Cohomologie de de Rham -1-

Abdelhak Abouqateb

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences et Techniques Marrakech

Rencontre du GGTM
Géométrie, Topologie et systèmes dynamiques
Casablanca, du 26-28 octobre 2011

Introduction

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les champs considérés sur U sont C^∞.

Introduction

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les champs considérés sur U sont C^∞.

Analyse 1 ($n = 1$) : Toute application (continue) $f : U \to \mathbb{R}$ admet des primitives.

Introduction

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les champs considérés sur U sont C^∞.

Analyse 1 ($n = 1$) : Toute application (continue) $f : U \to \mathbb{R}$ admet des primitives.

Analyse 2 ($n = 2$) : Soit $f = (f_1, f_2)$ un champ de vecteurs sur U tel que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

Question : Existence de $F : U \to \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{grad} F = f$.

Introduction

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les champs considérés sur U sont C^∞.

Analyse 1 ($n = 1$) : Toute application (continue) $f : U \to \mathbb{R}$ admet des primitives.

Analyse 2 ($n = 2$) : Soit $f = (f_1, f_2)$ un champ de vecteurs sur U tel que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

Question : Existence de $F : U \to \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{grad} F = f$.

Réponse : Oui lorsque U est étoilé.

Introduction

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les champs considérés sur U sont C^∞.

Analyse 1 ($n = 1$) : Toute application (continue) $f : U \to \mathbb{R}$ admet des primitives.

Analyse 2 ($n = 2$) : Soit $f = (f_1, f_2)$ un champ de vecteurs sur U tel que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

Question : Existence de $F : U \to \mathbb{R}$ tels que grad$F = f$.

Réponse : Oui lorsque U est étoilé.

<u>L'idée</u> : Lorsque U est étoilé par rapport à 0, On prend

$$F(x) = \int_0^1 < f(tx), x > dt$$

Langage d'opérateurs

Le gradient

$$\begin{array}{rccc} grad : & C^\infty(U, \mathbb{R}) & \to & C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \\ & f & \mapsto & gradf \end{array}$$

Langage d'opérateurs

Le gradient

$$\begin{array}{rccc} grad: & C^\infty(U, \mathbb{R}) & \to & C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \\ & f & \mapsto & gradf \end{array}$$

Le rotationnel

$$\begin{array}{rccc} rot: & C^\infty(U, \mathbb{R}^2) & \to & C^\infty(U, \mathbb{R}) \\ & g & \mapsto & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} \end{array}$$

Langage d'opérateurs

Le gradient

$$\begin{array}{rccc} grad: & C^\infty(U, \mathbb{R}) & \to & C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \\ & f & \mapsto & gradf \end{array}$$

Le rotationnel

$$\begin{array}{rccc} rot: & C^\infty(U, \mathbb{R}^2) & \to & C^\infty(U, \mathbb{R}) \\ & g & \mapsto & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} \end{array}$$

$$rot \circ grad = 0$$

Langage d'opérateurs

Le gradient

$$\begin{array}{rccc} grad : & C^\infty(U, \mathbb{R}) & \to & C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \\ & f & \mapsto & grad f \end{array}$$

Le rotationnel

$$\begin{array}{rccc} rot : & C^\infty(U, \mathbb{R}^2) & \to & C^\infty(U, \mathbb{R}) \\ & g & \mapsto & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} \end{array}$$

$$rot \circ grad = 0$$

Définition 1 :

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = \ker(rot)/\mathrm{Im}(grad)$$

Calcul

- Pour U étoilé, on a

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = 0$$

Calcul

- Pour U étoilé, on a

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = 0$$

- Pour $U_0 = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, on prend

$$g_0(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

Calcul

- Pour U étoilé, on a

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = 0$$

- Pour $U_0 = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, on prend

$$g_0(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

alors $rot(g_0) = 0$ et g_0 n'est pas un champ de gradient sur U_0

Calcul

- Pour U étoilé, on a

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = 0$$

- Pour $U_0 = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, on prend

$$g_0(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

alors $rot(g_0) = 0$ et g_0 n'est pas un champ de gradient sur U_0 puisque si prend le lacet : $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$; on a

$$\int_0^{2\pi} < g_0(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = 2\pi \neq 0$$

Calcul

- Pour U étoilé, on a

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = 0$$

- Pour $U_0 = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, on prend

$$g_0(x_1, x_2) = (-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2})$$

alors $rot(g_0) = 0$ et g_0 n'est pas un champ de gradient sur U_0 puisque si prend le lacet : $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$; on a

$$\int_0^{2\pi} < g_0(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = 2\pi \neq 0$$

Ainsi : $\mathrm{H}^1(\mathrm{U}_0) \neq 0$.

Calcul

- Pour U étoilé, on a

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = 0$$

- Pour $U_0 = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, on prend

$$g_0(x_1, x_2) = (-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2})$$

alors $rot(g_0) = 0$ et g_0 n'est pas un champ de gradient sur U_0
puisque si prend le lacet : $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)),\ t \in [0, 2\pi]$;
on a

$$\int_0^{2\pi} < g_0(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = 2\pi \neq 0$$

Ainsi : $\mathrm{H}^1(\mathrm{U}_0) \neq 0$. On verra que $\mathrm{H}^1(\mathrm{U}_0) \cong \mathbb{R}$

Interprétation

On verra aussi que si F_k est un ensemble fini de k points du plan, alors

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2 - F_k) \cong \mathbb{R}^k$$

Interprétation

On verra aussi que si F_k est un ensemble fini de k points du plan, alors

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2 - F_k) \cong \mathbb{R}^k$$

En d'autres termes $\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{U})$ serait "le nombre de trous" dans l'ouvert U.

Interprétation

On verra aussi que si F_k est un ensemble fini de k points du plan, alors

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2 - F_k) \cong \mathbb{R}^k$$

En d'autres termes $\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{U})$ serait "le nombre de trous" dans l'ouvert U.

Définition 2 : Pour U ouvert de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{U}) = \ker(grad)$$

Interprétation

On verra aussi que si F_k est un ensemble fini de k points du plan, alors

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2 - F_k) \cong \mathbb{R}^k$$

En d'autres termes $\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{U})$ serait "le nombre de trous" dans l'ouvert U.

Définition 2 : Pour U ouvert de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{U}) = \ker(grad)$$

Théorème : U est connexe si et seulement si $\mathrm{H}^0(\mathrm{U}) \cong \mathbb{R}$.

Interprétation

On verra aussi que si F_k est un ensemble fini de k points du plan, alors

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2 - F_k) \cong \mathbb{R}^k$$

En d'autres termes $\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{U})$ serait "le nombre de trous" dans l'ouvert U.

Définition 2 : Pour U ouvert de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{U}) = \ker(grad)$$

Théorème : U est connexe si et seulement si $\mathrm{H}^0(\mathrm{U}) \cong \mathbb{R}$.

Plus généralement, on montre que $\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{U})$ est le nombre de composantes connexes

Trois variables ($n = 3$)

Gradient : $grad : C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$

Rotationnel : $rot : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$

Divergence : $div : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R})$

Trois variables ($n = 3$)

Gradient : $grad : C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$
Rotationnel : $rot : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$
Divergence : $div : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R})$

$$rot \circ grad = 0 \quad \text{et} \quad div \circ rot = 0$$

Trois variables ($n = 3$)

Gradient : $grad : C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$
Rotationnel : $rot : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$
Divergence : $div : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R})$

$$rot \circ grad = 0 \quad \text{et} \quad div \circ rot = 0$$

Définition 3 : $\mathrm{H}^0(\mathrm{U})$ et $\mathrm{H}^1(\mathrm{U})$ sont déjà définis. On pose

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{U}) = \ker(div)/\mathrm{Im}(rot)$$

Théorème : Si U est étoilé, on a

$$\mathsf{H}^0(\mathsf{U}) \cong \mathbb{R}, \quad \mathsf{H}^1(\mathsf{U}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathsf{H}^2(\mathsf{U}) = 0$$

Théorème : Si U est étoilé, on a

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{U}) \cong \mathbb{R}, \quad \mathrm{H}^1(\mathrm{U}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^2(\mathrm{U}) = 0$$

<u>L'idée</u> : Lorsque U est étoilé par rapport à l'origine, et si $div(F) = 0$, on considère

$$G(x) = \int_0^1 F(tx) \wedge tx dt$$

Puis on vérifie que

$$rot(F(tx) \wedge tx) = \frac{d}{dt}(t^2 F(tx)).$$

Situation générale : U un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition [Forme différentielle]

Situation générale : U un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition [Forme différentielle]
Une p-forme différentielle sur U ($p = 0, 1, \cdots, n$) est la donnée d'une application

$$\omega : U \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$$

Situation générale : U un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition [Forme différentielle]
Une p-forme différentielle sur U ($p = 0, 1, \cdots, n$) est la donnée d'une application

$$\omega : U \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$$

L'espace vectoriel des p-formes différentielles sera noté $\Omega^p(U)$.

Situation générale : U un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition [Forme différentielle]
Une p-forme différentielle sur U $(p = 0, 1, \cdots, n)$ est la donnée d'une application

$$\omega : U \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$$

L'espace vectoriel des p-formes différentielles sera noté $\Omega^p(U)$.

Expression générale :

Situation générale : U un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition [Forme différentielle]
Une p-forme différentielle sur U ($p = 0, 1, \cdots, n$) est la donnée d'une application

$$\omega : U \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$$

L'espace vectoriel des p-formes différentielles sera noté $\Omega^p(U)$.

Expression générale :
Pour $p = 0$, on a $\Omega^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$.

Situation générale : U un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition [Forme différentielle]
Une p-forme différentielle sur U ($p = 0, 1, \cdots, n$) est la donnée d'une application

$$\omega : U \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$$

L'espace vectoriel des p-formes différentielles sera noté $\Omega^p(U)$.

Expression générale :
Pour $p = 0$, on a $\Omega^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$.
Pour $p = 1$, l'expression générale d'une 1-forme différentielle :

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$$

où $f_i \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ et dx_i la différentielle de la i-ème projection (c'-à-d $(dx_i)_x(v) = v_i$ la i-ème coordonnée du vecteur $v = (v_1, \ldots, v_n)$)

• Pour $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1(U)$ on définit $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p \in \Omega^p(U)$ par la formule

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v^1, \ldots, v^p) = \det[\omega_i(v^j)]$$

• Pour $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1(U)$ on définit $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p \in \Omega^p(U)$ par la formule

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v^1, \ldots, v^p) = \det[\omega_i(v^j)]$$

▶ L'expression générale d'un élément $\omega \in \Omega^p(U)$:

$$\omega = \sum_I f_I dx_I$$

où la sommation porte sur les p-uplets $I = (i_1, \ldots, i_p)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, $f_I \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ et $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$.

• Pour $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1(U)$ on définit $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p \in \Omega^p(U)$ par la formule

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v^1, \ldots, v^p) = \det[\omega_i(v^j)]$$

▶ L'expression générale d'un élément $\omega \in \Omega^p(U)$:

$$\omega = \sum_I f_I dx_I$$

où la sommation porte sur les p-uplets $I = (i_1, \ldots, i_p)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, $f_I \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ et $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$. En particulier, lorsque $\omega_1 \in \Omega^p(U)$ et $\omega_2 \in \Omega^q(U)$ on définit le produit (externe) $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{p+q}(U)$. On a : $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq}\omega_2 \wedge \omega_1$.

• Pour $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1(U)$ on définit $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p \in \Omega^p(U)$ par la formule

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v^1, \ldots, v^p) = \det[\omega_i(v^j)]$$

▶ L'expression générale d'un élément $\omega \in \Omega^p(U)$:

$$\omega = \sum_I f_I dx_I$$

où la sommation porte sur les p-uplets $I = (i_1, \ldots, i_p)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, $f_I \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ et
$dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$. En particulier, lorsque $\omega_1 \in \Omega^p(U)$ et $\omega_2 \in \Omega^q(U)$ on définit le produit (externe) $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{p+q}(U)$. On a : $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq}\omega_2 \wedge \omega_1$. On obtient une algèbre graduée anti-commutative

$$\Omega^*(U) = \oplus_{0 \leq p \leq n} \Omega^p(U)$$

Différentielle externe

Théorème : Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique opérateur linéaire

$$d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$$

pour tout $p = 0, 1, \ldots, n$ tel que :

Différentielle externe

Théorème : Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique opérateur linéaire

$$d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$$

pour tout $p = 0, 1, \ldots, n$ tel que :

1. Pour $f \in \Omega^0(U)$, $df = \sum_{i=1}^{n} dx_i$
2. $d \circ d = 0$
3. $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$, pour $\omega_1 \in \Omega^p(U)$.

Le complexe de de Rham

Définition Le complexe de de Rham de U est le couple

$$(\Omega^*(U), d)$$

Le complexe de de Rham

Définition Le complexe de de Rham de U est le couple

$$(\Omega^*(U), d)$$

C'est une algèbre différentielle graduée anti-commutative.

Le complexe de de Rham

Définition Le complexe de de Rham de U est le couple

$$(\Omega^*(U), d)$$

C'est une algèbre différentielle graduée anti-commutative.

Définition La cohomologie de de Rham de U est le quotient

$$\mathrm{H}^p(U) = \frac{\ker(d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U))}{Im(d : \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U))}$$

Le complexe de de Rham

Définition Le complexe de de Rham de U est le couple

$$(\Omega^*(U), d)$$

C'est une algèbre différentielle graduée anti-commutative.

Définition La cohomologie de de Rham de U est le quotient

$$\mathrm{H}^p(U) = \frac{\ker(d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U))}{Im(d : \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U))}$$

$\mathrm{H}^*(U) = \oplus_{0 \leq p \leq n} \mathrm{H}^p(U)$ est une algèbre anti-commutative pour la multiplication : $[\omega_1][\omega_2] = [\omega_1 \wedge \omega_2]$.

Effet d'une application

Soit $\phi : U_1 \rightarrow U_2$ une application de $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ vers $U_1 \subset \mathbb{R}^m$.

Effet d'une application

Soit $\phi : U_1 \to U_2$ une application de $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ vers $U_1 \subset \mathbb{R}^m$.
On définit $\phi^* : \Omega^p(U_2) \to \Omega^p(U_1)$

Effet d'une application

Soit $\phi : U_1 \to U_2$ une application de $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ vers $U_1 \subset \mathbb{R}^m$. On définit $\phi^* : \Omega^p(U_2) \to \Omega^p(U_1)$ par l'expression :

$$\phi^*(\sum_I f_I dx_I) = \sum_I (f_I \circ \phi) d\phi_I$$

où $d\phi_I = d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_p}$ et ϕ_i désigne la i-ème fonction coordonnée de ϕ.

Par exemple :

- Pour $\gamma : [0,1] \to U$ une courbe dans U et $\omega = \sum_i f_i dx_i$, on a
$$\gamma^*(\omega) =< f(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt$$

.

Par exemple :

- Pour $\gamma : [0,1] \to U$ une courbe dans U et $\omega = \sum_i f_i dx_i$, on a
$$\gamma^*(\omega) = < f(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt$$
- Lorsque $n = m$, on a
$$\phi^*(d\phi_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)_x = \det((d\phi)_x) dx_1 \wedge \cdots dx_n$$

.

Par exemple :

- Pour $\gamma : [0,1] \to U$ une courbe dans U et $\omega = \sum_i f_i dx_i$, on a
$$\gamma^*(\omega) =< f(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt$$

- Lorsque $n = m$, on a
$$\phi^*(d\phi_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)_x = \det((d\phi)_x) dx_1 \wedge \cdots dx_n$$

- Pour $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par $\phi(x,t) = k(t)x$ avec $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Par exemple :

- Pour $\gamma : [0,1] \to U$ une courbe dans U et $\omega = \sum_i f_i dx_i$, on a

$$\gamma^*(\omega) =< f(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt$$

- Lorsque $n = m$, on a

$$\phi^*(d\phi_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)_x = \det((d\phi)_x) dx_1 \wedge \cdots dx_n$$

- Pour $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par $\phi(x,t) = k(t)x$ avec $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a :

$$\phi^*(dx_i) = k(t)dx_i + x_i k'(t)dt$$

Foncteur : $U \to H^*(U)$

On a

- $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$
- $\phi^*(f) = f \circ \phi$ pour f une fonction.
- $d(\phi^* \omega) = \phi^*(d\omega)$.

Foncteur : $U \to H^*(U)$

On a

- $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$
- $\phi^*(f) = f \circ \phi$ pour f une fonction.
- $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$.

Conséquence : Toute application $\phi : U_1 \to U_2$ va induire une application linéaire :

$$H^p(\phi) : H^p(U_2) \to H^p(U_1)$$

Foncteur : $U \to H^*(U)$

On a

- $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$
- $\phi^*(f) = f \circ \phi$ pour f une fonction.
- $d(\phi^* \omega) = \phi^*(d\omega)$.

Conséquence : Toute application $\phi : U_1 \to U_2$ va induire une application linéaire :

$$H^p(\phi) : H^p(U_2) \to H^p(U_1)$$

définie par $H^p(\phi)[\omega] = [\phi^*(\omega)]$.

Foncteur : $U \to H^*(U)$

On a

- $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$
- $\phi^*(f) = f \circ \phi$ pour f une fonction.
- $d(\phi^* \omega) = \phi^*(d\omega)$.

Conséquence : Toute application $\phi : U_1 \to U_2$ va induire une application linéaire :

$$H^p(\phi) : H^p(U_2) \to H^p(U_1)$$

définie par $H^p(\phi)[\omega] = [\phi^*(\omega)]$.
On a : $H^p(\phi_2 \circ \phi_1) = H^p(\phi_1) \circ H^p(\phi_2)$.
▶ La correspondance $U \to H^p(U)$ est un foncteur contravariant

Lemme de Poincaré

Théorème Pour tout ouvert étoilé U de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$H^p(U) = 0 \;\text{ pour } p > 0 \quad \text{et} \quad H^0(U) = \mathbb{R}$$

Démonstration

Idée. On suppose U étoilé par rapport à 0.

Démonstration

Idée. On suppose U étoilé par rapport à 0.

- On choisit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $k(t) = 0$ pour $t \leq 0$, $k(t) = 1$ pour $t \geq 1$ et $0 \leq k(t) \leq 1$.

Démonstration

Idée. On suppose U étoilé par rapport à 0.

- On choisit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $k(t) = 0$ pour $t \leq 0$, $k(t) = 1$ pour $t \geq 1$ et $0 \leq k(t) \leq 1$.
- On considère $K : U \times \mathbb{R} \to U$, $K(x, t) = k(t)x$.

Démonstration

Idée. On suppose U étoilé par rapport à 0.

- On choisit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $k(t) = 0$ pour $t \leq 0$, $k(t) = 1$ pour $t \geq 1$ et $0 \leq k(t) \leq 1$.
- On considère $K : U \times \mathbb{R} \to U$, $K(x,t) = k(t)x$.
- On utilise l'opérateur d'intégration le long de la fibre

$$\int_0^1 : \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U)$$

$$\int_0^1 (f_I dx_I + g_I dt \wedge dx_J) = (\int_0^1 g_J(x,t)dt)dx_J$$

Démonstration

Idée. On suppose U étoilé par rapport à 0.

- On choisit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $k(t) = 0$ pour $t \leq 0$, $k(t) = 1$ pour $t \geq 1$ et $0 \leq k(t) \leq 1$.
- On considère $K : U \times \mathbb{R} \to U$, $K(x, t) = k(t)x$.
- On utilise l'opérateur d'intégration le long de la fibre

$$\int_0^1 : \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U)$$

$$\int_0^1 (f_I dx_I + g_I dt \wedge dx_J) = (\int_0^1 g_J(x, t) dt) dx_J$$

- On construit finalement (pour $p > 0$) des opérateurs linéaires $K_p : \Omega^p(U) \to \Omega^{p-1}(U)$ tel que

$$dK_p + K_{p+1} d = id$$

Démonstration

Idée. On suppose U étoilé par rapport à 0.

- On choisit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $k(t) = 0$ pour $t \leq 0$, $k(t) = 1$ pour $t \geq 1$ et $0 \leq k(t) \leq 1$.
- On considère $K : U \times \mathbb{R} \to U$, $K(x,t) = k(t)x$.
- On utilise l'opérateur d'intégration le long de la fibre

$$\fint_0^1 : \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U)$$

$$\fint_0^1 (f_I dx_I + g_I dt \wedge dx_J) = (\int_0^1 g_J(x,t)dt)dx_J$$

- On construit finalement (pour $p > 0$) des opérateurs linéaires $K_p : \Omega^p(U) \to \Omega^{p-1}(U)$ tel que

$$dK_p + K_{p+1}d = id$$

En posant : $K_p(\omega) = \fint_0^1 (K^*\omega)$.

Lemme de Mayer-Vietoris :

Proposition. Soient U_1 et U_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $U = U_1 \cup U_2$. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \to 0$$

est exate ;
où $I^p(\omega) = (\omega_{|_{U_1}}, \omega_{|_{U_2}})$ et $J^p(\alpha, \beta) = \alpha_{|_{U_1 \cap U_2}} - \beta_{|_{U_1 \cap U_2}}$.

:

Lemme de Mayer-Vietoris :

Proposition. Soient U_1 et U_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $U = U_1 \cup U_2$. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \to 0$$

est exate ;
où $I^p(\omega) = (\omega_{|_{U_1}}, \omega_{|_{U_2}})$ et $J^p(\alpha, \beta) = \alpha_{|_{U_1 \cap U_2}} - \beta_{|_{U_1 \cap U_2}}$.

Démonstration.

Seule la surjectivité de J^p mérite une explication :

Lemme de Mayer-Vietoris :

Proposition. Soient U_1 et U_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $U = U_1 \cup U_2$. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \to 0$$

est exate ;
où $I^p(\omega) = (\omega_{|U_1}, \omega_{|U_2})$ et $J^p(\alpha, \beta) = \alpha_{|U_1 \cap U_2} - \beta_{|U_1 \cap U_2}$.

Démonstration.

Seule la surjectivité de J^p mérite une explication : On considère une partition de l'unité $\{\rho_1, \rho_2\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_1, U_2\}$ ($\mathrm{Supp}(\rho_i) \subset U_i$ et $\rho_1 + \rho_2 = 1$)

Lemme de Mayer-Vietoris :

Proposition. Soient U_1 et U_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $U = U_1 \cup U_2$. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \to 0$$

est exate ;
où $I^p(\omega) = (\omega_{|_{U_1}}, \omega_{|_{U_2}})$ et $J^p(\alpha, \beta) = \alpha_{|_{U_1 \cap U_2}} - \beta_{|_{U_1 \cap U_2}}$.

Démonstration.

Seule la surjectivité de J^p mérite une explication : On considère une partition de l'unité $\{\rho_1, \rho_2\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_1, U_2\}$ ($\operatorname{Supp}(\rho_i) \subset U_i$ et $\rho_1 + \rho_2 = 1$) puis il suffit d'écrire $\omega = \rho_2\omega - (-\rho_1\omega)$ et de remarquer que $(\rho_2\omega, -\rho_1\omega) \in \Omega^*(U_1) \oplus \Omega^*(U_2)$. $\square$

Suite exacte longue :

Corollaire 1. Soit $U = U_1 \cup U_2$. Alors il existe une suite exacte longue (naturelle) de cohomologie :

$$\cdots \longrightarrow H^p(U) \xrightarrow{H(I)} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{H(J)} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(U)$$

où δ^p est l'opérateur connectant.

Suite exacte longue :

Corollaire 1. Soit $U = U_1 \cup U_2$. Alors il existe une suite exacte longue (naturelle) de cohomologie :

$$\cdots \longrightarrow H^p(U) \xrightarrow{H(I)} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{H(J)} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(U)$$

où δ^p est l'opérateur connectant.

Corollaire 2. Si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, alors

$$H^p(U_1 \cup U_2) \cong H^p(U_1) \oplus H^p(U_2)$$

Exemple : $H^*(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On prend

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \geq 0, y = 0\}$$

et

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \leq 0, y = 0\}$$

.

Exemple : $H^*(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$

On prend

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \geq 0, y = 0\}$$

et

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \leq 0, y = 0\}$$

U_1 et U_2 sont étoilés, $U_1 \cup U_2 = U$ et $U_1 \cap U_2$ est réunion disjointe de deux ouverts convexes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$.

.

Exemple : $H^*(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On prend

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \geq 0, y = 0\}$$

et

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \leq 0, y = 0\}$$

U_1 et U_2 sont étoilés, $U_1 \cup U_2 = U$ et $U_1 \cap U_2$ est réunion disjointe de deux ouverts convexes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_-$. Donc $H^p(U_1 \cap U_2) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Exemple : $H^*(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On prend

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \geq 0, y = 0\}$$

et

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \leq 0, y = 0\}$$

U_1 et U_2 sont étoilés, $U_1 \cup U_2 = U$ et $U_1 \cap U_2$ est réunion disjointe de deux ouverts convexes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. Donc $H^p(U_1 \cap U_2) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. On obtient alors que pour $p > 0$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(U) \longrightarrow 0$$

Exemple : $H^*(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On prend

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \geq 0, y = 0\}$$

et

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \leq 0, y = 0\}$$

U_1 et U_2 sont étoilés, $U_1 \cup U_2 = U$ et $U_1 \cap U_2$ est réunion disjointe de deux ouverts convexes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. Donc $H^p(U_1 \cap U_2) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. On obtient alors que pour $p > 0$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(U) \longrightarrow 0$$

Donc $H^q(U) = 0$ pour $q \geq 2$.

Exemple : $H^*(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On prend

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \geq 0, y = 0\}$$

et

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \leq 0, y = 0\}$$

U_1 et U_2 sont étoilés, $U_1 \cup U_2 = U$ et $U_1 \cap U_2$ est réunion disjointe de deux ouverts convexes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. Donc $H^p(U_1 \cap U_2) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. On obtient alors que pour $p > 0$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(U) \longrightarrow 0$$

Donc $H^q(U) = 0$ pour $q \geq 2$. Pour le calcul de $H^1(U)$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(U) \xrightarrow{I^0} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^0} H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^0} H^1(U) \to 0$$

Exemple : $H^*(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On prend

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \geq 0, y = 0\}$$

et

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/\ x \leq 0, y = 0\}$$

U_1 et U_2 sont étoilés, $U_1 \cup U_2 = U$ et $U_1 \cap U_2$ est réunion disjointe de deux ouverts convexes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. Donc $H^p(U_1 \cap U_2) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. On obtient alors que pour $p > 0$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(U) \longrightarrow 0$$

Donc $H^q(U) = 0$ pour $q \geq 2$. Pour le calcul de $H^1(U)$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(U) \xrightarrow{I^0} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^0} H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^0} H^1(U) \to 0$$

Donc $H^1(U) \cong \mathbb{R}$.

Homotopie :

Définition Deux applications continues f et g, d'un espace topologique X vers un espace topologique Y, sont homotopes s'il existe une application continue $F : [0,1] \times X \to Y$, telle que $F(0,x) = f(x)$ et $F(1,x) = g(x)$, et on note $f \sim g$. L'application F est appelée homotopie de f à g.

Homotopie :

Définition Deux applications continues f et g, d'un espace topologique X vers un espace topologique Y, sont homotopes s'il existe une application continue $F : [0,1] \times X \to Y$, telle que $F(0,x) = f(x)$ et $F(1,x) = g(x)$, et on note $f \sim g$. L'application F est appelée homotopie de f à g.

Exemple

- Si Y est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f, g : X \to Y$, alors f et g sont homotopes (On considère $F(t,x) = (1-t)f(x) + tg(x)$).
- Montrer que si $f : X \to S^2$ est une application continue et non surjective, alors f est homotope à une application constante.
- Montrer que l'homotopie est une relation d'équivalence.

Définition Deux espaces topologiques X et Y ont même type d'homotopie s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g \sim id_Y$ et $g \circ f \sim id_X$.

.

.

Définition Deux espaces topologiques X et Y ont même type d'homotopie s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g \sim id_Y$ et $g \circ f \sim id_X$. On note $X \sim Y$; c'est une relation d'équivalence entre les espaces topologiques.

.

Définition Deux espaces topologiques X et Y ont même type d'homotopie s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g \sim id_Y$ et $g \circ f \sim id_X$. On note $X \sim Y$; c'est une relation d'équivalence entre les espaces topologiques.

- Deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie.

.

Définition Deux espaces topologiques X et Y ont même type d'homotopie s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g \sim id_Y$ et $g \circ f \sim id_X$. On note $X \sim Y$; c'est une relation d'équivalence entre les espaces topologiques.

- Deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie.
- Un espace X est dit contractile s'il a le même type d'homotopie qu'un point.

.

Définition Deux espaces topologiques X et Y ont même type d'homotopie s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g \sim id_Y$ et $g \circ f \sim id_X$. On note $X \sim Y$; c'est une relation d'équivalence entre les espaces topologiques.

- Deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie.
- Un espace X est dit contractile s'il a le même type d'homotopie qu'un point.
- Tout ouvert étoilé est contractile.

Définition On dira qu'une partie $\iota : A \hookrightarrow U$ est un retract par déformation de U s'il existe une application différentiable $r : U \to A$ (rétraction) telle que :

1. $r \circ \iota = Id_A$,
2. $\iota \circ r$ est homotope à Id_U.

Définition On dira qu'une partie $\iota : A \hookrightarrow U$ est un retract par déformation de U s'il existe une application différentiable $r : U \to A$ (rétraction) telle que :

1. $r \circ \iota = Id_A$,
2. $\iota \circ r$ est homotope à Id_U.

Les applications ι et r sont ainsi des équivalences d'homotopie.

Définition On dira qu'une partie $\iota : A \hookrightarrow U$ est un retract par déformation de U s'il existe une application différentiable $r : U \to A$ (rétraction) telle que :

1. $r \circ \iota = Id_A$,
2. $\iota \circ r$ est homotope à Id_U.

Les applications ι et r sont ainsi des équivalences d'homotopie.

Définition On dira qu'une partie $\iota : A \hookrightarrow U$ est un retract par déformation de U s'il existe une application différentiable $r : U \to A$ (rétraction) telle que :

1. $r \circ \iota = Id_A$,
2. $\iota \circ r$ est homotope à Id_U.

Les applications ι et r sont ainsi des équivalences d'homotopie.

Exemple Les espaces $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ et la sphère S^n ont même type d'homotopie.

Définition On dira qu'une partie $\iota : A \hookrightarrow U$ est un retract par déformation de U s'il existe une application différentiable $r : U \to A$ (rétraction) telle que :

1. $r \circ \iota = Id_A$,
2. $\iota \circ r$ est homotope à Id_U.

Les applications ι et r sont ainsi des équivalences d'homotopie.

Exemple Les espaces $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ et la sphère S^n ont même type d'homotopie. En effet, considérons l'application $r : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to S^n$ définie par $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. On a $r \circ \iota = id_{S^n}$ et $\iota \circ r \sim id_{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}$ par l'homotopie : $F(t, x) = tx + (1 - t)\frac{x}{\|x\|}$.

Homotopie différentiable

Lemme Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ (ouverts).

- Toute application continue $h : U \to V$ est homotpe à une application C^∞.
- Si $f_0, f_1 : U \to V$ sont C^∞ et homotopes, alors il existe une homotopie C^∞ reliant f_0 et f_1 (càd $F : \mathbb{R} \times U \to V$ C^∞ avec $F(t, x) = f_0$ pour $t \leq 0$ et $F(t, x) = f_1$ pour $t \geq 1$).

Proposition Deux applications différentiables différentiablement homotopes induisent la même application en cohomologie de de Rham.

Proposition Deux applications différentiables différentiablement homotopes induisent la même application en cohomologie de de Rham.

Démonstration.

Soit $F : \mathbb{R} \times U \to V$ une homotopie C^∞ entre f_0 et f_1. On vérifie par le calcul que

$$f_1^*(\alpha) - f_0^*(\alpha) = d\Big(\int_0^1 \circ F^*(\alpha)\Big)$$

dès que α est une forme fermée. $\square$

Théorème Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ (ouverts) sont équivalents homotopiquement (en particulier s'ils sont homéomorphes), alors : $H^*(U) \cong H^*(V)$.

Théorème Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ (ouverts) sont équivalents homotopiquement (en particulier s'ils sont homéomorphes), alors : $H^*(U) \cong H^*(V)$.

Corollaire Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert contractile, alors $H^p(U) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U) = \mathbb{R}$.

Théorème Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ (ouverts) sont équivalents homotopiquement (en particulier s'ils sont homéomorphes), alors : $H^*(U) \cong H^*(V)$.

Corollaire Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert contractile, alors $H^p(U) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U) = \mathbb{R}$.

Proposition ($\sharp$) Soit A un fermé de $\mathbb{R}^n$, $A \neq \mathbb{R}^n$. On identifie A à un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$: $A \subset \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Théorème Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ (ouverts) sont équivalents homotopiquement (en particulier s'ils sont homéomorphes), alors : $H^*(U) \cong H^*(V)$.

Corollaire Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert contractile, alors $H^p(U) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U) = \mathbb{R}$.

Proposition ($\sharp$) Soit A un fermé de $\mathbb{R}^n$, $A \neq \mathbb{R}^n$. On identifie A à un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$: $A \subset \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
On a des isomorphismes :

- $H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} - A) \cong H^p(\mathbb{R}^n - A)$, pour $p \geq 1$
- $H^1(\mathbb{R}^{n+1} - A) \cong H^0(\mathbb{R}^n - A)/\mathbb{R} \cdot 1$
- $H^0(\mathbb{R}^{n+1} - A) \cong \mathbb{R}$.

Démonstration.

On utilise les deux ouverts :

- $U_1 = (\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times] - 1, +\infty[)$
- $U_2 = (\mathbb{R}^n \times] - \infty, 0[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times] - \infty, 1[)$

$\square$

Démonstration.

On utilise les deux ouverts :

- $U_1 = (\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times] - 1, +\infty[)$
- $U_2 = (\mathbb{R}^n \times] - \infty, 0[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times] - \infty, 1[)$

On vérifie que

- $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1} - A$
- $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n - A) \times] - 1, 1[$

$\square$

Démonstration.

On utilise les deux ouverts :

- $U_1 = (\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times]-1, +\infty[)$
- $U_2 = (\mathbb{R}^n \times]-\infty, 0[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times]-\infty, 1[)$

On vérifie que

- $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1} - A$
- $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n - A) \times]-1, 1[$

La suite exacte longue de Mayer-Vietoris permet de conclure.

□

Démonstration.

On utilise les deux ouverts :

- $U_1 = (\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times] - 1, +\infty[)$
- $U_2 = (\mathbb{R}^n \times] - \infty, 0[) \cup ((\mathbb{R}^n - A) \times] - \infty, 1[)$

On vérifie que

- $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1} - A$
- $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n - A) \times] - 1, 1[$

La suite exacte longue de Mayer-Vietoris permet de conclure. $\square$

Corollaire Pour $n \geq 2$, on a

$$H^p(\mathbb{R}^n - \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{si} \quad p = 0,\ n-1 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Applications

D^n désigne le disque unité de $\mathbb{R}^n$.

Théorème [du point fixe de Brouwer] Toute application continue $f : D^n \to D^n$ a un point fixe.

Applications

D^n désigne le disque unité de $\mathbb{R}^n$.

Théorème [du point fixe de Brouwer] Toute application continue $f : D^n \to D^n$ a un point fixe.

Supposons que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in D^n$.

Applications

D^n désigne le disque unité de $\mathbb{R}^n$.

Théorème [du point fixe de Brouwer] Toute application continue $f : D^n \to D^n$ a un point fixe.

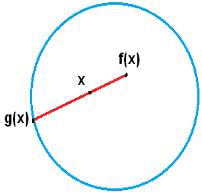
Supposons que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in D^n$.Pour $x \in D^n$, on désigne par $g(x)$ le point d'intersection de la demi droite passant par x d'origine $f(x)$, avec la sphère S^{n-1}.

Applications

D^n désigne le disque unité de $\mathbb{R}^n$.

Théorème [du point fixe de Brouwer] Toute application continue $f : D^n \to D^n$ a un point fixe.

Supposons que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in D^n$.Pour $x \in D^n$, on désigne par $g(x)$ le point d'intersection de la demi droite passant par x d'origine $f(x)$, avec la sphère S^{n-1}.

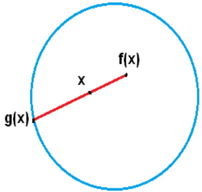


Applications

D^n désigne le disque unité de $\mathbb{R}^n$.

Théorème [du point fixe de Brouwer] Toute application continue $f : D^n \to D^n$ a un point fixe.

Supposons que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in D^n$.Pour $x \in D^n$, on désigne par $g(x)$ le point d'intersection de la demi droite passant par x d'origine $f(x)$, avec la sphère S^{n-1}. L'application $g : D^n \to S^{n-1}$ est une rétraction de D^n sur S^{n-1} !



Lemme Il n'existe pas d'application continue $g : D^n \to S^{n-1}$ telle que $g_{|_{S^{n-1}}} = id_{S^{n-1}}$.

$\square$

Lemme Il n'existe pas d'application continue $g : D^n \to S^{n-1}$ telle que $g_{|_{S^{n-1}}} = id_{S^{n-1}}$.

Démonstration.

($n \geq 2$). L'application

$$r : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad r(x) = \frac{x}{\| x \|}$$

est homotope à $id_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$.

$\square$

Lemme Il n'existe pas d'application continue $g : D^n \to S^{n-1}$ telle que $g_{|_{S^{n-1}}} = id_{S^{n-1}}$.

Démonstration.

($n \geq 2$). L'application

$$r : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad r(x) = \frac{x}{\| x \|}$$

est homotope à $id_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$. D'un autre côté, l'application g permet de construire une homotopie entre r et l'application constante $x \mapsto g(0)$ (en prenant $G(t, x) = g(tr(x))$).

$\square$

Lemme Il n'existe pas d'application continue $g : D^n \to S^{n-1}$ telle que $g_{|_{S^{n-1}}} = id_{S^{n-1}}$.

Démonstration.

$(n \geq 2)$. L'application

$$r : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad r(x) = \frac{x}{\| x \|}$$

est homotope à $id_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$. D'un autre côté, l'application g permet de construire une homotopie entre r et l'application constante $x \mapsto g(0)$ (en prenant $G(t, x) = g(tr(x))$). Il en résulte que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est contractile.

□

Lemme Il n'existe pas d'application continue $g : D^n \to S^{n-1}$ telle que $g_{|_{S^{n-1}}} = id_{S^{n-1}}$.

Démonstration.

($n \geq 2$). L'application

$$r : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad r(x) = \frac{x}{\| x \|}$$

est homotope à $id_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$. D'un autre côté, l'application g permet de construire une homotopie entre r et l'application constante $x \mapsto g(0)$ (en prenant $G(t, x) = g(tr(x))$). Il en résulte que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est contractile.Ce qui est faux puisque $H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) = \mathbb{R}$. □

Théorème Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère S^n si et seulement si n est impair.

$\square$

Théorème Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère S^n si et seulement si n est impair.

Démonstration.

Lorsque $n = 2m - 1$, on peut considérer le champ

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

$\square$

Théorème Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère S^n si et seulement si n est impair.

Démonstration.

Lorsque $n = 2m - 1$, on peut considérer le champ

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

Dans le cas n est pair, supposons l'existence de $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v(x) \neq 0$ et $< v(x), x >= 0$ pour tout $x \in S^n$.

$\square$

Théorème Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère S^n si et seulement si n est impair.

Démonstration.

Lorsque $n = 2m - 1$, on peut considérer le champ

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

Dans le cas n est pair, supposons l'existence de $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v(x) \neq 0$ et $< v(x), x >= 0$ pour tout $x \in S^n$.

$\square$

Théorème Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère S^n si et seulement si n est impair.

Démonstration.

Lorsque $n = 2m - 1$, on peut considérer le champ

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

Dans le cas n est pair, supposons l'existence de $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v(x) \neq 0$ et $< v(x), x >= 0$ pour tout $x \in S^n$. On pose $w(x) = v(\frac{x}{\| x \|})$, et on considère l'application $F(t, x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)w(x)$

$\square$

Théorème Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère S^n si et seulement si n est impair.

Démonstration.

Lorsque $n = 2m - 1$, on peut considérer le champ

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

Dans le cas n est pair, supposons l'existence de $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v(x) \neq 0$ et $< v(x), x >= 0$ pour tout $x \in S^n$. On pose $w(x) = v(\frac{x}{\| x \|})$, et on considère l'application $F(t, x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)w(x)$ F définit une homotopie entre $id_{\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}}$ et l'application $f(x) = -x$.

$\square$

Théorème Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère S^n si et seulement si n est impair.

Démonstration.

Lorsque $n = 2m - 1$, on peut considérer le champ

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

Dans le cas n est pair, supposons l'existence de $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v(x) \neq 0$ et $< v(x), x >= 0$ pour tout $x \in S^n$. On pose $w(x) = v(\frac{x}{\| x \|})$, et on considère l'application $F(t, x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)w(x)$ F définit une homotopie entre $id_{\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}}$ et l'application $f(x) = -x$. D'où $H^n(f) = Id$ identité de $H^n(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$.

$\square$

Théorème Il existe un champ de vecteurs non nul sur la sphère S^n si et seulement si n est impair.

Démonstration.

Lorsque $n = 2m - 1$, on peut considérer le champ

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

Dans le cas n est pair, supposons l'existence de $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v(x) \neq 0$ et $< v(x), x >= 0$ pour tout $x \in S^n$. On pose $w(x) = v(\frac{x}{\| x \|})$, et on considère l'application $F(t, x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)w(x)$ F définit une homotopie entre $id_{\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}}$ et l'application $f(x) = -x$. D'où $H^n(f) = Id$ identité de $H^n(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$. Ceci est faux : n étant supposé pair, on montre (exercice !) que $H^n(f) = -Id$. □

Théorème (Adam's, 1962) Pour $n = 2m - 1$, soit $m = (2c+1)2^{4a+b}$ où $(0 \leq b \leq 3)$, il y a au plus $2^b + 8a - 1$ champs de vecteurs qui soient linéairement indépendants sur S^n.

Théorème (Adam's, 1962) Pour $n = 2m - 1$, soit $m = (2c+1)2^{4a+b}$ où $(0 \leq b \leq 3)$, il y a au plus $2^b + 8a - 1$ champs de vecteurs qui soient linéairement indépendants sur S^n.

Remarque Lorsque A et B sont deux fermés de $\mathbb{R}^n$ et que A est homéomorphe à B,

Théorème (Adam's, 1962) Pour $n = 2m - 1$, soit $m = (2c + 1)2^{4a+b}$ où $(0 \leq b \leq 3)$, il y a au plus $2^b + 8a - 1$ champs de vecteurs qui soient linéairement indépendants sur S^n.

Remarque Lorsque A et B sont deux fermés de $\mathbb{R}^n$ et que A est homéomorphe à B, alors $\mathbb{R}^n - A$ n'est pas forcement homéomorphe à $\mathbb{R}^n - B$

Théorème (Adam's, 1962) Pour $n = 2m - 1$, soit $m = (2c+1)2^{4a+b}$ où $(0 \leq b \leq 3)$, il y a au plus $2^b + 8a - 1$ champs de vecteurs qui soient linéairement indépendants sur S^n.

Remarque Lorsque A et B sont deux fermés de $\mathbb{R}^n$ et que A est homéomorphe à B, alors $\mathbb{R}^n - A$ n'est pas forcement homéomorphe à $\mathbb{R}^n - B$:Il existe $\Sigma \approx S^2$ mais $\mathbb{R}^3 - \Sigma$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^3 - S^2$.

Théorème (Adam's, 1962) Pour $n = 2m - 1$, soit $m = (2c+1)2^{4a+b}$ où $(0 \leq b \leq 3)$, il y a au plus $2^b + 8a - 1$ champs de vecteurs qui soient linéairement indépendants sur S^n.

Remarque Lorsque A et B sont deux fermés de $\mathbb{R}^n$ et que A est homéomorphe à B, alors $\mathbb{R}^n - A$ n'est pas forcement homéomorphe à $\mathbb{R}^n - B$:Il existe $\Sigma \approx S^2$ mais $\mathbb{R}^3 - \Sigma$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^3 - S^2$. Ref. *Rushing "Topological Embeddings. Academic Press, 1973."*

Théorème (Adam's, 1962) Pour $n = 2m - 1$, soit $m = (2c+1)2^{4a+b}$ où $(0 \leq b \leq 3)$, il y a au plus $2^b + 8a - 1$ champs de vecteurs qui soient linéairement indépendants sur S^n.

Remarque Lorsque A et B sont deux fermés de $\mathbb{R}^n$ et que A est homéomorphe à B, alors $\mathbb{R}^n - A$ n'est pas forcement homéomorphe à $\mathbb{R}^n - B$:Il existe $\Sigma \approx S^2$ mais $\mathbb{R}^3 - \Sigma$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^3 - S^2$. Ref. *Rushing "Topological Embeddings. Academic Press, 1973."*

Théorème Supposons que $A \neq \mathbb{R}^n$ et $B \neq \mathbb{R}^n$ soient deux fermés de $\mathbb{R}^n$. Si A est homeomorphe à B, alors

$$H^p(\mathbb{R}^n - A) \cong H^p(\mathbb{R}^n - B)$$

pour tout p.

Démonstration.

Lemme Si $\phi : A \to B$ est un homéomorphisme, alors il existe un homéomorphisme $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ prolongement de ϕ.

$\square$

Démonstration.

Lemme Si $\phi : A \to B$ est un homéomorphisme, alors il existe un homéomorphisme $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ prolongement de ϕ.
En particulier $\mathbb{R}^{2n} - A \approx \mathbb{R}^{2n} - B$.

$\square$

Démonstration.

Lemme Si $\phi : A \to B$ est un homéomorphisme, alors il existe un homéomorphisme $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ prolongement de ϕ.
En particulier $\mathbb{R}^{2n} - A \approx \mathbb{R}^{2n} - B$. Il en résulte (et en utilisant proposition $\sharp$) que pour $p > 0$:

$$H^p(\mathbb{R}^n - A) \cong H^{p+n}(\mathbb{R}^{2n} - A) \cong H^{p+n}(\mathbb{R}^{2n} - A) \cong H^p(\mathbb{R}^n - B)$$

et que

$$H^0(\mathbb{R}^n - A)/\mathbb{R} \cdot 1 \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} - A) \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} - A) \cong /\mathbb{R} \cdot 1$$

$\square$

Corollaire Soient A et B deux fermés de $\mathbb{R}^n$. Si $A \approx B$ alors $\mathbb{R}^n - A$ et $\mathbb{R}^n - B$ ont le même nombre de composantes connexes.

Corollaire Soient A et B deux fermés de $\mathbb{R}^n$. Si $A \approx B$ alors $\mathbb{R}^n - A$ et $\mathbb{R}^n - B$ ont le même nombre de composantes connexes.

Théorème (de séparation de Jordan-Brouwer)
Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) est un fermé homéomorphe à S^{n-1}, alors

Corollaire Soient A et B deux fermés de $\mathbb{R}^n$. Si $A \approx B$ alors $\mathbb{R}^n - A$ et $\mathbb{R}^n - B$ ont le même nombre de composantes connexes.

Théorème (de séparation de Jordan-Brouwer)
Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) est un fermé homéomorphe à S^{n-1}, alors $\mathbb{R}^n - \Sigma$ a deux composantes connexes U_1 et U_2 avec U_1 est borné et U_2 est non bornée. En plus, Σ est leur frontière commune ($\Sigma = \partial U_1 = \partial U_2$).

Théorème (Brouwer)
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n \to$ une application continue et injective, alors $f(U)$ est un ouvert et f est un homéomorphisme de U sur $f(U)$.

Théorème (Brouwer)
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n \to$ une application continue et injective, alors $f(U)$ est un ouvert et f est un homéomorphisme de U sur $f(U)$.

Corollaire 1. Si $V \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble (qu'on muni de la topologie induite usuelle de $\mathbb{R}^n$) homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Théorème (Brouwer)
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n \to$ une application continue et injective, alors $f(U)$ est un ouvert et f est un homéomorphisme de U sur $f(U)$.

Corollaire 1. Si $V \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble (qu'on muni de la topologie induite usuelle de $\mathbb{R}^n$) homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 2. Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{R}^m$ sont deux ouverts (non vides) et que U est homéomorphe à V alors $m = n$.

Exercices

Exercice 1. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ un noeud ($\Sigma \approx S^1$). Montrer que

$$H^p(\mathbb{R}^3 - \Sigma) = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad p = 0, 1, 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Exercices

Exercice 1. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ un noeud ($\Sigma \approx S^1$). Montrer que

$$H^p(\mathbb{R}^3 - \Sigma) = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad p = 0, 1, 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $F_k = \{m_1, \cdots, m_k\}$ un ensemble de k-points du plan $\mathbb{R}^2$. Montrer que $H^1(\mathbb{R}^2 - F_k) \cong \mathbb{R}^k$.

Exercices

Exercice 1. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ un noeud ($\Sigma \approx S^1$). Montrer que

$$H^p(\mathbb{R}^3 - \Sigma) = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad p = 0, 1, 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $F_k = \{m_1, \cdots, m_k\}$ un ensemble de k-points du plan $\mathbb{R}^2$. Montrer que $H^1(\mathbb{R}^2 - F_k) \cong \mathbb{R}^k$.

Exercice 3. Soient $D_1, \cdots, D_m$ m-disques fermés disjoints de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$H^p(\mathbb{R}^n - (\cup_{j=1}^m D_j)) = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad p = 0 \\ \mathbb{R}^m & si \quad p = n-1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$