Cohomologie de de Rham -3-
(Classe d'Euler - Classe de Thom)

Abdelhak Abouqateb

Université Cadi Ayyad
Faculté des sciences et Techniques Marrakech

Rencontre du GGTM
Géométrie, Topologie et systèmes dynamiques
Casablanca, du 26-28 octobre 2011

Isomorphisme de Thom

Soit V une variété compacte orientée de dimension n et $\pi : E \to V$ un fibré vectoriel orienté de rang q. Une orientation naturelle de la variété E en est alors induite. Par dualité de Poincaré, nous obtenons des isomorphismes : $\mathcal{P}_E : H_c^{q+k}(E) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(E)$ et $\mathcal{P}_V : H^k(V) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(V)$.

Isomorphisme de Thom

Soit V une variété compacte orientée de dimension n et $\pi : E \to V$ un fibré vectoriel orienté de rang q. Une orientation naturelle de la variété E en est alors induite. Par dualité de Poincaré, nous obtenons des isomorphismes :
$\mathcal{P}_E : H_c^{q+k}(E) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(E)$ et $\mathcal{P}_V : H^k(V) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(V)$.
D'un autre côté, l'homomorphisme $H_*(\pi) : H_*(V) \to H_*(E)$ est un isomorphisme (pour une section arbitraire s du fibré on a $\pi \circ s = id_V$ et $s \circ \pi$ est homotope à id_E).

Nous obtenons ainsi par composition un isomorphisme :

$$\mathcal{T} : H^*(V) \xrightarrow{\cong} H_c^{q+*}(E),$$

appelé *isomorphisme Thom*.

Nous obtenons ainsi par composition un isomorphisme :

$$\mathcal{T} : H^*(V) \xrightarrow{\cong} H_c^{q+*}(E),$$

appelé *isomorphisme Thom*.
De manière plus explicite, on considère l'opérateur d'intégration le long des fibres $\displaystyle\fint_{\mathbb{R}^q} : \Omega_c^{q+*}(E) \to \Omega_c^*(V)$; celui-ci commute aux différentiels et passe à la cohomologie :

$$H^*(\fint_{\mathbb{R}^q}) : H_c^{q+*}(E) \to H^*(V).$$

Nous obtenons ainsi par composition un isomorphisme :

$$\mathcal{T} : H^*(V) \xrightarrow{\cong} H_c^{q+*}(E),$$

appelé *isomorphisme Thom*.
De manière plus explicite, on considère l'opérateur d'intégration le long des fibres $\fint_{\mathbb{R}^q} : \Omega_c^{q+*}(E) \to \Omega_c^*(V)$; celui-ci commute aux différentiels et passe à la cohomologie :

$$H^*(\fint_{\mathbb{R}^q}) : H_c^{q+*}(E) \to H^*(V).$$

Il est facile de voir (en utilisant le théorème de Fubini de l'intégration le long des fibre) que c'est la bijection inverse de l'isomorphisme de Thom

Classe de Thom

La classe de cohomologie $\mathcal{T}(1) \in H_c^q(E)$, image de $1 \in H^0(V)$ par l'isomorphisem de Thom, est appelée *classe de Thom* de E ; elle sera notée $\tau(E)$.

Classe de Thom

La classe de cohomologie $\mathcal{T}(1) \in H_c^q(E)$, image de $1 \in H^0(V)$ par l'isomorphisem de Thom, est appelée *classe de Thom* de E ; elle sera notée $\tau(E)$.

Autrement dit, c'est l'unique calsse dans $H_c^q(E)$ dont l'intégrale sur la fibre E_x est égale à 1, pour tout $x \in V$.

Comme exercice, on peut montrer les deux propositons :

Proposition 1. Si $\vartheta \in \Omega_c^q(E)$ est un représentant de la classe de Thom , alors l'isomorphisme de Thom $\mathcal{T} : H^*(V) \to H_c^{*+q}(E)$ est réalisé par l'application $[\omega] \mapsto [\pi^*(\omega) \wedge \vartheta]$.

Comme exercice, on peut montrer les deux propositons :

Proposition 1. Si $\vartheta \in \Omega_c^q(E)$ est un représentant de la classe de Thom , alors l'isomorphisme de Thom $\mathcal{T} : H^*(V) \to H_c^{*+q}(E)$ est réalisé par l'application $[\omega] \mapsto [\pi^*(\omega) \wedge \vartheta]$.

Proposition 2. Soit $\vartheta \in \Omega_c^q(E)$ un représentant de la classe de Thom, et soit s une section arbitraire de E. Alors la classe de cohomologie $[s^*\vartheta] \in H^q(V)$ ne dépend pas des choix de ϑ et s.

Classe d'Euler topologique :

On note $e_\tau(E) \in H^q(V)$ la classe de cohomologie $[s^*\vartheta]$ (on peut prendre pour s la section nulle par exemple) ; on l'appellera *classe d'Euler topologique* du fibré vectoriel $E \to V$.

Classe d'Euler topologique :

On note $e_\tau(E) \in H^q(V)$ la classe de cohomologie $[s^*\vartheta]$ (on peut prendre pour s la section nulle par exemple) ; on l'appellera *classe d'Euler topologique* du fibré vectoriel $E \to V$.

lemme. Soit $\pi : E \to V$ un fibré vectoriel orienté. Alors : L'existence d'une section $s : V \to E$ partout non nulle implique la nullité de la classe d'Euler topologique.

Démonstration du lemme. Soit $<,>$ une métrique riemannienne sur E. Désignons par $\rho : E \to \mathbb{R}$ la fonction radiale définie par $\rho(v) = \| v \|$.

Démonstration du lemme. Soit $<,>$ une métrique riemannienne sur E. Désignons par $\rho : E \to \mathbb{R}$ la fonction radiale définie par $\rho(v) = \| v \|$.
Soit ϑ un représentant de la classe de Thom et K le support de ϑ. La fonction ρ est continue donc bornée sur K. Posons $c = 1 + \sup_{v \in K} \rho(v)$

Démonstration du lemme. Soit $<,>$ une métrique riemannienne sur E. Désignons par $\rho : E \to \mathbb{R}$ la fonction radiale définie par $\rho(v) = \| v \|$.

Soit ϑ un représentant de la classe de Thom et K le support de ϑ. La fonction ρ est continue donc bornée sur K. Posons $c = 1 + \sup_{v \in K} \rho(v)$

Le support de s est ainsi contenu dans $\{v \in E / \ \rho(v) < c\}$.

Autrement dit, $\vartheta_v = 0$ dès que $\rho(v) \geq c$.

Démonstration du lemme. Soit $<,>$ une métrique riemannienne sur E. Désignons par $\rho : E \to \mathbb{R}$ la fonction radiale définie par $\rho(v) = \| v \|$.
Soit ϑ un représentant de la classe de Thom et K le support de ϑ. La fonction ρ est continue donc bornée sur K. Posons $c = 1 + \sup_{v \in K} \rho(v)$
Le support de s est ainsi contenu dans $\{v \in E / \ \rho(v) < c\}$.
Autrement dit, $\vartheta_v = 0$ dès que $\rho(v) \geq c$.
Puisque s est partout non nulle, il existe $\epsilon > 0$ telle que $\rho(s(x)) \geq \epsilon$ pour tout $x \in \pi(K)$.

Démonstration du lemme. Soit $<,>$ une métrique riemannienne sur E. Désignons par $\rho : E \to \mathbb{R}$ la fonction radiale définie par $\rho(v) = \| v \|$.
Soit ϑ un représentant de la classe de Thom et K le support de ϑ. La fonction ρ est continue donc bornée sur K. Posons $c = 1 + \sup_{v \in K} \rho(v)$
Le support de s est ainsi contenu dans $\{v \in E / \ \rho(v) < c\}$.
Autrement dit, $\vartheta_v = 0$ dès que $\rho(v) \geq c$.
Puisque s est partout non nulle, il existe $\epsilon > 0$ telle que $\rho(s(x)) \geq \epsilon$ pour tout $x \in \pi(K)$.
On considére $\sigma = \frac{c}{\epsilon} s$. Il est alors facile de voir que $\sigma^*(\vartheta) = 0$.
D'où : $e_\tau(E) = 0$. $\square$

Une autre description :

Proposition. On a l'égalité :

$$e_\tau(E) = \mathcal{T}^{-1}(\tau(E) \frown \tau(E))$$

Une autre description :

Proposition. On a l'égalité :

$$e_\tau(E) = \mathcal{T}^{-1}(\tau(E) \frown \tau(E))$$

En particulier $e_\tau(E) = 0$ lorsque le rang du fibré est impaire.

Une autre description :

Proposition. On a l'égalité :

$$e_\tau(E) = \mathcal{T}^{-1}(\tau(E) \frown \tau(E))$$

En particulier $e_\tau(E) = 0$ lorsque le rang du fibré est impaire.

Démonstration. Soit ϑ un représentant de $\tau(E)$. On a : $\mathcal{T}(e(E)) = [\pi^*(s^*\vartheta) \wedge \vartheta]$. D'un autre côté, du fait que $s \circ \pi$ est homotope à id_E il en découle que $\pi^* \circ s^*(\vartheta)$ est cohomologue à ϑ. D'où le résultat.

Indice de Poincaré-Hopf :

Soit $E \to V$ un fibré vectoriel orienté $E \to V$ de base V variété compacte orientée tels que $\dim V = rang\ E$.

Indice de Poincaré-Hopf :

Soit $E \to V$ un fibré vectoriel orienté $E \to V$ de base V variété compacte orientée tels que $\dim V = rang\ E$. On désignera par $s_0 : V \hookrightarrow E$ la section nulle.

Indice de Poincaré-Hopf :

Soit $E \to V$ un fibré vectoriel orienté $E \to V$ de base V variété compacte orientée tels que $\dim V = rang\ E$. On désignera par $s_0 : V \hookrightarrow E$ la section nulle. Soit s une autre section de E et m un zéro de s (c'est-à-dire $s(m) = s_0(m)$).

Indice de Poincaré-Hopf :

Soit $E \to V$ un fibré vectoriel orienté $E \to V$ de base V variété compacte orientée tels que $\dim V = rang\ E$. On désignera par $s_0 : V \hookrightarrow E$ la section nulle. Soit s une autre section de E et m un zéro de s (c'est-à-dire $s(m) = s_0(m)$). Les deux applications s et s_0 sont des plongements de V dans E, leurs applications linéaires tangentes $T_m s$ et $T_m s_0$ injectent l'espace tangent $T_m V$ dans le même espace $T_{s_0(m)} E$.

Indice de Poincaré-Hopf :

On dira que s est *transverse* à s_0 si pour tout m qui zéro de s on a :

$$T_m s(T_m V) \cap T_m s_0(T_m V) = \{0\}.$$

Indice de Poincaré-Hopf :

On dira que s est *transverse* à s_0 si pour tout m qui zéro de s on a :

$$T_m s(T_m V) \cap T_m s_0(T_m V) = \{0\}.$$

L'espace $T_{s_0(m)}E$ s'identifie naturellement à la somme $T_m s_0(T_m V) \oplus E_m$ (comme pour tout espace vectoriel, la fibre E_m s'identifie à l'espace tangent $T_{s_0(m)}E_m = Ker(T_{s_0(m)}\pi)$).

Indice de Poincaré-Hopf :

On dira que s est *transverse* à s_0 si pour tout m qui zéro de s on a :

$$T_m s(T_m V) \cap T_m s_0(T_m V) = \{0\}.$$

L'espace $T_{s_0(m)}E$ s'identifie naturellement à la somme $T_m s_0(T_m V) \oplus E_m$ (comme pour tout espace vectoriel, la fibre E_m s'identifie à l'espace tangent $T_{s_0(m)}E_m = Ker(T_{s_0(m)}\pi)$). A partir de s, on peut définir l'application linéaire :

$$L : T_m V \to E_m, \quad L(v) = T_m s(v) - T_m s_0(v)$$

C'est un isomorphisme linéaire (à cause de la transversalité).

Indice de Poincaré-Hopf :

On dira que s est *transverse* à s_0 si pour tout m qui zéro de s on a :

$$T_m s(T_m V) \cap T_m s_0(T_m V) = \{0\}.$$

L'espace $T_{s_0(m)}E$ s'identifie naturellement à la somme $T_m s_0(T_m V) \oplus E_m$ (comme pour tout espace vectoriel, la fibre E_m s'identifie à l'espace tangent $T_{s_0(m)}E_m = Ker(T_{s_0(m)}\pi)$).
A partir de s, on peut définir l'application linéaire :

$$L : T_m V \to E_m, \quad L(v) = T_m s(v) - T_m s_0(v)$$

C'est un isomorphisme linéaire (à cause de la transversalité).
Les deux espaces $T_m V$ et E_m sont orientés par hypothèse.

▶ On définit l'*indice de Poincaré-Hopf* local $\iota(s, m)$ de s en m en posant : $\iota(s, m) = 1$ si L préserve les orientations, et $\iota(s, m) = -1$ dans le cas contraire.

Remarque. Si l'on se donne une carte locale positive (U, φ) autour de m ($\varphi(0) = m$) et $\{e_1, \dots, e_q\}$ un repère local direct E_U, alors l'expression locale de s est donnée par une fonctions $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ qui s'annule en 0.

Remarque. Si l'on se donne une carte locale positive (U, φ) autour de m ($\varphi(0) = m$) et $\{e_1, \ldots, e_q\}$ un repère local direct E_U, alors l'expression locale de s est donnée par une fonctions $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ qui s'annule en 0. Il est facile de voir que la condition de transversalité équivaut au fait que la différentielle df_m est un isomorphisme. Ainsi $\iota(s, m)$ est le signe du déterminant de df_m.

Remarque. Si l'on se donne une carte locale positive (U, φ) autour de m ($\varphi(0) = m$) et $\{e_1, \ldots, e_q\}$ un repère local direct E_U, alors l'expression locale de s est donnée par une fonctions $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ qui s'annule en 0. Il est facile de voir que la condition de transversalité équivaut au fait que la différentielle df_m est un isomorphisme. Ainsi $\iota(s, m)$ est le signe du déterminant de df_m. De plus, le théorème d'inversion local implique que f est un difféomorphisme local en m, et que par suite m est un zéro isolé de s.

Remarque. Si l'on se donne une carte locale positive (U, φ) autour de m ($\varphi(0) = m$) et $\{e_1, \ldots, e_q\}$ un repère local direct E_U, alors l'expression locale de s est donnée par une fonctions $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ qui s'annule en 0. Il est facile de voir que la condition de transversalité équivaut au fait que la différentielle df_m est un isomorphisme. Ainsi $\iota(s, m)$ est le signe du déterminant de df_m. De plus, le théorème d'inversion local implique que f est un difféomorphisme local en m, et que par suite m est un zéro isolé de s. Par conséquent, à cause de la compacité de V, l'ensemble des zéros d'une section transversale est toujours fini.

Théorème. Soit $E \to V$ un fibré vectoriel orienté $E \to V$ de base V variété compacte orientée tels que $\dim V = \mathit{rang}\ E$, et s une section transverse de E. Alors :

$$\int_V e_\tau(E) = \sum \iota(s, m)$$

Théorème. Soit $E \to V$ un fibré vectoriel orienté $E \to V$ de base V variété compacte orientée tels que $\dim V = \mathit{rang}\ E$, et s une section transverse de E. Alors :

$$\int_V e_\tau(E) = \sum \iota(s, m)$$

Conséquence. $e_\tau(E)$ est une classe de cohomologie entière.

Degré :

Soit $f : V \to W$ une application C^∞ entre variétés différentielles connexes compactes orientées et de même dimension n. On appelle *degré* de f et on note $\deg f$ le nombre réel tel que

$$H^n(f)\theta_W = \deg(f)\theta_V$$

Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega^n(W)$, on a $\int_V f^*(\omega) = \deg(f) \int_W \omega$.

Degré :

Soit $f : V \to W$ une application C^∞ entre variétés différentielles connexes compactes orientées et de même dimension n. On appelle *degré* de f et on note $\deg f$ le nombre réel tel que

$$H^n(f)\theta_W = \deg(f)\theta_V$$

Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega^n(W)$, on a $\int_V f^*(\omega) = \deg(f) \int_W \omega$.

Proposition

1. Si $f, g : V \to W$ sont homotopes alors $\deg(f) = \deg(g)$.
2. $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$
3. Si $\deg(f) \neq 0$ alors f est surjective.
4. Si f est un difféomorphisme, alors $\deg(f) = +1$ si f préserve l'orientation et $\deg(f) = -1$ sinon.

Application :

Exercice Soit V une variété différentiable compacte connexe orientée et $f : S^n \to V$ une application C^∞. Montrer que si $\deg(f) \neq 0$, alors $H^p(V) = 0$ pour tout $1 \leq p \leq n-1$.

Application :

Exercice Soit V une variété différentiable compacte connexe orientée et $f : S^n \to V$ une application C^∞. Montrer que si $\deg(f) \neq 0$, alors $H^p(V) = 0$ pour tout $1 \leq p \leq n-1$.

Le degré est un entier relatif : L'argument se base sur une propriété importante des valeurs régulières.
Soit $f : V \to W$ une application C^∞ entre variétés différentiables (non nécessairement de même dimension) ; on dira que $y \in W$ est une *valeur régulière* de f si pour tout $x \in f^{-1}(y)$ l'application linéaire tangente $T_x f : T_x V \to T_y W$ est sujective. En particulier, tout point y qui n'est pas dans l'image $f(V)$ est une valeur régulière.

Théorème. [Brown-Sard] Pour toute application différentiable $f : V \to W$, l'ensemble des valeurs régulières est dense dans W.

,

Théorème. [Brown-Sard] Pour toute application différentiable $f : V \to W$, l'ensemble des valeurs régulières est dense dans W.

Revenons maintenant au cas où $\dim(V) = \dim(W) = n$ et soit y une valeur régulière de f. Pour tout $x \in f^{-1}(y)$ l'application $T_x f$ est alors un isomorphisme, et par suite un difféomorphisme local autour x.

,

Théorème. [Brown-Sard] Pour toute application différentiable $f : V \to W$, l'ensemble des valeurs régulières est dense dans W.

Revenons maintenant au cas où $\dim(V) = \dim(W) = n$ et soit y une valeur régulière de f. Pour tout $x \in f^{-1}(y)$ l'application $T_x f$ est alors un isomorphisme, et par suite un difféomorphisme local autour x. En particulier les éléments de $f^{-1}(y)$ sont des points isolés. La compacité de V implique alors que $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini $\{m_1, \cdots, m_k\}$.

,

Théorème. [Brown-Sard] Pour toute application différentiable $f : V \to W$, l'ensemble des valeurs régulières est dense dans W.

Revenons maintenant au cas où $\dim(V) = \dim(W) = n$ et soit y une valeur régulière de f. Pour tout $x \in f^{-1}(y)$ l'application $T_x f$ est alors un isomorphisme, et par suite un difféomorphisme local autour x. En particulier les éléments de $f^{-1}(y)$ sont des points isolés. La compacité de V implique alors que $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini $\{m_1, \cdots, m_k\}$. Il existe des voisinages ouverts disjoints D_i de m_i et un voisinage ouvert U de y tels que $f^{-1}(U) = \cup_{i=1}^{k} D_i$ et la restriction de f à D_i soit un difféomorphisme sur U.

,

Théorème. [Brown-Sard] Pour toute application différentiable $f : V \to W$, l'ensemble des valeurs régulières est dense dans W.

Revenons maintenant au cas où $\dim(V) = \dim(W) = n$ et soit y une valeur régulière de f. Pour tout $x \in f^{-1}(y)$ l'application $T_x f$ est alors un isomorphisme, et par suite un difféomorphisme local autour x. En particulier les éléments de $f^{-1}(y)$ sont des points isolés. La compacité de V implique alors que $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini $\{m_1, \cdots, m_k\}$. Il existe des voisinages ouverts disjoints D_i de m_i et un voisinage ouvert U de y tels que $f^{-1}(U) = \cup_{i=1}^k D_i$ et la restriction de f à D_i soit un difféomorphisme sur U. Soit $\omega \in \Omega_c^n(U)$ telle que $\int_W \omega = 1$,

Théorème. [Brown-Sard] Pour toute application différentiable $f : V \to W$, l'ensemble des valeurs régulières est dense dans W.

Revenons maintenant au cas où $\dim(V) = \dim(W) = n$ et soit y une valeur régulière de f. Pour tout $x \in f^{-1}(y)$ l'application $T_x f$ est alors un isomorphisme, et par suite un difféomorphisme local autour x. En particulier les éléments de $f^{-1}(y)$ sont des points isolés. La compacité de V implique alors que $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini $\{m_1, \cdots, m_k\}$. Il existe des voisinages ouverts disjoints D_i de m_i et un voisinage ouvert U de y tels que $f^{-1}(U) = \cup_{i=1}^k D_i$ et la restriction de f à D_i soit un difféomorphisme sur U. Soit $\omega \in \Omega_c^n(U)$ telle que $\int_W \omega = 1$,nous obtenons ainsi que $f^*(\omega) = \sum_{i=1}^k \omega_i$ avec ω_i est l'image réciproque de ω par le difféomorphisme $f_{|_{D_i}}$.

Théorème. [Brown-Sard] Pour toute application différentiable $f : V \to W$, l'ensemble des valeurs régulières est dense dans W.

Revenons maintenant au cas où $\dim(V) = \dim(W) = n$ et soit y une valeur régulière de f. Pour tout $x \in f^{-1}(y)$ l'application $T_x f$ est alors un isomorphisme, et par suite un difféomorphisme local autour x. En particulier les éléments de $f^{-1}(y)$ sont des points isolés. La compacité de V implique alors que $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini $\{m_1, \cdots, m_k\}$. Il existe des voisinages ouverts disjoints D_i de m_i et un voisinage ouvert U de y tels que $f^{-1}(U) = \cup_{i=1}^{k} D_i$ et la restriction de f à D_i soit un difféomorphisme sur U. Soit $\omega \in \Omega_c^n(U)$ telle que $\int_W \omega = 1$,nous obtenons ainsi que $f^*(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \omega_i$ avec ω_i est l'image réciproque de ω par le difféomorphisme $f_{|_{D_i}}$. Il en découle :

$$\int_V f^*(\omega) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \pm 1$$