Champs de Killing et résidus

Abdelhak Abouqateb

Université Cadi-Ayyad
Faculté des sciences et Techniques Marrakech

Ecole de printemps Mehdia
Géométrie Non Commutative et Physique
Kénitra, du 6 au 11 Avril 2009

▶ Thème : Formules de résidus de classes caractéristiques en géométrie différentielle.

▶ Thème : Formules de résidus de classes caractéristiques en géométrie différentielle.

▶ Objet : Comment peut-on obtenir de telles formules en utilisant un complexe de Mayer-Vietoris et des connexions adaptées ?

▶ Thème : Formules de résidus de classes caractéristiques en géométrie différentielle.

▶ Objet : Comment peut-on obtenir de telles formules en utilisant un complexe de Mayer-Vietoris et des connexions adaptées ?

▶ Sujet : La formule principale qui va nous intéresser est la formule dite des résidus de Baum-Cheeger
(*Malgré des travaux de* F. Gomez, N. Alamo, A. Abouqateb)

Invariant d'Euler-Poincaré :

V : une variété riemannienne compacte orientée.

Invariant d'Euler-Poincaré :

V : une variété riemannienne compacte orientée.

Caratéristique d'Euler-Poincaré de V :

$$\chi(V) = \sum_{i=0}^{i=\dim V} (-1)^i \dim H^i(V; \mathbb{R})$$

Invariant d'Euler-Poincaré :

V : une variété riemannienne compacte orientée.

Caratéristique d'Euler-Poincaré de V :

$$\chi(V) = \sum_{i=0}^{i=\dim V} (-1)^i \dim H^i(V; \mathbb{R})$$

Théorème de Gauss-Bonnet :

$$\chi(V) = \chi(TV) \frown [V].$$

Formule de S. Kobayashi :

Supposons que V est munie d'une métrique riemannienne et soit X un champ de Killing sur V.

Formule de S. Kobayashi :

Supposons que V est munie d'une métrique riemannienne et soit X un champ de Killing sur V.

Alors, chaque composante connexe W de l'ensemble $Zéro(X)$ est une sous-variété compacte orientable de codimension paire.

Formule de S. Kobayashi :

Supposons que V est munie d'une métrique riemannienne et soit X un champ de Killing sur V.

Alors, chaque composante connexe W de l'ensemble $Z\acute{e}ro(X)$ est une sous-variété compacte orientable de codimension paire.

L'invariant d'Euler-Poincaré de V est la somme des invariants d'Euler-Poincaré de chaque composante connexe W :

$$\chi(V) = \sum_W \chi(W)$$

Une autre forme équivalente :

Soit $\mathbb{T}^r$ un tore qui opère sur une variété V.

Une autre forme équivalente :

Soit $\mathbb{T}^r$ un tore qui opère sur une variété V.

Alors, l'invariant d'Euler-Poincaré de V coïncide avec celui des points fixes $V^{\mathbb{T}^r}$:

$$\chi(V) = \chi(V^{\mathbb{T}^r})$$

Une autre forme équivalente :

Soit $\mathbb{T}^r$ un tore qui opère sur une variété V.

Alors, l'invariant d'Euler-Poincaré de V coïncide avec celui des points fixes $V^{\mathbb{T}^r}$:

$$\chi(V) = \chi(V^{\mathbb{T}^r})$$

Exemples :

1. $\chi(S^{2r}) = 2$.
2. Les seules surfaces qui possèdent une métrique riemannienne ayant un champ de Killing non trivial sont la sphère S^2 et le tore $\mathbb{T}^2$.
3. Calculer $\chi(G/K)$ où $K \subset G$ sont compacts connexes.

Un problème de résidus :

Soit $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ un fibré vectoriel et soit G un groupe de Lie compact opérant sur ce fibré.

Un problème de résidus :

Soit $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ un fibré vectoriel et soit G un groupe de Lie compact opérant sur ce fibré.

► Un Théorème d'annulation : Si l'action de G sur V est quasi-libre, alors les classes caractéristiques du fibré ξ de dimension supérieure ou égale à $\dim V - \dim G + 1$ sont nulles.

Un problème de résidus :

Soit $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ un fibré vectoriel et soit G un groupe de Lie compact opérant sur ce fibré.

▶ Un Théorème d'annulation : Si l'action de G sur V est quasi-libre, alors les classes caractéristiques du fibré ξ de dimension supérieure ou égale à $\dim V - \dim G + 1$ sont nulles.

▶ Problème de résidus : Lorsque l'action de G n'est plus quasi-libre, décrire la localisation des classes caractéristiques de dimension supérieure ou égale à $\dim V - \dim G + 1$, autour du lieu singulier

$$\Sigma_G = \{x \in V / \dim(G_x) \geq 1\}$$

Préliminaires sur les G-fibrés vectoriels :

Soit $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ un G-fibré vectoriel. Notons $\Gamma(\xi)$ le $C^\infty(V)$-module des sections de ξ.

Préliminaires sur les G-fibrés vectoriels :

Soit $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ un G-fibré vectoriel. Notons $\Gamma(\xi)$ le $C^\infty(V)$-module des sections de ξ.
G opère sur $\Gamma(\xi)$:

$$(g.\sigma)(x) = g\sigma(g^{-1}x)$$

Préliminaires sur les G-fibrés vectoriels :

Soit $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ un G-fibré vectoriel. Notons $\Gamma(\xi)$ le $C^\infty(V)$-module des sections de ξ.
G opère sur $\Gamma(\xi)$:

$$(g.\sigma)(x) = g\sigma(g^{-1}x)$$

Pour tout $h \in \mathcal{G}$, on désignera par $\theta_h^\xi : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)$, l'opérateur défini par :

$$(\theta_h^\xi \sigma)(x) = \frac{d}{dt} \,|_{t=0} \, ((\exp th) \cdot \sigma)(x)$$

Préliminaires sur les G-fibrés vectoriels :

Soit $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ un G-fibré vectoriel. Notons $\Gamma(\xi)$ le $C^\infty(V)$-module des sections de ξ.
G opère sur $\Gamma(\xi)$:

$$(g.\sigma)(x) = g\sigma(g^{-1}x)$$

Pour tout $h \in \mathcal{G}$, on désignera par $\theta_h^\xi : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)$, l'opérateur défini par :

$$(\theta_h^\xi \sigma)(x) = \frac{d}{dt}\, |_{t=0}\, ((\exp th) \cdot \sigma)(x)$$

X_h Le champ de vecteurs fondamental sur V associé à $h \in \mathcal{G}$:

$$(X_h)_x = \frac{d}{dt}\, |_{t=0}\, (\exp -th)x$$

Propriétés :

- $$\theta_h(f\sigma) = (X_h f)\sigma + f(\theta_h \sigma)$$

Propriétés :

◇

$$\theta_h(f\sigma) = (X_h f)\sigma + f(\theta_h\sigma)$$

◇ Si $\langle , \rangle$ est une métrique riemannienne G-invariante sur ξ, alors on a :

$$X_h . \langle \sigma, \tau \rangle = \langle \theta_h\sigma, \tau \rangle + \langle \sigma, \theta_h\tau \rangle .$$

Propriétés :

◇

$$\theta_h(f\sigma) = (X_h f)\sigma + f(\theta_h\sigma)$$

◇ Si $\langle , \rangle$ est une métrique riemannienne G-invariante sur ξ, alors on a :

$$X_h.\langle \sigma, \tau \rangle = \langle \theta_h\sigma, \tau \rangle + \langle \sigma, \theta_h\tau \rangle .$$

◇ ∇ est une connexion riemanienne si et seulement si

$$X.\langle \sigma, \tau \rangle = \langle \nabla_X\sigma, \tau \rangle + \langle \sigma, \nabla_X\tau \rangle$$

Propriétés :

◇

$$\theta_h(f\sigma) = (X_h f)\sigma + f(\theta_h \sigma)$$

◇ Si $\langle , \rangle$ est une métrique riemannienne G-invariante sur ξ, alors on a :

$$X_h . \langle \sigma, \tau \rangle = \langle \theta_h \sigma, \tau \rangle + \langle \sigma, \theta_h \tau \rangle \, .$$

◇ ∇ est une connexion riemanienne si et seulement si

$$X . \langle \sigma, \tau \rangle = \langle \nabla_X \sigma, \tau \rangle + \langle \sigma, \nabla_X \tau \rangle$$

◇ Si ∇ est G-invariante, alors on a :

$$\theta_h \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \theta_h = \nabla_{[X_h, Y]}$$

• Pour tout ∇ connexion sur ξ, et $h \in \mathcal{G}$, on définit l'opérateur $S_h = \theta_h - \nabla_{X_h}$.

• Pour tout ∇ connexion sur ξ, et $h \in \mathcal{G}$, on définit l'opérateur $S_h = \theta_h - \nabla_{X_h}$.
On a :
$\diamond$ $S_h \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(V)}(\Gamma(\xi))$, et par suite définit une section du fibré des endomorphismes de ξ.

• Pour tout ∇ connexion sur ξ, et $h \in \mathcal{G}$, on définit l'opérateur $S_h = \theta_h - \nabla_{X_h}$.
On a :
◇ $S_h \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(V)}(\Gamma(\xi))$, et par suite définit une section du fibré des endomorphismes de ξ.
◇ Si la connexion ∇ préserve une métrique riemannienne G-invariante $\langle \, , \, \rangle$, alors S_h est antisymétrique.

• Pour tout ∇ connexion sur ξ, et $h \in \mathcal{G}$, on définit l'opérateur $S_h = \theta_h - \nabla_{X_h}$.
On a :
◇ $S_h \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(V)}(\Gamma(\xi))$, et par suite définit une section du fibré des endomorphismes de ξ.
◇ Si la connexion ∇ préserve une métrique riemannienne G-invariante $\langle\ ,\ \rangle$, alors S_h est antisymétrique.

◇ Si ∇ est G-invariante, de courbure R, alors

$$\nabla S_h = i(X_h)R$$

Résidus de Baum-Cheeger :

Théorème.

Résidus de Baum-Cheeger :

Théorème.

Soit $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ un $\mathbb{T}^r$-fibré vectoriel de base V une variété compacte, orientée, de dimension paire. Soit h_0 un vecteur dans l'algèbre de Lie $\mathbb{R}^r$ de $\mathbb{T}^r$ tel que $\{\exp th_0 / \, t \in \mathbb{R}\}$ soit dense dans $\mathbb{T}^r$. Soit $\varphi(\xi) \in H^{2l}(V)$ une classe caractéristique de ξ de dimension maximale $2l = N$.

Résidus de Baum-Cheeger :

Théorème.

Soit $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ un $\mathbb{T}^r$-fibré vectoriel de base V une variété compacte, orientée, de dimension paire. Soit h_0 un vecteur dans l'algèbre de Lie $\mathbb{R}^r$ de $\mathbb{T}^r$ tel que $\{\exp th_0 / \, t \in \mathbb{R}\}$ soit dense dans $\mathbb{T}^r$. Soit $\varphi(\xi) \in H^{2l}(V)$ une classe caractéristique de ξ de dimension maximale $2l = N$. Alors :

$$\varphi(\xi) \frown [V] = \sum_{\alpha} Res_{\varphi}(W_\alpha)$$

La sommation porte sur la famille $(W_\alpha)_\alpha$ des composantes connexes de $Z\acute{e}ro(X_{h_0})$,

Résidus de Baum-Cheeger :

Théorème.
Soit $\xi = (E \overset{\pi}{\to} V)$ un $\mathbb{T}^r$-fibré vectoriel de base V une variété compacte, orientée, de dimension paire. Soit h_0 un vecteur dans l'algèbre de Lie $\mathbb{R}^r$ de $\mathbb{T}^r$ tel que $\{\exp th_0 / \, t \in \mathbb{R}\}$ soit dense dans $\mathbb{T}^r$. Soit $\varphi(\xi) \in H^{2l}(V)$ une classe caractéristique de ξ de dimension maximale $2l = N$. Alors :

$$\varphi(\xi) \frown [V] = \sum_{\alpha} Res_{\varphi}(W_\alpha)$$

La sommation porte sur la famille $(W_\alpha)_\alpha$ des composantes connexes de $Z\acute{e}ro(X_{h_0})$, et le nombre $Res_\varphi(W_\alpha)$ est donnée par :

$$Res_{\varphi}(W_\alpha) = \left[\left(\frac{\varphi(R^{\xi_\alpha} + \theta_{h_0}^{\xi_\alpha})}{\chi(R^{N_\alpha} + \theta_{h_0}^{N_\alpha})} \right)_{N-2m_\alpha} \right] \frown [W_\alpha]$$

▶ Dans le cas particulier où $E = TV$ et W_α est un point isolé $\{p\}$, alors le résidu $Res_\varphi(W_\alpha)$ est donné par :

▶ Dans le cas particuler où $E = TV$ et W_α est un point isolé $\{p\}$, alors le résidu $Res_\varphi(W_\alpha)$ est donné par :

$$Res_\varphi(p) = \frac{\varphi(A_X(p))}{\chi(A_X(p))}$$

où $A_X(p)$ est l'endomorphisme antisymétrique de T_pV naturellement définit à partir de la dérivée covariante ($A_X = L_X - \nabla_X = -\nabla X$, ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique riemannienne $\mathbb{T}^r$-invariante).

▶ Dans le cas particuler où $E = TV$ et W_α est un point isolé $\{p\}$, alors le résidu $Res_\varphi(W_\alpha)$ est donné par :

$$Res_\varphi(p) = \frac{\varphi(A_X(p))}{\chi(A_X(p))}$$

où $A_X(p)$ est l'endomorphisme antisymétrique de T_pV naturellement définit à partir de la dérivée covariante ($A_X = L_X - \nabla_X = -\nabla X$, ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique riemannienne $\mathbb{T}^r$-invariante).
▶ Si $E = TV$ et $\varphi = \chi$, alors on retrouve la formule de S. Kobayashi.

Idée de démonstration :

Posons $\mathcal{H}_0 = \{th_0/t \in \mathbf{R}\}$, c'est une sous algèbre de Lie de $\mathbf{R}^{\mathbf{r}}$ algèbre de Lie de $\mathbb{T}^r$, elle engendre donc un groupe de Lie connexe H_0 immergé dans $\mathbb{T}^r$ de dimension égale à 1.

Idée de démonstration :

Posons $\mathcal{H}_0 = \{th_0/t \in \mathbf{R}\}$, c'est une sous algèbre de Lie de $\mathbf{R^r}$ algèbre de Lie de $\mathbb{T}^r$, elle engendre donc un groupe de Lie connexe H_0 immergé dans $\mathbb{T}^r$ de dimension égale à 1. Pour tout $x \in V$, on a :

$$\dim(H_0)_x = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; x \in V - Z\acute{e}ro(X_{h_0}) \\ 1 \;\; si \;\; x \in Z\acute{e}ro(X_{X_{h_0}}) \end{cases}$$

L'action de H_0 sur le fibré ξ étant induite par celle de $\mathbb{T}^r$, on en déduit l'existence de métriques et connexions invariantes par H_0 sur ξ.

L'action de H_0 sur le fibré ξ étant induite par celle de $\mathbb{T}^r$, on en déduit l'existence de métriques et connexions invariantes par H_0 sur ξ.
La décomposition de $Z\acute{e}ro(X_{h_0})$ en composantes connexes s'écrit : $Z\acute{e}ro(X_{h_0}) = \coprod_\alpha W_\alpha$.

L'action de H_0 sur le fibré ξ étant induite par celle de $\mathbb{T}^r$, on en déduit l'existence de métriques et connexions invariantes par H_0 sur ξ.
La décomposition de $Z\acute{e}ro(X_{h_0})$ en composantes connexes s'écrit : $Z\acute{e}ro(X_{h_0}) = \coprod_\alpha W_\alpha$.
Pour tout α, on désignera par $(U_\alpha, \pi_\alpha, W_\alpha)$ un $\mathbb{T}^r$-voisinage tubulaire de W_α dans V. On suppose que les ouverts U_α sont disjoints deux à deux.

On a ainsi un recouvrement naturel de V par deux ouverts G-stables :
$\mathcal{U} = \{U^\circ, U^1\}$ avec

$$U^\circ = V - Z\acute{e}ro(X_{h_0})$$
$$U^1 = \coprod_\alpha U_\alpha$$

Le complexe de Mayer-Vietoris associé à ce recouvrement, est donné par :

$$MV(\mathcal{U})^* = \Omega^*(U^\circ)\bigoplus\Omega^*(U^1)\bigoplus\Omega^{*-1}(U^\circ\cap U^1)$$

$$\left[= \Omega^*(V - Z\acute{e}ro(X_{h_0}))\bigoplus(\bigoplus_\alpha\Omega^*(U_\alpha))\bigoplus(\bigoplus_\alpha\Omega^{*-1}(U_\alpha - W_\alpha))\right]$$

Le complexe de Mayer-Vietoris associé à ce recouvrement, est donné par :

$$MV(\mathcal{U})^* = \Omega^*(U^\circ) \bigoplus \Omega^*(U^1) \bigoplus \Omega^{*-1}(U^\circ \cap U^1)$$

$$\left[= \Omega^*(V - Z\acute{e}ro(X_{h_0})) \bigoplus (\bigoplus_\alpha \Omega^*(U_\alpha)) \bigoplus (\bigoplus_\alpha \Omega^{*-1}(U_\alpha - W_\alpha)) \right]$$

avec la différentielle

$$D(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_{\circ 1}) = (d\lambda_\circ, d\lambda_1, -d\lambda_{\circ 1} + \lambda_1 - \lambda_0)$$

Pour tout couple de connexions $\{\nabla^\circ, \nabla^1\}$: ∇° connexion riemannienne sur le fibré vectoriel riemannien

$$\xi^\circ = (E_{|_{U^\circ}} \xrightarrow{\pi} U^\circ)$$

Pour tout couple de connexions $\{\nabla^\circ, \nabla^1\}$: ∇° connexion riemannienne sur le fibré vectoriel riemannien

$$\xi^\circ = (E_{|_{U^\circ}} \xrightarrow{\pi} U^\circ)$$

∇^1 connexion riemannienne sur le fibré vectoriel riemannien

$$\xi^1 = (E_{|_{U^1}} \xrightarrow{\pi} U^1),$$

Pour tout couple de connexions $\{\nabla^{\circ}, \nabla^{1}\}$: ∇° connexion riemannienne sur le fibré vectoriel riemannien

$$\xi^{\circ} = (E_{|_{U^{\circ}}} \xrightarrow{\pi} U^{\circ})$$

∇^{1} connexion riemannienne sur le fibré vectoriel riemannien

$$\xi^{1} = (E_{|_{U^{1}}} \xrightarrow{\pi} U^{1}),$$

On désignera par

$$\varphi(\nabla^{\circ}, \nabla^{1}) = (\varphi(\nabla^{\circ}), \varphi(\nabla^{1}), \varphi(\nabla^{\circ}, \nabla^{1}))$$

$\varphi(\nabla^{\circ}, \nabla^{1})$ est la forme différence de Bott associée au couple de connexions $\{\nabla^{\circ}, \nabla^{1}\}$ et au polynôme φ, il satisfait l'egalité $d(\varphi(\nabla^{\circ}, \nabla^{1})) = \varphi(\nabla^{1}) - \varphi(\nabla^{\circ})$.

La classe de cohomologie $[\varphi(\nabla^\circ, \nabla^1)] \in H^{2l}(V)$ est indépendante du choix du couple (∇°, ∇^1), et définit la classe caractéristique $\varphi(\xi) \in H^{2l}(V)$ du fibré vectoriel ξ associée au polynôme φ.

La classe de cohomologie $[\varphi(\nabla^\circ, \nabla^1)] \in H^{2l}(V)$ est indépendante du choix du couple (∇°, ∇^1), et définit la classe caractéristique $\varphi(\xi) \in H^{2l}(V)$ du fibré vectoriel ξ associée au polynôme φ.
S'il est possible de choisir ∇° comme φ-connexion (c'est-à dire $\varphi(\nabla^\circ) = 0$), on aura :

$$\varphi(\xi) \frown [V] = \sum_\alpha \left[(\fint_{D^{2m_\alpha}} \varphi(\nabla^1) - \fint_{S^{2m_\alpha - 1}} \varphi(\nabla^\circ, \nabla^1)) \right] \frown [W_\alpha]$$

Ainsi le problème revient à faire un choix judicieux des connexions ∇° et ∇^1 de façon que :

$$\varphi(\nabla^\circ) = 0$$

et

$$\left[\left(\fint_{D^{2m_\alpha}} \varphi(\nabla^1) - \fint_{S^{2m_\alpha - 1}} \varphi(\nabla^\circ, \nabla^1) \right) \right] = \left[\left(\frac{\varphi(R^{\xi_\alpha} + \theta_{h_0}^{\xi_\alpha})}{\chi(R^{N_\alpha} + \theta_{h_0}^{N_\alpha})} \right)_{2l - 2m_\alpha} \right]$$

pour tout α.

Pour tout α, on se donne désormais un isomorphisme $\mathbb{T}^r$-équivariant

$$\Phi_\alpha = \xi_{U_\alpha} \stackrel{\cong}{\rightarrow} \pi_\alpha^{-1}(\xi_\alpha)$$

où $\xi_{U_\alpha} = (E_{|_{U_\alpha}} \stackrel{\pi}{\rightarrow} U_\alpha)$ et $\xi_\alpha = (E_{|_{W_\alpha}} \rightarrow W_\alpha)$, tel que par restriction des deux membres de l'isomorphisme à ξ_α on obtienne l'identité.

Pour tout α, on se donne désormais un isomorphisme $\mathbb{T}^r$-équivariant

$$\Phi_\alpha = \xi_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} \pi_\alpha^{-1}(\xi_\alpha)$$

où $\xi_{U_\alpha} = (E_{|_{U_\alpha}} \xrightarrow{\pi} U_\alpha)$ et $\xi_\alpha = (E_{|_{W_\alpha}} \to W_\alpha)$, tel que par restriction des deux membres de l'isomorphisme à ξ_α on obtienne l'identité.
Munissons ensuite le fibré vectoriel $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ d'une métrique riemannienne $\mathbb{T}^r$-invariante $\langle , \rangle$, dont la restriction à ξ_{U_α} coïncide, via l'isomorphisme Φ_α, avec l'image réciroque par π_α de sa restriction à ξ_α (ce qui est possible : un argument de partition $\mathbb{T}^r$-invariante de l'unité le montre).

Munissons ξ d'une connexion riemannienne $\mathbb{T}^r$-invariante ∇^1, dont la restriction à ξ_{U_α} coïncide, via l'isomorphisme Φ_α avec l'image réciproque par π_α de sa restriction à ξ_α.

Munissons ξ d'une connexion riemannienne $\mathbb{T}^r$-invariante ∇^1, dont la restriction à ξ_{U_α} coïncide, via l'isomorphisme Φ_α avec l'image réciproque par π_α de sa restriction à ξ_α.
Choisissons d'autre part une métrique riemannienne $\mathbb{T}^r$-invariante sur le fibré tangent à U°, et considérons la 1-forme $a \in \Omega^1(U^\circ)$ définie par : $a(X_{h_0}) = 1$ et $a(Y) = 0$ pour Y orthogonal à X_{h_0}.

Munissons ξ d'une connexion riemannienne $\mathbb{T}^r$-invariante ∇^1, dont la restriction à ξ_{U_α} coïncide, via l'isomorphisme Φ_α avec l'image réciproque par π_α de sa restriction à ξ_α.
Choisissons d'autre part une métrique riemannienne $\mathbb{T}^r$-invariante sur le fibré tangent à U°, et considérons la 1-forme $a \in \Omega^1(U^\circ)$ définie par : $a(X_{h_0}) = 1$ et $a(Y) = 0$ pour Y orthogonal à X_{h_0}.
Désignons ensuite par ∇° la connexion sur $\xi^\circ = (E_{|_{U^\circ}} \xrightarrow{\pi} U^\circ)$ définie par :

$$\nabla^\circ = \nabla^1 + a \otimes S^1_{h_0}$$

On trouve :

$$\left[\fint_{S^{2m_\alpha-1}} \varphi(\nabla^\circ, \nabla^1)\right] = (\left[\varphi(R^{\xi_\alpha} + \theta_{h_0}^{\xi_\alpha})\right] \frown \left[\fint_{S^{2m_\alpha-1}} \frac{a}{1-da}\right])_{N-2m_\alpha}$$

On trouve :

$$\left[\fint_{S^{2m_\alpha-1}} - \varphi(\nabla^\circ, \nabla^1)\right] = (\left[\varphi(R^{\xi_\alpha} + \theta_{h_0}^{\xi_\alpha})\right] \frown \left[\fint_{S^{2m_\alpha-1}} \frac{a}{1 - da}\right])_{N-2m_\alpha}$$

et on démontre comme lemme :

$$\left[\fint_{S^{2m_\alpha-1}} \frac{a}{1 - da}\right] = \left[\frac{1}{\chi_{m_\alpha}(R^{N_\alpha} + \theta_{h_0}^{N_\alpha})}\right]$$