Petite introduction à la Géométrie Symplectique

A.AWANE

Département de Mathématiques FSB-UH2C
awane.awane@gmail.com

F.S.T. Marrakech les 30-12- 2017 et 20-01-2018

Naissance de la Géométrie Symplectique

NAISSANCE DE LA GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

Hermann Weyl (1885 – 1955) introduit l'adjectif « symplectique » pour la première fois

- L'adjectif **symplectique** (provenant du grec) signifie être entrelacé ; ce qui réunit les choses ensemble. **(J.M. Souriau)**
- Ce terme « **symplectique** » a été utilisé pour la première fois par **Hermann Weyl** (1885 – 1955) dans « Classical groups » pour désigner **le groupe symplectique** :

$$Sp(2n,\mathbb{R}) = \left\{ M \in Gl(2n;\mathbb{R}) \mid M^T JM = J \right\}$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Première apparition implicite de la géométrie symplectique : Jean Louis Lagrange (1736-1813)

Calcul symplectique apparu dans **trois mémoires de Jean Louis Lagrange** (1736-1813) **sur la théorie des perturbations des planètes du système solaire** publiés en 1808 ; 1809 et 1810 **dans les CRAS et dans l'ouvrage « Mécanique analytique tome 2 »** en 1811.

La mécanique classique était très géométrique à l'époque de Huygens (1629-1695) et Newton (1642-1727) .

Lagrange se vante que son traité sur la mécanique ne contienne aucune image. " *Alan Weinstein*"

Première apparition implicite de la géométrie symplectique : Jean Louis Lagrange (1736-1813)

Calcul symplectique apparu dans **trois mémoires de Jean Louis Lagrange** (1736-1813) **sur la théorie des perturbations des planètes du système solaire** publiés en 1808 ; 1809 et 1810 **dans les CRAS et dans l'ouvrage « Mécanique analytique tome 2 »** en 1811.

La mécanique classique était très géométrique à l'époque de Huygens (1629-1695) et Newton (1642-1727) .

Lagrange se vante que son traité sur la mécanique ne contienne aucune image. " *Alan Weinstein*"

Première apparition implicite de la géométrie symplectique : Jean Louis Lagrange (1736-1813)

Calcul symplectique apparu dans **trois mémoires de Jean Louis Lagrange** (1736-1813) **sur la théorie des perturbations des planètes du système solaire** publiés en 1808 ; 1809 et 1810 **dans les CRAS et dans l'ouvrage « Mécanique analytique tome 2 »** en 1811.

La mécanique classique était très géométrique à l'époque de Huygens (1629-1695) et Newton (1642-1727) .

Lagrange se vante que son traité sur la mécanique ne contienne aucune image. "*Alan Weinstein*"

Première apparition implicite de la géométrie symplectique : Jean Louis Lagrange (1736-1813)

Période de la mécanique analytique : Euler (1707-1783), Lagrange, Jacobi (1804-1851) et Hamilton (1805-1865), techniques analytiques pour l'étude des équations différentielles décrivant les systèmes mécaniques.

Reprise de la géométrisation de la mécanique : avec Poincaré (1854-1912) et Birkhoff (1884-1944).

Première apparition implicite de la géométrie symplectique : Jean Louis Lagrange (1736-1813)

Période de la mécanique analytique : Euler (1707-1783), Lagrange, Jacobi (1804-1851) et Hamilton (1805-1865), techniques analytiques pour l'étude des équations différentielles décrivant les systèmes mécaniques.

Reprise de la géométrisation de la mécanique : avec Poincaré (1854-1912) et Birkhoff (1884-1944).

Première apparition implicite de la géométrie symplectique : Jean Louis Lagrange (1736-1813)

L'ensemble $\mathscr{E}$ des mouvements elliptiques possibles d'une planète

$$\begin{cases} \mathscr{E} & = \text{mouvements orbitaux} \\ & = M\left(a_1, \ldots, a_6\right) \end{cases}$$

En 1808, Lagrange a d'abord construit des « crochets » $[a_i, a_j]$, appelés crochets de Lagrange, qui, comme chaque des a_i sont des fonctions sur $\mathscr{E}$ satisfaisant à :

$$[a_i, a_j] = -[a_j, a_i] \tag{1}$$

Première apparition implicite de la géométrie symplectique

Lagrange a construit une fonction $\Phi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, appelée fonction perturbatrice, qui dépend des forces perturbatrices de sorte que la dérive provoquée par la perturbation satisfait à :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = [a_i, a_j] \frac{da_j}{dt} \tag{2}$$

La matrice des crochets est non-dégénérée :

$$\det([a_i, a_j]) \neq 0 \tag{3}$$

l'inversibilité de la matrice $([a_i, a_j])$ donne :

$$\frac{da_i}{dt} = b_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial a_j} \tag{4}$$

Première apparition implicite de la géométrie symplectique : Jean Louis Lagrange (1736-1813)

Enfin, Lagrange a trouvé des **éléments spéciaux** $(q_I, q_2, q_3, p_I, p_2, p_3)$ pour lesquels

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \ , \ [q_i, p_j] = \delta_{ij}. \tag{5}$$

En termes de ces éléments, les équations (4) deviennent

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \ ; \ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \tag{6}$$

qui sont connus aujourd'hui comme **les équations de Hamilton**.
En termes géométriques différentiels modernes, on a :

$$[a_i, a_j] = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial a_j}, \frac{\partial}{\partial a_i}\right)$$

J.M. Souriau a introduit la géométrie symplectique en 1953 au colloque du CNRS de Strasbourg

Jean Marie Souriau **introduit la terminologie « géométrie symplectique » et découvre le rôle central des structures symplectiques** en **Mécanique** ; **son premier travail sur le sujet, intitulé « Géométrie symplectique différentielle. Applications » , est présenté au colloque du CNRS de Strasbourg en 1953.**

J.M. Souriau : la variété des mouvements d'un système hamiltonien

J.M. Souriau a montré que **l'ensemble des mouvements d'un système hamiltonien possède une structure naturelle de variété symplectique** ; les crochets de Lagrange des fonctions coordonnées locales sont les composantes de la forme symplectique de cette variété. **L'aspect local de ces propriétés avait été découvert dès 1809 par Lagrange ; Jean-Marie Souriau leur a donné une formulation géométrique globale.**

J.M. Souriau **a mis en place de la mécanique quantique, dans le cadre de la géométrie symplectique** en 1965

En 1965, J.M. Souriau donne un fondement mathématique rigoureux au processus de quantification d'un système mécanique classique.
La seconde étape de la quantification, utilisant une polarisation de la variété symplectique (M, θ), doit permettre de construire un espace de Hilbert et d'associer, à chaque observable classique d'un système mécanique, un opérateur autoadjoint sur cet espace.

Étape des variétés de Poisson avec Lichnérowicz, Kirillov, Weinstein, Liberman,...

L'étude approfondie des structures de Poisson est due à André Lichnerowicz et indépendamment Alexander Kirillov, Alan Weinstein,....

Références : Notes historiques

Patrick Iglesias-Zemmour
Aperçu des origines de la géométrie symplectique
2002

C.M. Marles
Aux sources de la géométrie symplectique : les mémoires de Lagrange et de Poisson sur la méthode de variation des constantes
Académie des sciences. Sciences mécaniques et informatiques, 29 janvier 2008

C.M. Marles
Hommage à Jean Marie Souriau
SMF – Gazette – 133, juillet 2012

Références : Notes historiques

J.M. Souriau
Structure des systèmes dynamiques
DUNOD PARIS 1970.

J.M. Souriau
Géométrie symplectique
Vidéo sur Youtube.Références : Notes historiquesRéférences : Notes historiques

A.Weinstein
symplectic geometry
BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 5, Number 1, July 1981

Aspect linéaire de la Géométrie Symplectique

ASPECT LINÉAIRE DE LA GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

$2-$formes extérieures

Soient E un $\mathbb{R}-$e.v., $\dim E < \infty$ et $\theta \in \bigwedge_p(E)$.

Produit intérieur. Sous-espace associé. Rang d'une $p-$forme ...

- $i(x) : \bigwedge_p(E) \longrightarrow \bigwedge_{p-1}(E)$:
$$i(x)\theta\,(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}) = \theta\,(x, x_1, x_2, \dots, x_{p-1})\,;$$
- $\alpha \wedge \beta\,(x, y) = \alpha\,(x)\,\beta\,(y) - \alpha\,(y)\,\beta\,(x)$ pour tous $\alpha, \beta \in \bigwedge_1(E)$ et $x, y \in E$;
- **Le sous espace associé** à θ est :
$$A(\theta) = \{x \in E \mid i(x)\theta = 0\} \equiv \ker\theta$$
le rang de θ : $rang(\theta) = codim(A(\theta))\,;$

2−formes extérieures

- Soit $\theta \in \bigwedge_2(E)$ est dite **non dégénérée** si l'application linéaire

$$\zeta : E \longrightarrow E^*,\ x \longmapsto i(x)\theta$$

est un **isomorphisme d'e.v.**.

Matrice et discriminant d'une 2−forme extérieure

Soient $\theta \in \bigwedge_2(E)$ et $\mathscr{B}_0 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

- La matrice de θ par rapport à $\mathscr{B}_0$ est :

$$A = M(\theta, \mathscr{B}_0) = (\theta(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n} :$$

et l'on a : $\theta(x, y) = X^T AY$.

- Le discriminant de θ par rapport à B_0 :

$$dis_{\mathscr{B}_0}\theta = \det A = \det(M(\theta, \mathscr{B}_0))$$

Théorème de classification

Soit θ une 2-forme extérieur non nulle sur E. Alors il existe une base $\mathscr{B} = \{e_1, e'_1, \ldots, e_n, e'_n, v_1, \ldots, v_r\}$ de E, de base duale $\mathscr{B}^* = \left\{e^1, e'^1, \ldots, e^n, e'^n, v^1, \ldots, v^r\right\}$telle que :

$$M(\theta, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} S & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & S & & & \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ou, ce qui est équivalent : $\theta = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge e'^i$.

Démonstration

Si $\theta \neq 0$, $\exists e_1, e_1' \in E : \theta(e_1, e_1') = 1$, et, donc,

$$\theta(e_1, e_1') = 1$$

Soient $E_1 = vect\,(e_1, e_1')$ et $\mathscr{B}_1 = \{e_1, e_1'\}$. On a

$$M(\theta_{E_1}, \mathscr{B}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = S.$$

Désignons par $E_2 = E_1^{\perp}$. On a $E = E_1 \oplus E_2$.
Si $\theta_{E_2} = 0$, on arrête le processus.
Sinon, on répète la même procédure sur E_2 et on obtient e_2 et e_2' tel que $\theta(e_2, e_2') = 1$.

Démonstration

De proche en proche, on peut trouver $2p$ vecteurs indépendants

$$e_1, e_1', e_2, e_2', \ldots, e_n, e_n'$$

tels que :

$$\theta\left(e_1, e_1'\right) = \theta(e_2, e_2') = \ldots = \theta(e_n, e_n') = 1,$$

et l'espace E s'écrit :

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_n \oplus K$$

avec $E_i = vect(e_i, e_i')$, $E_{n-1} = E_n \oplus K$ et θ est nulle sur le sous espace K dans le cas où la dimension de $\dim E > 2n$.

Démonstration

Complétons le système $e_1, e_1', e_2, e_2', \ldots, e_p, e_p'$ en une base

$$\mathscr{B} = \left\{e_1, e_1', e_2, e_2', \ldots, e_n, e_n', w_{2n+1}, \ldots, w_m\right\}$$

de E. La matrice de θ par rapport à cette base s'écrit :

$$M(\theta, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \ldots & & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ \vdots & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ 0 & & & \ldots & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = N$$

Remarques

- $rang(\theta) = rang(M(\theta, \mathscr{B})) = 2n$ est paire ;
- Soient $\theta, \varphi \in \bigwedge_2(E)$ de même rang $2n$,
  $A = M(\theta, \mathscr{B}_0)$, $B = M(\varphi, \mathscr{B}_0)$. .. $\exists \mathscr{B}, \mathscr{C}$ bases de E t.q. :

  $$M(\theta, \mathscr{B}) = M(\varphi, \mathscr{C}) = N$$

  Soient $P = M(Id_E, \mathscr{B}, \mathscr{B}_0)$ et $Q = M(Id_E, \mathscr{C}, \mathscr{B}_0)$. Des relations : $\theta(X, Y) = X^T AY = X'^T P^T APY' = X'^T NY'$, il vient

  $$P^T AP = N$$

  de même on a : $Q^T AQ = N$. Et, donc,

  $$\left(PQ^{-1}\right)^T A \left(PQ^{-1}\right) = B$$

  ce qui montre que les matrices A et B sont équivalentes.

Remarques

- θ est de **rang maximum** (=dim $E = 2n$)

$$\Longleftrightarrow M(\theta, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ -1 & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{"}\theta = \textstyle\sum_{i=1}^{n} e^i \wedge e'^i\text{"}$$

$\Longleftrightarrow \theta$ **non dégénérée**.

Ici $\mathscr{B}$ et sa base duale $\mathscr{B}^*$ sont données par :

$$\mathscr{B} = \left\{e_1, e'_1, \ldots, e_n, e'_n\right\}, \ \mathscr{B}^* = \left\{e^1, e'^1, \ldots, e^n, e'^n\right\}.$$

Espaces vectoriels symplectiques

- Supposons que θ est de rang maximum 2n. En réordonnant la base $\mathscr{B}_0$ sous :

$$\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n, e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$$

on obtient :

$$M(\theta, \mathscr{B}_0) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = J$$

et l'on a :$\theta(X, Y) = X^T JY$.

Espace vectoriel symplectique

Un espace vectoriel symplectique est un couple (E, θ) dans lequel E est un e.v. et θ est une $2-$forme extérieur de rang maximum.

Espaces vectoriels symplectiques

- Supposons que θ est de rang maximum 2n. En réordonnant la base $\mathscr{B}_0$ sous :

$$\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n, e_1', e_2', \dots, e_n')$$

on obtient :

$$M(\theta, \mathscr{B}_0) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = J$$

et l'on a :$\theta(X, Y) = X^T J Y$.

Espace vectoriel symplectique

Un espace vectoriel symplectique est un couple (E, θ) dans lequel E est un e.v. et θ est une 2$-$forme extérieur de rang maximum.

Base symplectique

La base

$$\mathscr{B} = \left\{e_1, e'_1, \ldots, e_n, e'_n\right\}$$

de E de base duale $\mathscr{B}^* = \left\{e^1, e'^1, \ldots, e^n, e'^n\right\}$ par rapport à laquelle

$$M(\theta, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ -1 & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} = N$$

ou

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge e'^i$$

est appelée **base symplectique de** E.

Exemples d'espaces vectoriels symplectiques

- $\left(\mathbb{R}^{2n}, \theta = \sum dx^i \wedge dy^i\right)$ est un espace vectoriel symplectique. Pour $X = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ et $X' = (x'_1, \ldots, x'_n, y'_1, \ldots, y'_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, on a ;

$$\theta\left(X, X'\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i y'^i - x'^i y^i\right)$$

Cette structure, dite standard, ou canonique.

- Soit E un $\mathbb{K}-$e.v. , $\dim E < \infty$, alors $E \times E^*$ muni de la forme :

$$\theta((x,\alpha),(y,\beta)) = \langle x, \beta \rangle - \langle y, \alpha \rangle$$

est un espace vectoriel symplectique.

Orthogonalité symplectique

Soit (E, θ) un espace vectoriel symplectique.

Définitions

Soient $x, y \in E$, L , M et U des sous-espaces vectoriels de E

1. $x \perp y \iff \theta(x, y) = 0$;
2. $L \perp M \iff x \perp y$, pour tout $(x, y) \in L \times M$;
3. L'**orthogonal « symplectique »** d'un sous-espace U de E est défini par :

$$U^{\perp} = \{x \in E \mid \theta(x, y) = 0 \ \forall y \in U\}$$

4. L et M de E sont dits **supplémentaires orthogonaux** si $E = L \oplus M$ et $L = M^{\perp}$;
5. Le radical de L : $\mathrm{Rad}\, L = L \cap L^{\perp}$

Orthogonalité symplectique

Soient $A, B \subseteq E$, **non vides**, H, K **s.e.v.** de (E, θ).

Propriétés

1. $A \subseteq B \Longrightarrow A^{\perp} \supseteq B^{\perp}$;
2. $A \subseteq A^{\perp\perp}$;
3. $H = H^{\perp\perp}$;
4. $(H \cap K)^{\perp} = H^{\perp} + K^{\perp}$;
5. $(H + K)^{\perp} = H^{\perp} \cap K^{\perp}$;
6. $\dim H^{\perp} = \dim E - \dim H$; $(\zeta\left(H^{\perp}\right) = Ann(H) \simeq (E/H)^{*})$
7. $E^{\perp} = \{0\}$;
8. $A(\theta_H) = \{x \in H / \, i(x)\theta_H = 0\} = \mathrm{Rad} H$;
9. $rg(\theta_H) = dim H - dim(\mathrm{Rad} H)$;
10. $rg(\theta_H) - rg(\theta_{H^{\perp}}) = 2\dim H - \dim E$.

Sous espace **non isotrope**, **totalement isotrope**, **coïsotrope, lagrangien** d'un e.v. symplectique

1. H est un **sous espace vectoriel symplectique** (ou **non isotrope**) si, $\mathrm{Rad}H = \{0\}$
2. H est **isotrope** si $\mathrm{Rad}H \neq (0)$.
3. H est **totalement isotrope** si $H \subseteq H^{\perp}$.
4. H est **coïsotrope** si $H \supseteq H^{\perp}$.
5. H est **lagrangien** si H est un sous espace totalement isotrope maximal ; et donc $H = H^{\perp}$.

Sous espace **non isotrope**, **totalement isotrope**, **coïsotrope, lagrangien** d'un e.v. symplectique

Propriétés :

1. H sous espace symplectique $\Longleftrightarrow$ θ_H non dégénérée $\Longleftrightarrow E = H \oplus H^{\perp}$;
2. H isotrope $\Longleftrightarrow$ θ_H est dégénérée ;
3. H totalement isotrope $\Longleftrightarrow$ θ_H est nulle ;
4. H totalement isotrope $\Longrightarrow \dim H \leq \frac{1}{2} \dim E$;
5. Il existe dans E des sous espaces vectoriels totalement isotropes de dimension maximum $\frac{1}{2} \dim E$;
6. Tout sous espace vectoriel totalement isotrope est contenu dans un sous espace lagrangien ;
7. Soit L un sous espace totalement isotrope de E. Alors L est lagrangien $\Longleftrightarrow \dim L = \frac{1}{2} \dim E$.

Morphismes d'espaces vectoriels symplectiques

Endomorphisme symplectique

Soit (E,θ) un e.v. symplectique et $\mathscr{B}$ une base symplectique. Soit $\sigma \in End_{\mathbb{K}}E$, on dit que σ est un **endomorphisme symplectique** si $\sigma^*\theta = \theta$, i.e. :

$$\theta(\sigma(x),\sigma(y)) = \theta(x,y) \ , \ \forall x,y \in E$$

Théorème

On a l'équivalence suivante :

1. *σ est symplectique ;*
2. *σ est invariant et $\sigma^{-1} = \sigma^T$;*
3. *σ transforme une base symplectique en une base symplectique ;*
4. *Si $\mathscr{B}$ est une base symplectique, alors $N = A^T NA$ avec $A = M_{\mathscr{B}}(\sigma)$.*

Groupe symplectique $Sp(E,\theta)$

Définition

L'ensemble des automorphismes de E qui conservent la forme symplectique θ, est appelé groupe symplectique de E, et est noté $Sp(E,\theta)$.

Conséquence de la définition

La relation $\sigma^*\theta = \theta$, entraine $\sigma^*\theta^n = \theta^n$; avec

$$\theta^n = n! e^1 \wedge e'^1 \wedge \ldots \wedge e^n \wedge e'^n$$

forme volume. Par ailleurs $\sigma^*\theta^n = (\det\sigma)\,\theta^n$, ce qui montre que : $\det\sigma = 1$, $\forall\sigma \in Sp(E,\theta)$.

Groupe symplectique $Sp(E,\theta)$

Définition

L'ensemble des automorphismes de E qui conservent la forme symplectique θ, est appelé groupe symplectique de E, et est noté $Sp(E,\theta)$.

Conséquence de la définition

La relation $\sigma^*\theta = \theta$, entraine $\sigma^*\theta^n = \theta^n$; avec

$$\theta^n = n! e^1 \wedge e'^1 \wedge \ldots \wedge e^n \wedge e'^n$$

forme volume. Par ailleurs $\sigma^*\theta^n = (\det\sigma)\,\theta^n$, ce qui montre que : $\det\sigma = 1,\ \forall\sigma \in Sp(E,\theta)$.

Groupe symplectique $Sp(E, \theta)$

Proposition

Les automorphismes symplectiques transforment les sous-espaces totalement isotropes (resp. lagrangiens) en sous-espaces totalement isotropes (resp. lagrangiens).

Groupe symplectique $Sp(E, \theta)$

Démonstration.

Soient $\sigma \in Sp(E, \theta)$ et L un sous-espace vectoriel de E totalement isotrope. Pour tous $x, y \in L$ on a

$$\theta(\sigma(x), \sigma(y)) = \theta(x, y) = 0$$

donc le sous-espace $\sigma(L)$ est totalement isotrope.
Supposons que L soit lagrangien, comme $\sigma(L)$ est de dimension $n = \frac{1}{2} \dim E$, on déduit qu'il est lagrangien.

$\square$

Groupe symplectique $Sp(E, \theta)$

Proposition

Soit L un sous-espace lagrangien, M_0 un sous-espace totalement isotrope de E supplémentaire à L. Alors il existe un sous-espace lagrangien M de E , supplémentaire à L et contenant M_0.

Démonstration.

Soit M un élément maximal de l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes de E transverses à L contenant M_0. Alors M est un sous-espace lagrangien. $\square$

Groupe symplectique $Sp(E,\theta)$ ou $Sp(2n,\mathbb{R})$

On note par $Sp(2n,\mathbb{R})$ le groupe $Sp(E,\theta)$ en tant que groupe de matrices des automorphismes symplectiques de E par rapport à la base symplectique $\mathscr{B}_0$.

Donc, si U désigne la matrice d'un automorphisme symplectique σ par rapport à la base symplectique $\mathscr{B}_0$, alors on a :

$$U^T JU = J.$$

Groupe symplectique

Une matrice carrée

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec A, B, C et D sont des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, est dans le groupe symplectique , si et seulement si,

$$\begin{cases} A^T D - C^T B = I_n; & \\ A^T C = C^T A; & B^T D = D^T B \end{cases}$$

Algèbre de Lie du groupe symplectique $Sp(E, \theta)$

Théorème

Le groupe symplectique $Sp(E, \theta)$ est un sous groupe de Lie de dimension $2n^2 + n$.
L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(E, \theta)$ de $Sp(E, \theta)$ est constituée des matrices du type :

$$\begin{pmatrix} A & S \\ S' & -A^T \end{pmatrix}$$

où A, S, S' sont des matrices $n \times n$, à coefficients réels avec S, S' symétriques.

Aspect différentiel de la Géométrie Symplectique

ASPECT DIFFÉRENTIEL DE LA GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

Introduction aux variétés symplectiques : Processus déterministes

Processus d'évolution déterministes

Un processus d'évolution est **déterministe** si son **évolution et son passé** sont univoquement sont définis par **son état présent**.
L'ensemble de tous les états de ce processus est appelé **espace des phases**.

Remarques

1. En mécanique classique, on étudie le mouvement de systèmes dont sont complètement déterminés par les positions et les vitesses initiales. L'espace de phase de ce système mécanique est l'ensemble des positions et vitesses du système considéré.
2. En mécanique classique, le mouvement d'un système peut être décrit par des équations différentielles ordinaires.

Introduction aux variétés symplectiques : Processus déterministes

Processus d'évolution déterministes

Un processus d'évolution est **déterministe** si son **évolution et son passé** sont univoquement sont définis par **son état présent**.
L'ensemble de tous les états de ce processus est appelé **espace des phases**.

Remarques

1. En mécanique classique, on étudie le mouvement de systèmes dont sont complètement déterminés par les positions et les vitesses initiales. L'espace de phase de ce système mécanique est l'ensemble des positions et vitesses du système considéré.
2. En mécanique classique, le mouvement d'un système peut être décrit par des équations différentielles ordinaires.

Introduction : Équations de Hamilton

Mécanique hamiltonienne

La mécanique hamiltonienne est une géométrie de l'espace de phase

$$M = \{(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)\}$$

dans laquelle les équations du mouvement sont régies par les équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} & = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} & = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

où $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Introduction : Équations de Newton

Équation de Newton : $\overrightarrow{F} = m\frac{d\overrightarrow{r}}{dt^2}$

Les équations de Newton s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} & = \overrightarrow{v} \\ \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} & = \frac{1}{m}\overrightarrow{F} \end{cases}$$

Supposons que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel $V\left(\overrightarrow{r}\right)$: $\overrightarrow{F} = -gradV$. alors dans l'espace de phase $M = \{(q_i = x_i, p_i = mv_i) \mid i = 1,2,3\}$, les équations du mouvement s'obtiennent à partir des équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} & = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} & = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

où $H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(q_1, q_2, q_3)$.

Introduction : Oscillateur harmonique

Oscillateur harmonique : $\frac{d^2q}{dt^2} + q = 0$

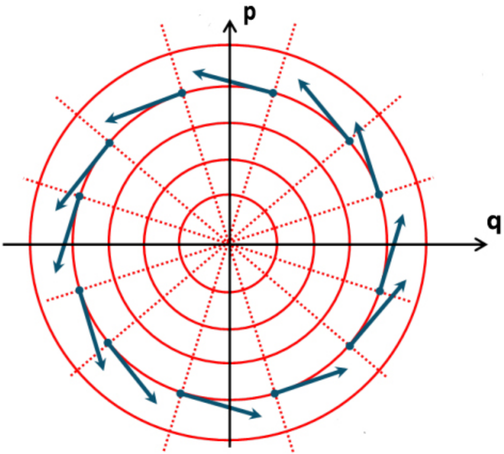
Le système hamiltonien associé à la fonction

$$H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$$

est

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} & = p \\ \frac{dp}{dt} & = -q \end{cases}$$

Introduction : Oscillateur harmonique



Forme de Liouville sur l'espace des phases : T^*M

Fibré cotangent : T^*M

$$T^*M = \bigcup_{x\in M} T_x^*M = \{(x,\omega_x) \mid x \in M \text{ et } \omega_x \in T_x^*M\}$$

$$\begin{array}{ccccc} & T\,(T^*M) & \overset{(\pi_M)_*}{\longrightarrow} & T^*M & \\ \pi_{T^*M} & \downarrow & & \downarrow & \pi_M \\ & T^*M & \underset{\pi_M}{\longrightarrow} & M & \end{array}$$

M étant une v.d. $\dim M = n$.

Forme de Liouville sur l'espace des phases : T^*M

Forme de Liouville

$u = (x, \omega_x) \in T^*M$, $X \in \mathfrak{X}(T^*M)$ et $X_u \in T_u(T^*M)$

$$\langle X_u, \lambda_u \rangle = \langle (\pi_M)_* (X_u), \omega_x \rangle$$

Dans un s.c.l. $(\overline{U} = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n))$ dans T^*M au dessus de $(U, \varphi = (q_1, \ldots, q_n))$, où

$$q_i(x, \omega_x) = pr_i \circ \varphi \circ \pi_M(x, \omega_x) \;\; et \;\; p_i(x, \omega_x) = \omega_x \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right)$$

$X_{\overline{U}}$ et ω_x s'écrivent :

$$X_{\overline{U}} = \sum_i \left(a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right), \omega_x = \sum_i c_i dq_i$$

Forme de Liouville sur l'espace des phases : T^*M

donc, $\langle X_u, \lambda_u \rangle = \sum_i a_i c_i$, par conséquent

$$\lambda_{\overline{U}} = \sum_i p_i dq_i$$

La forme de Pfaff λ,ainsi définie sur le fibré cotangent T^*M est appelée forme de Liouville.
La forme différentielle extérieure $\Lambda = d\lambda$ s'appelle forme symplectique canonique sur le fibré cotangent, son expression locale est donnée par :

$$\Lambda_{\overline{U}} = d\lambda_{\overline{U}} = \sum_i dp_i \wedge dq_i$$

Cette 2-forme vérifie les propriétés suivantes :

1. Λ fermée :$d\Lambda = 0$;
2. Λ non dégénérée : $i(X)\Lambda = 0 \Longrightarrow X = 0$.

Variété symplectique

C'est la donnée sur une variété M de dimension paire d'une $2-$forme différentielle θ telle que :

1. θ fermée :$d\theta = 0$;
2. θ non dégénérée : $i(X)\theta = 0 \Longrightarrow X = 0$.

Exemples de structures symplectiques

1. Structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$: $\left(\mathbb{R}^{2n}, \theta_0\right)$ où $\theta_0 = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n$, $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ étant les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^{2n}$.
2. Structure symplectique standard sur le tore $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$. Cette structure induite par la structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$.
3. Structure symplectique sur le fibré cotangent : (T^*M, Λ), Λ étant la forme de Liouville sur le fibré cotangent de M..

Structure symplectique sur l'orbite coadjointe d'un groupe de Lie

Soient G un groupe de Lie **connexe** d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ et M une variété connexe de dimension n. On suppose que G opère différentiablement à gauche sur M par :

$$\varphi : G \times M \longrightarrow M.$$

Pour tout $g \in G$, on désigne par φ_g le difféomorphisme

$$\varphi_g : x \longmapsto \varphi(g,x) = g.x.$$

Pour tout $X \in \mathscr{G}$, on désigne X_M le champ fondamental associé à X par l'action de G sur M. Il est défini par :

$$X_M(x) = \frac{d}{dt}(\varphi(\exp(tX),x))_{|t=0}.$$

Structure symplectique sur l'orbite coadjointe d'un groupe de Lie

Pour tout $x \in M$, on note par :

$$\begin{array}{rcl} G.x & = & \{g.x \mid g \in G\} \\ G_x & = & \{g \in G \mid g.x = x\} \end{array}$$

la $G-$orbite et le sous-groupe d'isotropie de x respectivement. G_x sous-groupe fermé de G et l'espace homogène G/G_x admet une structure naturelle de variété différentiable.

On munit $G.x$ de la structure de v.d. pour laquelle la bijection :

$$G/G_x \longrightarrow G.x \quad ; \quad g.G_x \longmapsto \varphi(g,x) = g.x,$$

soit un isomorphisme de v.d..

Structure symplectique sur l'orbite coadjointe d'un groupe de Lie

Pour M non nécessairement connexe on a :

Pour tous $x \in M$ et $y \in G.x$:

$$T_y(G.x) = \{X_M(y) \mid X \in \mathscr{G}\},$$
$$\mathscr{G}_x = \{X \in \mathscr{G} \mid X_M(x) = 0\}.$$

$\mathscr{G}_x$ étant l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie G_x.

Structure symplectique sur l'orbite coadjointe d'un groupe de Lie

Rappel :

$$i_g : G \longrightarrow G \quad ; \quad x \longmapsto gxg^{-1}$$
$$Ad_g : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{G} \quad ; \quad Ad_g = di_g(e)$$

Et, Il existe une action naturelle du groupe de Lie G sur $\mathscr{G}^*$, dite **coadjointe**, définie par :

$$< g.f, X >=< Ad_g^*(f), X >=< f, Ad_{g^{-1}}(X) >,$$

pour tous $g \in G$, $f \in \mathscr{G}^*$ et $X \in \mathscr{G}$. Les orbites de cette action sont appelées $G-$**orbites coadjointes.**

Structure symplectique sur l'orbite coadjointe d'un groupe de Lie

Soient $f \in \mathscr{G}^*$et $O_f = G.f$ la $G-$orbite coadjointe de f et G_f le sous groupe d'isotropie f. Dans les notations ci-dessus, on a l'identification suivante :

$$O_f = G.f = \frac{G}{G_f}.$$

Pour tout $X \in \mathscr{G}$, on désigne par X^* le champ fondamental associé à X par l'action coadjointe de G sur $\mathscr{G}^*$; il résulte de l'égalité

$$\frac{d}{dt}(Ad_{\exp(tX)}Y)_{|t=0} = [X, Y]$$

Structure symplectique sur l'orbite coadjointe d'un groupe de Lie

Soient $\mathscr{O}$ une $G-$orbite coadjointe, $f \in \mathscr{O}$, et $X_1, X_2, Y \in \mathscr{G}$ tels que

$$X_1^*(f) = X_2^*(f).$$

on a donc

$$(X_1 - X_2)^*(f) = X_1^*(f) - X_2^*(f) = 0,$$

par conséquent, $X_1 - X_2 \in \mathscr{G}_f$, et, donc

$$\begin{array}{rcl} < f, [X_1 - X_2, Y] > & = & < f, \frac{d}{dt}(Ad_{\exp(t(X_1 - X_2))} Y)_{|t=0} > \\ & = & \frac{d}{dt}(< f, (Ad_{\exp(t(X_1 - X_2))} Y)_{|t=0} >)_{|t=0} \\ & = & \frac{d}{dt}\left(Ad^*_{\exp(t(X_1 - X_2))}(f) Y\right)_{|t=0} \\ & = & \left\langle (X_1 - X_2)^*(f), Y \right\rangle \\ & = & 0 \end{array}$$

Structure symplectique sur l'orbite coadjointe d'un groupe de Lie

et par conséquent on a

$$\begin{array}{rcl} < f,[X_1,Y]] > & = & < f,[X_1 - X_2, Y] > + < f,[X_2,Y]] > \\ & = & < f\,[X_2,Y] > . \end{array}$$

Ceci montre que sur toute $G-$orbite coadjointe $\mathscr{O}$, on a une $2-$formes différentielles $\theta \in \bigwedge_2(\mathscr{O})$, définies par :

$$\theta_f\left(X^*(f), Y^*(f)\right) = - < f,[X,Y] > .$$

pour tous $f \in \mathscr{O}$, $X^*(f), Y^*(f) \in T_f\mathscr{O}$.

Structure symplectique sur l'orbite coadjointe d'un groupe de Lie

Montrons que θ est fermée.
D'une part, on a :

$$\begin{array}{rcl}\theta_f([X^*, Y^*], Z^*) & - & \theta_f([X^*, Z^*], Y^*) + \theta_f([Y^*, Z^*], X^*) \\ & = & < f, [[X, Y], Z] > - < f, [[X, Z], Y] > \\ & & + < f, [[Y, Z], X] > = 0\end{array}$$

ce qui implique impliquent

$$\begin{array}{rcl}d\theta_f(X^*, Y^*, Z^*) & = & X_f^*(\theta_f(Y^*, Z^*)) - Y_f^*(\theta_f(X^*, Z^*)) \\ & & + Z_f^*(\theta_f(X^*, Y^*))\end{array}$$

Structure symplectique sur l'orbite coadjointe d'un groupe de Lie

et, d'autre part, on a :

$$\begin{aligned} X_f^*(\theta_f(Y^*,Z^*)) &= \frac{d}{dt}_{|t=0}\left(\psi\left(Ad^*_{\exp(tX)}(f)\right)\right) \\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0}\left(\theta_{Ad^*_{\exp(tX)}(f)}(Y^*,Z^*)\right) \\ &= -\frac{d}{dt}_{|t=0}\left(< f\circ Ad_{\exp(-tX)},[Y,Z] >\right) \\ &= < f,[X,[Y,Z]] > \end{aligned}$$

avec $\psi = \theta(Y^*,Z^*)$; donc,

$$\begin{aligned} d\theta_f(X^*,Y^*,Z^*) &= < f,[X,[Y,Z]] > - < f,[Y,[X,Z]] > \\ &\quad + < f,[Z,[X,Y]] > = 0 \end{aligned}$$

Structure symplectique sur l'orbite coadjointe d'un groupe de Lie

il s'en suit que la forme différentielle θ est **fermée**.
Il reste à montrer que θ est **non dégénérée**.
Soit donc $p \in O$ et $X \in \mathscr{G}$ tels que $i(X^*)\theta_p = 0$. Alors ,

$$< p, [Y, X] >=< X^*(p), Y >= 0;$$

pour tout $Y \in \mathscr{G}$. Puisque Y est quelconque, alors $X^*(p) = 0$, ce qui montre que θ est **non dégénérée**. par suite (O, θ) est une **variété symplectique**.

Quelques propriétés des variétés symplectiques

Soit (M, θ) une variété symplectique. On a les propriétés suivantes :

1. Pour tout ouvert U de M, (U, θ_U) est une **une variété symplectique**.
2. Pour tout $x \in M$, $(T_x M, \theta_x)$ est un **espace vectoriel symplectique**.

Soit M une variété de dimension paire $2n$ et $\theta \in \bigwedge_2(M)$ fermée. Alors les propriétés suivantes sont équivalents :

1. θ symplectique ;
2. θ^n est sans singularité (forme volume).

Quelques propriétés des variétés symplectiques

Soit (M, θ) une variété symplectique. On a les propriétés suivantes :

1. Pour tout ouvert U de M, (U, θ_U) est une **une variété symplectique**.
2. Pour tout $x \in M$, (T_xM, θ_x) est un **espace vectoriel symplectique**.

Soit M une variété de dimension paire $2n$ et $\theta \in \bigwedge_2(M)$ fermée. Alors les propriétés suivantes sont équivalents :

1. θ symplectique ;
2. θ^n est sans singularité (forme volume).

Quelques propriétés des variétés symplectiques

Proposition

Une variété symplectique (M, θ) est orientable.

Remarques

- On oriente une variété symplectique (M, θ) par la forme volume θ^n ;
- Une variété de dimension 2 orientable est symplectique.
- **En général, une variété de dimension paire et orientable n'admet pas une structure symplectique**, par exemple, les sphères S^{2n} avec $n \geq 2$, bien que $T_x S^{2n}$ est un espace vectoriel symplectique $\forall x \in S^{2n}$.

Quelques propriétés des variétés symplectiques

Proposition

Une variété symplectique (M, θ) est orientable.

Remarques

- On oriente une variété symplectique (M, θ) par la forme volume θ^n ;
- Une variété de dimension 2 orientable est symplectique.
- **En général, une variété de dimension paire et orientable n'admet pas une structure symplectique**, par exemple, les sphères S^{2n} avec $n \geq 2$, bien que $T_x S^{2n}$ est un espace vectoriel symplectique $\forall x \in S^{2n}$.

Quelques propriétés des variétés symplectiques

Montrons que S^{2n}, pour $n \geq 2$, n'admet pas de structure symplectique. Il est bien connu que :

$$H^k_{DR}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0,\ n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;.\ \ Vol\left(S^{2n}\right) = \frac{2^{(n+1)}\pi^n}{1.3.\cdots.(2n+1)}$$

Donc si θ est une forme symplectique sur S^{2n} pour $(n \geq 2)$ alors $\theta = d\alpha$ avec $\alpha \in \Lambda_1\left(S^{2n}\right)$, donc,

$$\theta^n = n!vol = \theta \wedge \theta \cdots \wedge \theta = d\alpha \wedge \theta \wedge \cdots \wedge \theta = d\left(\alpha \wedge \theta \wedge \cdots \wedge \theta\right)$$

vol étant la forme volume de la sphère, et l'on a :

Quelques propriétés des variétés symplectiques

$$\int_{S^{2n}} \theta^n = n! \frac{2^{(n+1)}\pi^n}{1.2.\cdots.(2n+1)}$$

Et, d'après le théorème de Stockes, on a :

$$\int_{S^{2n}} \theta^n = \int_{S^{2n}} d(\alpha \wedge \theta \wedge \cdots \wedge \theta) = \int_{\partial S^{2n}} \alpha \wedge \theta \wedge \cdots \wedge \theta = 0$$

Ce qui est absurde, donc, la sphère S^{2n}, pour $n \geq 2$, n'admet pas de structure symplectique.

Sous variétés d'une variété symplectique

Soient (M, θ) une variété symplectique et N une sous variété de M.

Définitions

1. N est une **sous variété symplectique** (ou **non isotrope**) de M, si T_xN est un **sous espace vectoriel symplectique** (ou **non isotrope**) de T_xM pour tout $x \in N$.
2. N est **isotrope** si T_xN est **isotrope** pour tout $x \in N$.
3. N est **totalement isotrope** si T_xN est **totalement isotrope** pour tout $x \in N$.
4. N est **coïsotrope** si T_xN est **coïsotrope** pour tout $x \in N$. .
5. N est **lagrangienne** si T_xN est **lagrangien** pour tout $x \in N$.

Sous variétés d'une variété symplectique

Exemples

Soit M le fibré cotangent d'une v.d. M, muni de la forme symplectique canonique de Liouville $\Lambda = d\lambda$.

1. Pour tout $q \in M$, la fibre $T_q^* M$ est une sous-variété lagrangienne de $T^* M$.
2. **La section nulle de $T^* M$ (image de la forme nulle) est une sous-variété lagrangienne de $T^* M$.**

Théorème de Darboux

Toute v.s. (M, θ) est localement symplectomorphe à la structure symplectique modèle

$$\left(\mathbb{R}^{2n}, \theta_0\right)$$

en d'autres termes, tout point de M, admet un voisinage ouvert $\underline{U}$ et un système de coordonnées locales $(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ tel que

$$\theta_U = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n$$

Pour la démonstration de ce théorème, on démontre d'abord le lemme de Moser.

Lemme de Moser

Lemme de Moser

Soit $(\theta_t)_{0\leq t\leq 1}$ une famille de formes symplectiques différentiables en t. Alors, pour tout $p \in M$, il existe un voisinage U de p et un difféomorphisme local $g_t : U \longrightarrow U$, tel que :

$$\begin{cases} g_0^* = Id \\ g_t^* \theta_t = \theta_0 \end{cases}$$

Démonstration du lemme de Moser

Cherchons une famille de champs de vecteurs (X_t) sur U dont les flots locaux (g_t) qu'ils engendrent vérifient :

$$g_t^* \theta_t = \theta_0 \; ; \; g_0^* = Id$$

Bien entendu, on a : $\frac{d}{dt} g_t(p) = X_t(g_t(p)) \quad g_0(p) = p$: Notons tout d'abord que la forme $\frac{d}{dT}\theta_t$ est fermée puisque

$$d\frac{d}{dt}\theta_t = \frac{d}{dt}d\theta_t = 0$$

En dérivant la relation $g_t^*\theta_t = \theta_0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}(g_t^*\theta_t) &= g_t^*\left(\tfrac{d}{dt}\theta_t + \mathscr{L}_{X_t}\theta_t\right) \\ &= g_t^*\left(\tfrac{d}{dt}\theta_t + d\left(i(X_t)\theta_t\right)\right) \end{aligned}$$

Démonstration du lemme de Moser

Le lemme de Poincaré montre que $\frac{d}{dt}\theta_t$ est localement exacte, qu'il existe une forme de Pffaf λ_t définie sur un voisinage de p telle que :

$$\frac{d}{dt}\theta_t = d\lambda_t$$

et, donc,

$$\frac{d}{dt}(g_t^*\theta_t) = g_t^*(d\lambda_t + d(i(X_t)\theta_t))$$

On veut montrer que pour tout $p \in M$, il existe un voisinage U de p et $g_t : U \longrightarrow U$, telle que : $g_{0^*} = Id$ et $g_t^*\theta_t = \theta_0$,, donc,

$$\frac{d}{dt}(g_t^*\theta_t) = 0$$

Démonstration du lemme de Moser

, Il suffit de chercher X_t tel que :

$$\lambda_t + i\,(X_t)\,\theta_t$$

Comme la forme θ_t est non dégénérée, l'équation ci-dessus est résoluble par rapport au champ de vecteurs X_t et donc, elle définit la famille $(g_t)_{0\leq t\leq 1}$. En coordonnées locales $(x_k)_{1\leq k\leq 2n}$ de M , écrivons :

$$\begin{array}{ccc} \lambda_t & = & \lambda_k\,(x,t)\,dx_k \\ X_t & = & X_k\,(x,t)\,\frac{\partial}{\partial x_k} \\ \theta_t & = & \sum_{k<l}\theta_{kl}\,(x,t)\,dx^k\wedge dx^l \\ i\,(X_t)\,\theta_t & = & 2\sum_k\left(\sum_l\theta_{kl}X_l\right)dx^k \end{array}$$

Démonstration du lemme de Moser

On est donc ramené à résoudre le système d'équations en $X_k(x,t)$ suivant :

$$\lambda_k(x,t) + \sum_l \theta_{kl} X_l = 0$$

La forme θ_t étant non dégénérée, alors la matrice (θ_{kl}) est non singulière et par conséquent, le système ci-dessus admet une solution unique. On détermine ainsi le champ de vecteurs X_t et donc les fonctions $(g_t)_{0\leq t\leq 1}$ telles que $g_t^*\theta_t = \theta_0$, ce qui achève la démonstration.

Démonstration du théorème de Darboux

Théorème de Darboux.

Toute v.s. (M, θ) est localement isomorphe à la structure symplectique modèle

$$\left(\mathbb{R}^{2n}, \theta = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n\right)$$

Démonstration.

Soit (M, θ) une v.s. de dimension $2n$ et x_0 un point de $\mathbb{R}^{2n}$. Le problème étant local, donc on peut supposer que $M = \mathbb{R}^{2n}$, $x_0 = 0$, $\left(\mathbb{R}^{2n}, \theta(0)\right)$ est un e.v. symplectique. donc $\theta(0)$ s'écrit sous la forme $\theta(0) = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n$, $(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n)$ étant un S.C. cartésiennes. Soit $(\theta_t)_{0 \leq t \leq 1}$, la famille de 2−formes différentielles :

$$\theta_t = t\theta + (1-t)\,\theta(0)$$

Démonstration du théorème de Darboux

Théorème de Darboux.

Toute v.s. (M,θ) est localement isomorphe à la structure symplectique modèle

$$\left(\mathbb{R}^{2n}, \theta = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n\right)$$

Démonstration.

Soit (M,θ) une v.s. de dimension $2n$ et x_0 un point de $\mathbb{R}^{2n}$. Le problème étant local, donc on peut supposer que $M = \mathbb{R}^{2n}$, $x_0 = 0$, $\left(\mathbb{R}^{2n}, \theta(0)\right)$ est un e.v. symplectique. donc $\theta(0)$ s'écrit sous la forme $\theta(0) = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n$, $(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n)$ étant un S.C. cartésiennes. Soit $(\theta_t)_{0 \leq t \leq 1}$, la famille de $2-$formes différentielles :

$$\theta_t = t\theta + (1-t)\,\theta(0)$$

Démonstration du théorème de Darboux

Les 2-formes θ_t sont fermées et on a :

$$\theta_t(0) = t\theta(0) + (1-t)\theta(0) = \theta(0) = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n.$$

par continuité, il existe un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ où θ_t est non dégénérée. Donc les $2-$formes θ_t sont non dégénérées au voisinage de 0 indépendamment de t. Autrement dit, θ_t sont des formes symplectiques et d'après le lemme de Moser, il existe un voisinage U de 0 et une fonction $g_t : U \longrightarrow U$ telle que :

$$\begin{cases} g_0^* = & identit\acute{e} \\ {g_t}^* \theta_t = & \theta_0 \end{cases}$$

En dérivant cette relation par rapport à t , on obtient :

Démonstration du théorème de Darboux

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(g_t^* \theta_t\right) &= 0 \\ g_t^* \left(\frac{d}{dt}\theta_t + L_{X_t}\theta_t\right) &= 0 \\ g_t^* \left(\frac{d}{dt}\theta_t + di_{X_t}\theta_t\right) &= 0 \end{aligned}$$

par suite

$$di_{X_t}\theta_t = -\frac{d}{dt}\theta_t$$

et comme la forme $\frac{d}{dt}\theta_t$ est exacte dans le voisinage de 0 (lemme de Poincaré), donc

$$\frac{d}{dt}\theta_t = d\omega_t$$

où ω_t est une $1-$forme différentielle.

Démonstration du théorème de Darboux

Par ailleurs, θ_t étant non dégénérée, l'équation

$$i_{X_t}\theta_t = \omega_t$$

est résoluble et détermine de manière unique le champ de vecteurs X_t dépendant de t . Notons que

$$\theta_1 = \theta \ \ et \ \ \theta_0 = \theta\,(0)$$

et en outre on peut trouver g_1^* tel que : $g_1^*\theta = \theta_0$. Au champ de vecteurs X_t est associé la famille cherchée $(g_t)_{0\leq t\leq 1}$ à un paramètre de difféomorphismes et la démonstration s'achève.

Quelques conséquences du théorème de Darboux - Atlas de Darboux

Proposition

Soit M une variété de dimension paire $2n$. Alors les propriétés suivantes sont équivalents

1. M est une variété symplectique ;
2. M possède un atlas $\mathscr{A}$ dont les changements de cartes sont des symplectomorphismes locaux de

$$\left(\mathbb{R}^{2\mathrm{n}}, \theta_0 = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n\right)$$

$\mathscr{A}$ est appelé atlas de Darboux.

Quelques conséquences du théorème de Darboux

Dualité fibré tangent et fibré cotangent

La non dégénérescence de θ permet de voir que l'application :

$$\zeta : TM \longrightarrow T^*M, \ v \longmapsto i(v)\theta$$

est un isomorphisme de fibrés vectoriels au dessus de M. Dans un système de coordonnées locales $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ défini sur un ouvert U, ζ exprime la dualité

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \longmapsto dq_i \ , \ \frac{\partial}{\partial q_i} \longmapsto -dp_i.$$

On déduit que l'application $\zeta : X \longmapsto i(X)\theta$ est un isomorphisme de $\mathfrak{X}(M)$ sur $\bigwedge_1(M)$.

Crochet de Poisson

Soit (M, θ) une variété symplectique.

Pour toute forme différentielle $\alpha \in \bigwedge_1 (M)$ sur M on désignera par X_α le champ de vecteurs sur M tel que :

$$i\,(X_\alpha)\,\theta = \alpha.$$

Crochet de Poisson de deux formes de Pfaff

Le crochet de Poisson (relativement à la structure symplectique de M) de deux formes de Pfaff α et β sur M est la forme de Pfaff

$$\{\alpha, \beta\} = i\left(\left[X_\alpha, X_\beta\right]\right)\theta = \zeta\left(\left[X_\alpha, X_\beta\right]\right).$$

Crochet de Poisson

Propriétés

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \bigwedge_1(M), \lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{D}(M, \mathbb{R})$ on a les propriétés suivantes :

1. $\{\alpha, \beta + \gamma\} = \{\alpha, \beta\} + \{\alpha, \gamma\}$;
2. $\{\alpha, \lambda\beta\} = \lambda \{\alpha, \beta\}$;
3. $\{\beta, \alpha\} = -\{\alpha, \beta\}$;
4. $\{\alpha, \{\beta, \gamma\}\} + \{\beta, \{\gamma, \alpha\}\} + \{\gamma, \{\alpha, \beta\}\} = 0$ (Identité de Jacobi) ;
5. $\{\alpha, f\beta\} = X_\alpha(f)\beta + f\{\alpha, \beta\}$.

Crochet de Poisson

Si α et β sont des formes de Pfaff **fermées** sur M alors :

$$\{\alpha, \beta\} = -d\left(\theta\left(X_\alpha, X_\beta\right)\right)$$

En effet,

$$\begin{array}{rcc}
\{\alpha, \beta\} & = & i\left(\left[X_\alpha, X_\beta\right]\right)\theta = \left[\mathcal{L}_{X_\alpha}, i\left(X_\beta\right)\right]\theta \\
& = & \mathcal{L}_{X_\alpha}\left(i\left(X_\beta\right)\theta\right) - i\left(X_\beta\right)\mathcal{L}_{X_\alpha}\theta \\
& = & \mathcal{L}_{X_\alpha}\beta - i\left(X_\beta\right)i\left(X_\alpha\right)d\theta - i\left(X_\beta\right)di\left(X_\alpha\right)\theta \\
& = & i\left(X_\alpha\right)d\beta + di\left(X_\alpha\right)\beta \\
& = & di\left(X_\alpha\right)\beta = di\left(X_\alpha\right)i\left(X_\beta\right)\theta = -d\left(\theta\left(X_\alpha, X_\beta\right)\right)
\end{array}$$

On a utilisé les relations suivantes :

$$\mathcal{L}_X = i(X)d + di(X) \;\; ; \;\; i([X, Y]) = [\mathcal{L}_X, i(Y)]$$

Crochet de Poisson

Si α et β sont des formes de Pfaff **fermées** sur M alors :

$$\{\alpha,\beta\} = -d\left(\theta\left(X_\alpha, X_\beta\right)\right)$$

En effet,

$$\begin{array}{rcl}
\{\alpha,\beta\} & = & i\left(\left[X_\alpha, X_\beta\right]\right)\theta = \left[\mathscr{L}_{X_\alpha}, i\left(X_\beta\right)\right]\theta \\
 & = & \mathscr{L}_{X_\alpha}\left(i\left(X_\beta\right)\theta\right) - i\left(X_\beta\right)\mathscr{L}_{X_\alpha}\theta \\
 & = & \mathscr{L}_{X_\alpha}\beta - i\left(X_\beta\right)i\left(X_\alpha\right)d\theta - i\left(X_\beta\right)di\left(X_\alpha\right)\theta \\
 & = & i\left(X_\alpha\right)d\beta + di\left(X_\alpha\right)\beta \\
 & = & di\left(X_\alpha\right)\beta = di\left(X_\alpha\right)i\left(X_\beta\right)\theta = -d\left(\theta\left(X_\alpha, X_\beta\right)\right)
\end{array}$$

On a utilisé les relations suivantes :

$$\mathscr{L}_X = i(X)\,d + d\,i(X)\ ;\ i([X,Y]) = [\mathscr{L}_X, i(Y)]$$

Crochet de Poisson

Crochet de Poisson de deux fonctions différentiables

Soient $f, g \in \mathscr{D}(M, \mathbb{R})$, et soient $\alpha = df$ et $\beta = dg$. Le crochet de Poisson des fonctions f et g est la fonction différentiable

$$\{f, g\} = -\theta\left(X_\alpha, X_\beta\right) = -X_\alpha(g) = X_\beta(f).$$

Crochet de Poisson

Conséquence

$$\{df, dg\} = -d\left(\theta\left(X_\alpha, X_\beta\right)\right) = d\{f, g\}$$

Propriétés

On a les propriétés suivantes :

1. $\{f, g+h\} = \{f, g\} + \{f, h\}$;
2. $\{f, \lambda g\} = \lambda\{f, g\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\{g, f\} = -\{f, g\}$;
4. $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (Identité de Jacobi) ;
5. $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$.

Crochet de Poisson

Conséquence

$$\{df, dg\} = -d\left(\theta\left(X_\alpha, X_\beta\right)\right) = d\{f, g\}$$

Propriétés

On a les propriétés suivantes :

1. $\{f, g+h\} = \{f, g\} + \{f, h\}$;
2. $\{f, \lambda g\} = \lambda \{f, g\}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\{g, f\} = -\{f, g\}$;
4. $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (Identité de Jacobi) ;
5. $\{f, gh\} = \{f, g\} h + g \{f, h\}$.

Crochet de Poisson

Proposition

Soit $f; g$ deux hamiltoniens sur une variété symplectique (M, θ).
Alors :

$$X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]$$

Démonstration.

Pour tout $f \in \mathscr{D}(M, \mathbb{R})$ on a :

$$\begin{array}{rclcl} X_{\{f,g\}}(h) & = & \{\{f,g\},h\} & = - & \{h,\{f,g\}\} \\ & = & \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} & & \\ & = & X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) & = & [X_f, X_g](h) \end{array}$$

$\square$

Expression locale dans un système de coordonnées symplectiques

Soit un ouvert U de M muni d'un de coordonnées canoniques $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ de θ :

$$\theta_{|U} = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n.$$

Si $\alpha = a_1 dq_1 + \cdots + a_n dq_n + b_1 dp_1 + \cdots + b_n dp_n$, alors

$$X_\alpha = \sum \left(-b_i \frac{\partial}{\partial q_i} + a_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

et, on a :

$$\{f, g\} = -\theta\left(X_\alpha, X_\beta\right) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Crochet de Poisson

En particulier on a :

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij} \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \end{aligned}$$

Crochet de Poisson

Formes de Pfaff en involution. Fonctions différentiables en involution

Deux formes de Pfaff α et β sur une variété symplectique (M, θ) sont en involution si on a

$$\theta(X_\alpha, X_\beta) = 0.$$

Deux fonctions différentiables f et g sur M sont en involution si leurs différentielles df et dg le sont.
Par conséquent si α et β sont deux formes de Pfaff fermées en involution leur crochet de Poisson $\{\alpha, \beta\}$ est nul. Inversement :

Proposition

Pour que deux fonctions différentiables f et g soient en involution il faut et il suffit que leur crochet de Poisson $\{f, g\}$ soit nul.

Crochet de Poisson

Formes de Pfaff en involution. Fonctions différentiables en involution

Deux formes de Pfaff α et β sur une variété symplectique (M,θ) sont en involution si on a

$$\theta(X_\alpha, X_\beta) = 0.$$

Deux fonctions différentiables f et g sur M sont en involution si leurs différentielles df et dg le sont.
Par conséquent si α et β sont deux formes de Pfaff fermées en involution leur crochet de Poisson $\{\alpha,\beta\}$ est nul. Inversement :

Proposition

Pour que deux fonctions différentiables f et g soient en involution il faut et il suffit que leur crochet de Poisson $\{f,g\}$ soit nul.

Crochet de Poisson

Proposition

Pour que deux formes de Pfaff fermées α et β soient en involution il faut et il suffit que α (resp. β) soit une intégrale première de X_α (resp. X_β).

En effet $\theta(X_\alpha, X_\beta) = -\beta(X_\alpha) = \alpha(X_\beta)$.

Proposition

Soient α et β et γ trois formes de Pfaff fermées. Si α est en involution avec β et γ, elle l'est aussi avec le crochet de Poisson $\{\beta, \gamma\}$.

En effet $X_{\{\beta,\gamma\}} = [X_\beta, X_\gamma]$ et

$$\begin{aligned} \theta\left(X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]\right) &= \alpha\left([X_\beta, X_\gamma]\right) \\ &= \alpha\left(X_\beta\right) - \alpha\left(X_\gamma\right) = 0. \end{aligned}$$

Crochet de Poisson

Proposition

Pour que deux formes de Pfaff fermées α et β soient en involution il faut et il suffit que α (resp. β) soit une intégrale première de X_α (resp. X_β).

En effet $\theta(X_\alpha, X_\beta) = —\beta(X_\alpha) = \alpha(X_\beta)$.

Proposition

Soient α et β et γ trois formes de Pfaff fermées. Si α est en involution avec β et γ, elle l'est aussi avec le crochet de Poisson $\{\beta, \gamma\}$.

En effet $X_{\{\beta,\gamma\}} = [X_\beta, X_\gamma]$ et

$$\begin{aligned} \theta\left(X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]\right) &= \alpha\left([X_\beta, X_\gamma]\right) \\ &= \alpha\left(X_\beta\right) - \alpha\left(X_\gamma\right) = 0. \end{aligned}$$

Crochet de Poisson

Proposition

Pour que deux formes de Pfaff fermées α et β soient en involution il faut et il suffit que α (resp. β) soit une intégrale première de X_α (resp. X_β).

En effet $\theta(X_\alpha, X_\beta) = —\beta(X_\alpha) = \alpha(X_\beta)$.

Proposition

Soient α et β et γ trois formes de Pfaff fermées. Si α est en involution avec β et γ, elle l'est aussi avec le crochet de Poisson $\{\beta, \gamma\}$.

En effet $X_{\{\beta,\gamma\}} = [X_\beta, X_\gamma]$ et

$$\begin{aligned} \theta\left(X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]\right) &= \alpha\left([X_\beta, X_\gamma]\right) \\ &= \alpha\left(X_\beta\right) - \alpha\left(X_\gamma\right) = 0. \end{aligned}$$

Crochet de Poisson

Proposition

Pour que deux formes de Pfaff fermées α et β soient en involution il faut et il suffit que α (resp. β) soit une intégrale première de X_α (resp. X_β).

En effet $\theta(X_\alpha, X_\beta) = -\beta(X_\alpha) = \alpha(X_\beta)$.

Proposition

Soient α et β et γ trois formes de Pfaff fermées. Si α est en involution avec β et γ, elle l'est aussi avec le crochet de Poisson $\{\beta, \gamma\}$.

En effet $X_{\{\beta,\gamma\}} = [X_\beta, X_\gamma]$ et

$$\begin{aligned}\theta\left(X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]\right) &= \alpha\left([X_\beta, X_\gamma]\right) \\ &= \alpha\left(X_\beta\right) - \alpha\left(X_\gamma\right) = 0.\end{aligned}$$

Champs de vecteurs hamiltoniens

La relation :

$$\mathscr{L}_X \alpha = i(X)\,d\alpha + d\,i(X)\,\alpha$$

montre que pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, les propriétés suivantes sont équivalents :

1. $\mathscr{L}_X \theta = 0$;
2. la forme de Pfaff $i(X)\,\theta$ est fermée.

$\mathscr{L}_X$ étant la dérivée de Lie suivant le champ de vecteurs X.

Champs de vecteurs hamiltoniens

Définition

Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ est dit (**localement**) **hamiltonien** s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes :

1. $\mathscr{L}_X \theta = 0$;
2. la forme de Pfaff $i(X)\theta$ est fermée.

Lorsque $i(X)\theta$ est exacte, **une application hamiltonienne de** X **est une fonction** $H \in \mathscr{D}(M, \mathbb{R})$ **telle que** $i(X)\theta = -dH$.
Bien entendu on a :

$$X = \zeta^{-1}(-dH)$$

Champs de vecteurs hamiltoniens

Définition

Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ est dit (**localement**) **hamiltonien** s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes :

1. $\mathscr{L}_X \theta = 0$;
2. la forme de Pfaff $i(X)\theta$ est fermée.

Lorsque $i(X)\theta$ est exacte, **une application hamiltonienne de** X **est une fonction** $H \in \mathscr{D}(M, \mathbb{R})$ **telle que** $i(X)\theta = -dH$**.**
Bien entendu on a :

$$X = \zeta^{-1}(-dH)$$

Champs de vecteurs hamiltoniens

Champ de vecteurs hamiltonien

(Lemme de Poincaré) Pour tout point $x \in M$, il existe $U \in O(x, M)$, $H \in \mathscr{D}(M, \mathbb{R})$, telles que

$$i(X)\,\theta = -dH.$$

A toute fonction $H \in \mathscr{D}(M, \mathbb{R})$, **on peut associer un unique champ de vecteurs** X_H tel que :

$$i(X_H)\,\theta = -dH \ \left(X_H = \zeta^{-1}(-dH)\right)$$

X_H est appelé **champ de vecteurs hamiltonien associé à** H, **et on entend par système hamiltonien le triplet :**

$$(M, \theta, X_H)$$

Champs de vecteurs hamiltoniens

Proposition

La fonction H est une intégrale première de X_H : H est appelée **intégrale de l'énergie.**

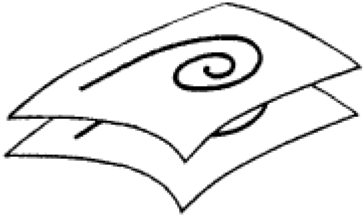
En effet,

$$X_H(H) = dH(X_H) = -i(X_H)\theta(X_H) = \theta(X_H, X_H) = 0$$

Conséquences

1. H est constante sur les trajectoires de X_H (théorème de la conservation de l'énergie).
2. Les trajectoires de X_H sont entièrement contenues dans les surfaces de niveau $H = \text{constante}$.

Champs de vecteurs hamiltoniens



Champs de vecteurs hamiltoniens

Remarques

1. Lorsque M est connexe deux applications hamiltoniennes de X diffèrent d'une constante.
2. Si $H^1_{DR}(M) = (0)$ alors tout système hamiltonien est un champ de vecteurs hamiltonien.

Équations de Hamilton

Équations de Hamilton

Localement dans un système de coordonnées locales adaptés, les courbes intégrales de X_H sont solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} & = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} & = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

Champs de vecteurs hamiltoniens

Proposition

Le crochet de Lie $[X, Y]$ de deux **systèmes hamiltoniens** est un **champ de vecteurs hamiltonien**, et a pour application hamiltonienne

$$i(Y)i(X)\theta = \theta(X, Y).$$

Démonstration.

Rappelons que

$$\mathscr{L}(X)i(Y)\theta = i[X, Y]\theta + i(Y)\mathscr{L}(X)\theta.$$

et, donc,

$$\mathscr{L}(X)i(Y)\theta = i(X)di(Y)\theta + di(X)i(Y)\theta \quad = di(X)i(Y)\theta$$
$$= -d\left(\theta(Y, X)\right).$$

Champs de vecteurs hamiltoniens

Proposition

Le crochet de Lie $[X, Y]$ de deux **systèmes hamiltoniens** est un **champ de vecteurs hamiltonien**, et a pour application hamiltonienne

$$i(Y)i(X)\theta = \theta(X, Y).$$

Démonstration.

Rappelons que

$$\mathscr{L}(X)i(Y)\theta = i[X, Y]\theta + i(Y)\mathscr{L}(X)\theta.$$

et, donc,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(X)i(Y)\theta = i(X)di(Y)\theta + di(X)i(Y)\theta \quad &= di(X)i(Y)\theta \\ &= -d\left(\theta(Y,X)\right).\end{aligned}$$

Théorème de Liouville

Théorème de Liouville

Le flot $(\varphi_t)_t$ du champ de vecteurs hamiltonien X_H conserve la forme symplectique θ, c'est à dire :

$$\varphi_t^* \theta = \theta$$

et par conséquent, il conserve le volume.

Démonstration.

On a :

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \theta) = \varphi_t^* (i(X_H) d\theta + d(i(X_H)\theta)) = 0$$

D'où $\varphi_t^* \theta = \varphi_0^* \theta = \theta$, par suite, φ_t est un symplectomorphisme, par conséquent ce flot préserve θ^n et aussi $\frac{1}{n!}\theta^n$. $\square$

Complète intégrabilité des systèmes hamiltoniens

COMPLÈTE INTÉGRABILITÉ DES SYSTÈMES HAMILTONIENS

Intégrales premières : Rappels et propriétés

Définition

Soient M une variété différentiable de dimension n et X un champ de vecteurs de sur M. On appelle intégrale première de X, toute application différentiable $f : M \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $X(f) = 0$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est une intégrale première de X,
2. f est constante sur les courbes intégrales de X.

Intégrales premières : Rappels et propriétés

Proposition

Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$. On a :

1. Pour tout $x \in M$ tel que $X_x \neq 0$. $\exists U \in (x, M)$ et $n-1$ intégrales premières $f_1, \ldots, f_{n-1}$ de X indépendantes en tout point de U.
2. Pour toutes intégrales premières $f_1, \ldots, f_{n-1}$ de X, indépendantes en tout point de U, et pour toute application $\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, la fonction $\Phi(f_1, \ldots, f_{n-1})$ est une intégrale première de X. et inversement toute intégrale première de X s'écrit sous la forme $\Phi(f_1, \ldots, f_{n-1})$.

Le théorème d'Arnold Liouville

Définition

Un système Hamiltonien (M, θ, H) est dit **complètement intégrable** s'il admet n intégrales premières différentiables deux à deux en involution en involution telles que :

$$df_1(x) \wedge \ldots \wedge df_n(x) \neq 0$$

en tout point de M.

Complète intégrabilité des systèmes hamiltoniens

Exemples de systèmes intégrales

1. $H(p,q) = H(q)$ ne dépendant que des premières variables.
2. Le cas d'un système hamiltonien à un degré de liberté, i.e. sur une variété de dimension 2. En effet, dans ce cas la seule fonction hamiltonienne suffit. Par exemple l'oscillateur harmonique définit par l'hamiltonien $H = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right)$ est un cas de système à un degré de liberté.

Complète intégrabilité des systèmes hamiltoniens

Soient $f_1, \cdots, f_n$, des intégrales premières d'un système hamiltonien complètement intégrable (M, θ, H). Alors les $(n+1)$ fonctions $H, f_1, \cdots, f_n$ sont deux à deux en involution. En tout point x en lequel

$$df_1, \cdots, df_n$$

sont linéairement indépendantes, et donc, $dH(x)$ est une combinaison linéaire de $df_1(x), \cdots, df_n(x)$, par suite,

$$H = \widehat{H} \circ (f_1, \cdots, f_n) == \widehat{H}(f_1, \cdots, f_n)$$

où $\widehat{H}$ est une fonction réelle différentiable définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Par conséquent :

$$X_H = \sum \frac{\partial \widehat{H}}{\partial f_j}(f_1, \cdots, f_n) X_{f_j}$$

Complète intégrabilité des systèmes hamiltoniens

Les coefficients

$$\frac{\partial \widehat{H}}{\partial f^i}(f^1,...,f^n)$$

sont constants sur chaque arc de trajectoire de X_H contenu dans U, puisque $f_1, \cdots, f_n$ sont des intégrales premières de X_H . Comme les trajectoires de X_H sont connexes, le champ de vecteurs X_H est une combinaison linéaire sur M des $X^p_{f^i}$, dont les coefficients sont constants sur chaque trajectoire du système hamiltonien X_H.

Complète intégrabilité des systèmes hamiltoniens

Les champs de vecteurs $X_{f_i}; 1 \leq i \leq n)$ engendrent un champ de directions différentiable complètement intégrable puisque $\left[X_{f_i}, X_{f_j}\right] = 0$ pour tous $i, j = 1, ..., n$. Chaque trajectoire de X_H (ou de X_{f^i} est entièrement contenue dans une de ces feuilles puisque X_H et des X_{f^i} sont tangents à chaque feuille.

Proposition
Si $\dim M = 2n$, il ne peut y avoir au plus que n intégrales premières indépendantes en involution.

En effet, En chaque point de M, l'espace engendré par les champs hamiltoniens est alors totalement isotrope. Donc de dimension $\leq n$.

Le théorème d'Arnold Liouville

Proposition

Soit (M, θ, H)un système hamiltonien complètement intégrable et soient $H = f_1, f_2 \cdots ; f_n$ une famille d'intégrales premières indépendantes et en involution. De plus on suppose que les champs X_{f_i} sont complets. Alors

1. $f : m \longmapsto (f_1(m), f_2(m), \cdots ; f_n(m))$ est une submersion de M dans un ouvert V de $\mathbb{R}^n$.
2. Pour tout vecteur $a \in V$, chaque composante connexe de $M_a = f^{-1}(a)$ est difféomorphe à $\mathbb{T}^{\mathrm{k}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{n-k}}$ pour un certain $0 \leq k \leq n$. On appelle ces composantes les tores invariants ou tores lagrangiens lorsque $k = n$.

Le théorème d'Arnold Liouville

1. f soit une submersion sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, i.e. df de rang n, est une conséquence directe de l'indépendance des fonctions f_i. Ainsi pour chaque $a = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$, $f^{-1}\{a\}$ est soit une sous variété de M de dimension n que l'on note par M_a, soit l'ensemble vide.
2. M_a est invariante par le flot de chacun des f_i.

En effet, les (f_i) étant en involution deux à deux, on a $\{f_i, f_j\} = 0$. Or ceci représente justement la variation de la fonction f_j le long du flot de f_i. Si celui-ci est nulle, c'est donc que f_j est constante le long du flot de f_i. Or M_a étant définie à l'aide d'intersection de lignes de niveaux de ces fonctions, on en déduit qu'il est invariant par les flots. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ telle que M_a ne soit pas l'ensemble vide.

Théorème de Arnold - Liouville

Les flots commutent entre eux :

$$\left[X_{f_i}, X_{f_j}\right] = 0$$

puisque les f_i sont en involutions. Ainsi ces flots définissent une action de groupe de $\mathbb{R}^n$ sur M_a via

$$\Phi : (t_i)_{1 \leq i \leq n} \longmapsto \varphi_n^{t_n} \circ \cdots \circ \varphi_1^{t_1}$$

où φ_i est le flot associé au champ X_{f_i}. Cette action est bien définie puisque l'on a supposé que les champs étaient complets.

Théorème de Arnold - Liouville

Soit $m \in M$, et $o(m)$ son orbite sous l'action Φ. Montrons que $o(x)$ est ouvert et fermé. **L'orbite est ouverte d'après le théorème des fonctions implicites.** En effet, en considérant la fonction $\Psi(t,x) = \Phi(t)(x)$. On observe que sa différentielle par rapport à t est inversible puisque les f_i sont indépendants. Donc si l'on considère un point $y_0 \in o(m)$ et t_0 tels que $\Psi(t_0, y_0) = m$ alors il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n \times M_a$ qui contient $(t_0; y_0)$ et une fonction régulière $\alpha : U_1(y) \longrightarrow V_1(t_0)$ tels que :

$$(\forall (t,y) \in U_1 \times V_1)(\Psi(t,y) = m \Longleftrightarrow t = \alpha(y))$$

D'où, $\alpha^{-1}(V_1)$ est un ouvert de M_a contenant y_0 et inclus dans $o(m)$. Donc l'orbite de m est ouverte dans M_a.

Théorème de Arnold - Liouville

On peut adapter ce raisonnement au complémentaire de l'orbite de m pour montrer qu'il est ouvert et donc que l'orbite de m est fermée dans M_a. On en déduit donc que l'action de est transitive sur chaque composante connexe de M_a. Pour conclure que M_a est difféomorphe à $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ on va faire appel au lemme suivant :

Lemme

Soit φ une action transitive d'un groupe de Lie G sur une variété différentielle E. Alors E est difféomorphe à G/S_m où $m \in E$ et $S_m = \{g \in G \mid g(m) = m\}$ est le sous groupe d'isotropie de l'action.

Théorème de Arnold - Liouville

Soit $m \in M_a$. Il faut donc déterminer le sous groupe $S_m = \{t \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(t,m) = m\}$ de $\mathbb{R}^n$ correspondant. En fait, on sait que les sous groupes de $\mathbb{R}$ sont soit denses soit discrets. Montrons qu'ici S_m est discret. On utilise le théorème d'inversion locale sur la fonction Ψ. En effet, les f_i étant indépendants on en déduit que l'application $\Psi_{|x} : t \longmapsto \Psi(t,x)$ est localement un difféomorphisme. Ainsi si l'on considère $t_0 \in S_m$, il existe t aussi proche que l'on veut de t_0 tel que $\Psi(t,m) \neq m$. Donc S_m est discret dans $\mathbb{R}^n$, et, donc

$$S_m = \left\{ \sum_{i=1}^{k} n_i e_i, \mid (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{Z}^k \right\}$$

où $e_1, ..., e_k \in \mathbb{R}^m$ linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème de Arnold - Liouville

En complétant $e_1, ..., e_k$ en une base $(e_1, ..., e_k, ..., e_n)$, on a :

$$\mathrm{\mathbb{R}^n}/S_m \simeq \mathrm{\mathbb{T}^k} \times \mathrm{\mathbb{R}^{n-k}}$$

$\mathbb{T}^k$ est le tore de dimension k. On en déduit ainsi que $\mathbb{R}^n/S_m = \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Et finalement que chaque composantes connexes de M_a est difféomorphe à $\mathbb{R}^n/S_m = \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Théorème de Arnold - Liouville

Proposition M_a est une sous-variété lagrangienne fermée de M qui est invariante par le flot du champ de vecteurs X_H, M_a est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^n$.

R..Abraham & J.E. Mardsen
Foundations of Mechanics
Addison Édition Wesley Publishing1987.

V.I.Arnold.
Équations différentielles ordinaires
Édition MIR Moscou 1974.

V.I.Arnold.
Méthodes mathématiques de la mécanique classique
Édition MIR Moscou1974.

C. Godbillon
Géométrie différentielle et mécanique analytique
Hemann. Paris. 1969

V.Guillemin - S.Sternberg
Symplectic techniques in physics
Cambridge University Press1984.

Références

A. Lesfari.
Géométrie symplectique et Mécanique hamiltonienne. Master. Université Chouaib Doukkali. Eljadida. 2009-2010

C.M. Marle
Systèmes hamiltoniens et géométrie symplectique. Université Pierre et Marie Curie. 2013

C.M.Marle -P. Libermann
Géométrie symplectique base théorique de la mécanique. Tomes : I, II, III et IV. UER de Mathématiques. LA 2012 et ERA 944-1020-1021 du CNRS.

C.M. Marle
Variétés symplectiques et variétés de Poisson
HAL Id : cel-00092952
https ://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092952

Références

F.W.Warner.
Foundations of diffentiable manifolds
Springer Verlag