = 1, \cdots, n-1$.
Pour $p = n$, nous avons $H^n(S^n)$ est la droite vectorielle engendrée par la forme volume

$$\omega = \sum_{i=1}^{n}(-1)^n x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$$

Et puisque $\nu^*(\omega) = (-1)^{n+1}\omega$, nous obtenons : $H^n(\mathbb{RP}^n) = 0$ si n est paire et $H^n(\mathbb{RP}^n) = Vect\{\overline{\omega}\}$ si n est impaire (où $\overline{\omega}$ est la n-forme sur $\mathbb{RP}^n$ telle que $\pi^*(\omega) = \overline{\omega}$).
Notons aussi que si n est impaire, la forme $\overline{\omega}$ est une forme volume sur $\mathbb{RP}^n$ qui est alors orientable. Nous allons montrer que l'espace projectif n'est pas orientable dans le cas paire, en effet : soit α une n-forme sur $\mathbb{RP}^n$, il existe alors une fonction $f \in C^\infty(S^n)$ telle que $\pi^*\alpha = f\omega$. En particulier $f\omega$ est une n-forme $\mathbb{Z}_2$-invariante sur la sphère S^n :

$$\nu^*(f\alpha) = f\alpha$$

D'où : $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^n$. Et puisque S^n est connexe il existe un point $y \in S^n$ tel que $f(y) = 0$. La forme α s'annule en $\pi(y)$.

Remarque 7.2. *Si on supprime la compacité du groupe G, le théorème n'est plus satisfait ; c'est ce que nous allons voir en étudiant le cas d'un groupe de Lie connexe opérant sur lui même par translation à gauche. Il s'agit du groupe des transformations affines de la droite réeelle préservant l'orientation :*

$$G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / \ a \in \mathbb{R}^*_+,\ b \in \mathbb{R}\}$$

Comme pour tout groupe de Lie, la translation à gauche permet de définir un isomorphisme entre le complexe des forme différentielle invariantes à gauche et l'algèbre extérieure $\bigwedge^* \mathcal{G}^*$ *des formes multilinéaires altérnées sur l'algèbre de Lie* $\mathcal{G}$ *du groupe* G *; la différentielle* $d_{\mathcal{G}}$ *est donnée par la formule :*

$$(d_{\mathcal{G}}\omega_e)(h_0, h_1, \cdots, h_p) = \sum_{j<k}(-1)^{j+k}\omega_e([h_j, h_k], h_0, \cdots, \widehat{h_j}, \cdots, \widehat{h_k}, \cdots, h_p)$$

En particulier pour $\varepsilon \in \mathcal{G}^*$*, on a :* $d_{\mathcal{G}}\varepsilon(h_0, h_1) = -\varepsilon([h_0, h_1])$*. la cohomologie du complexe* $(\bigwedge^* \mathcal{G}^*, d_{\mathcal{G}})$ *est dite cohomologie de l'algèbre de Lie* $\mathcal{G}$ *et notée* $H^*(\mathcal{G})$*. Pour tout groupe de Lie* G *nous avons* $H^*((\Omega^*(G))^G) \cong H^*(\mathcal{G})$ *(*G *opérant par translation à gauche sur les formes).*
En partant d'une base $\{e^1, \cdots, e^r\}$ *de* $\mathcal{G}$ *et en désignant par* $\{\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^r\}$ *la base duale, nous avons la formule :*

$$d_{\mathcal{G}}\varepsilon^i = -\sum_{j<k} C^i_{jk}\varepsilon^j \wedge \varepsilon^k$$

où les constantes de structures C^i_{jk} *sont données par :* $[e_j, e_k] = \sum_{i=1}^r C^i_{jk} e_i$*.*
Revenons à notre exemple de départ, les deux sous-groupes à un paramètres : $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} exp(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*, permettent de définir la base* $\{e_1, e_2\}$ *de* $\mathcal{G}$ *donnée par :* $e_1 = \frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $e_2 = \frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*. On a* $[e_1, e_2] = e_2$*. En évaluant la différentielle* $d_{\mathcal{G}}$ *sur la base duale* $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2\}$*, nous obtenons :*

$$d_{\mathcal{G}}\varepsilon^1 = 0 \ \ et \ \ d_{\mathcal{G}}\varepsilon^2 = -\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$$

D'un autre côté nous avons $\bigwedge^* \mathcal{G}^* = \bigwedge^0 \mathcal{G}^* \oplus \bigwedge^1 \mathcal{G}^* \oplus \bigwedge^2 \mathcal{G}$ *avec* $\bigwedge^0 \mathcal{G} = \mathbb{R}$*,* $\bigwedge^1 \mathcal{G} = \mathcal{G}^*$ *et* $\bigwedge^2 \mathcal{G}^* = Vect\{\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2\}$*. On obtient :*

$$H^0(\mathcal{G}) = \mathbb{R}, \ \ H^1(\mathcal{G}) = Vect\{\varepsilon^1\}, \ \ H^2(\mathcal{G}) = 0.$$

En particulier $H^1((\Omega^*(G))^G) \neq 0$*, mais d'un autre côté puisque* G *est un ouvert convexe de* $\mathbb{R}^2$ *nous avons* $H^1_{DR}(G) = 0$*.*

Formes bi-invariantes sur un groupe de Lie. Désignons par $(\Omega^*(G))^{LR}$ l'espace des formes bi-invariantes sur un groupe de Lie G. Nous avons montré que lorsque G est compact connexe nous avons les identifications :

$$H^p_{DR} \cong (\Omega^p(G))^{LR}.$$

L'application $\omega \mapsto \omega_e$ définit un isomorphisme de $(\Omega^p(G))^L$ sur $\bigwedge^p \mathcal{G}^*$; celle-ci va aussi induire par restriction un isomorphisme de $(\Omega^*(G))^{LR}$ sur l'espace $(\bigwedge^p \mathcal{G}^*)^{Ad}$ des p-formes alternées sur $\mathcal{G}$ qui sont invariante par la représentation adjointe du groupe G, c'est-à-dire les formes ω_e telles que pour tout $g \in G$ on a :

$$\omega_e(X_1, \cdots, X_p) = \omega_e(Ad_g(X_1), \cdots, Ad_g(X_p))$$

Et grace à la connexité de G nous obtenons une identification entre $(\Omega^p(G))^{LR}$ et l'espace $(\bigwedge^p \mathcal{G}^*)^{ad}$ des p-formes alternées sur $\mathcal{G}$ qui sont invariante par la représentation adjointe de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, c'est-à-dire les formes ω_e telles que pour tout $Y \in \mathcal{G}$ on a :

$$\sum_{k=1}^{p} \omega_e(X_1, \cdots, X_{k-1}, [Y, X_k], X_{k+1}, \cdots, X_p) = 0.$$

En résumé, avec les notations que nous venons de voir, nous venons d'établir :

Théorème 7.2. *Pour tout groupe de Lie compact connexe G, on a :*

$$H^p_{DR}(G) \cong (\bigwedge^p \mathcal{G}^*)^{ad}.$$

Corollaire 7.1. *Pour tout groupe de Lie compact connexe G, $H^1_{DR}(G)$ est isomorphe au dual de l'espace vectoriel $\mathcal{G}/[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ où $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est le sous-espace de $\mathcal{G}$ engendré par les éléments de la forme $[X, Y]$ avec $X, Y \in \mathcal{G}$.*
En particulier on a l'équivalence : $H^1_{DR}(G)$ est nul si, et seulement si $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$.

Le groupe G étant compact, on peut alors munir l'espace $\mathcal{G}$ d'un produit scalaire $<, >$ invariant par la représentation adjointe de G. On peut alors écrire que pour tous $Y, X_1, X_2 \in \mathcal{G}$ nous avons :

$$< [Y, X_1], X_2 >= - < X_1, [Y, X_2], > .$$

Nous pouvons ainsi définir une 3-forme multilinéaire alternée $\omega_e \in (\bigwedge^3 \mathcal{G}^*$ en posant pour tous $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{G}$:

$$\omega_e(X_1, X_2, X_3) =< [X_1, X_2], X_3 > .$$

Si on suppose maintenant que $dimG \geq 3$ et que $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$, nous déduisons que $\omega_e \neq 0$ et par suite $H^3_{DR}(G) \neq 0$. Nous venons ainsi d'établir :

Corollaire 7.2. *Soit G un groupe de Lie compact connexe de dimension $dimG \geq 3$. Si $H^1_{DR}(G) = 0$, alors $H^3_{DR}(G) \neq 0$*

Corollaire 7.3. *Pour tout $n > 3$, la sphère S^n n'admet pas de structure de groupe de Lie.*

Conséquence : Les seules sphères qui sont des groupes de Lie sont S^0, S^1 et S^3.

Références

[1] R. Bott et LW. Tu : Differential forms in algebraic topology. Graduate texts in Mathematics, Springer, 1982.

[2] Aziz El Kacimi Alaoui : De Rham-Hodge classique. Colloque de la Société Mathématique de Tunisie, Hammamet (Mars 2001).

[3] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone : Connections, curvature, and cohomology. Vol. I,II Academic Press 1972/1973.

[4] Ib Madsen and Jorgen Tornehave : From Calculus to Cohomolgy, de Rham cohomology and characteristic classes. University of Aarhus. Cambridge University Press. 2001.

[5] Warner : Fundations of Differentiable Manifolds. Springer-Verlag. G.T.M. 1983.