# Algèbres de Jordan (I)

26/02/2022

- Soit $(A, .)$ est une algèbre non associative sur $\mathbb{K}$ (un corps commutatif de caractéristique 0).

c.à.d $A$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et

$$\begin{aligned} \cdot : A\times A &\longrightarrow A \\ (x,y) &\longmapsto x.y \end{aligned}$$ est une application bilinéaire.

On peut définir deux autres produits sur l'espace vectoriel $A$ :

$$\boxed{\begin{aligned} [x,y] &:= \frac{1}{2}(x.y - y.x), \\ x \circ y &:= \frac{1}{2}(x.y + y.x), \\ \forall\, x,y &\in A. \end{aligned}}$$

L'algèbre non associative $(A, [,])$ sera notée $A^-$ et l'algèbre non associative $(A, \circ)$ sera notée $A^+$.

- Si $(A, .)$ est une algèbre non associative, on considère l'application trilinéaire suivante appelée l'associateur :

$$\boxed{\begin{aligned} Asso : A\times A\times A &\longrightarrow A \\ (x,y,z) &\longmapsto Asso(x,y,z) := (x.y).z - x.(y.z) \end{aligned}}$$

# Définitions - Notations.

Soit $(A, .)$ une algèbre non associative.

- Soit $x \in A$,

$$L_x : A \longrightarrow A$$
$$y \longmapsto L_x(y) := x.y,$$

$L_x$ est la multiplication à gauche par $x$.

$$R_x : A \longrightarrow A$$
$$y \longmapsto R_x(y) := y.x,$$

$R_x$ est la multiplication à droite par $x$.

- Soit $D : A \longrightarrow A$ une application linéaire, $D$ est dite une dérivation de $(A, .)$ si :

$$D(x.y) = D(x).y + x.D(y),$$

$\forall x, y \in A$, càd

$$L_{D(x)} = [D, L_x] := DL_x - L_x D,$$

$\forall x \in A$.

## Définition (Algèbre de Jordan).

Soit $(A, .)$ une algèbre non associative.
$(A, .)$ est dite une algèbre de Jordan si :

(i) "." est commutative
càd $L_x = R_x$, $\forall x \in A$,

et

(ii) $\forall x, y \in A$, $\mathrm{Asso}(x, y, x^2) = 0$
càd $(x.y)x^2 = x(y.x^2)$, où $x^2 = x.x$.

La condition (ii) veut dire aussi :

$$\forall x \in A, \quad L_{x^2} L_x = L_{x^2} L_x$$

## Premiers exemples.

(1) Toute algèbre associative et commutative est une algèbre de Jordan

② Si $(A, .)$ est une algèbre associative, alors $(A, \circ)$ est une algèbre de Jordan (où $x \circ y = \frac{1}{2}(x.y + y.x)$) $\forall x, y \in A$.

③ Soient $V$ un espace vectoriel et $B$ une forme bilinéaire symétrique telle qu'il existe $c \in V$ tq $B(c, c) = 1$.

Sur $V$, on définit le produit suivant :

$$\boxed{x.y := B(c, x)y + B(c, y)x - B(x, y)c, \quad \forall x, y \in V.}$$

Il est clair que $\forall x, y \in V$, $x.y = y.x$.

De plus, $\forall x \in V$, $c.x = x$ (càd $c$ est un élément neutre de $(V, .)$)

Maintenant soient $x, y \in V$,

$$x^2 . y = (x.x).y$$

$$= \Big(B(c,x)x + B(c,x)x - B(x,x)c\Big).y$$

$$= 2B(c,x)(x.y) - B(x,x)y$$

Donc $\boxed{L_{x^2} = 2B(c,x)L_x - B(x,x)id_A}$

Par conséquent,

$$L_{x^2}L_x = 2B(c,x)L_xL_x - B(x,x)L_x$$

$$= L_x\left(2B(c,x)L_x - B(x,x)id_A\right)$$

$$= L_xL_{x^2}.$$

On conclut que $(V,.)$ est une algèbre

2 de Jordan.

**Proposition.**

Soit $(A,\cdot)$ une algèbre non associative
$(A,\cdot)$ est une algèbre de Jordan
si et seulement si :

(i) $\forall x \in A,\ L_x = R_x$ ;

(ii) $\forall x, y, z \in A$,

$$[L_x, L_{y.z}] + [L_y, L_{z.x}] + [L_z, L_{x.y}] = 0.$$

(Identité de Jordan).

(On peut aussi écrire : $\sum_{cycl} [L_x, L_{y.z}] = 0$)

**Preuve.** $(\Leftarrow)$

Soit $x \in A$, (ii) $\Longrightarrow 3\,[L_x, L_{x.x}] = 0$

$$\Longrightarrow [L_x, L_{x^2}] = 0$$

Donc $(A,\cdot)$ est une algèbre de Jordan.

$(\Longrightarrow)$ Soient $x, y, z \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$(A, \cdot)$ Jordan $\Longrightarrow \mathrm{Asso}\left((x+\lambda z), y, (x+\lambda z)^2\right) = 0$

Le coefficient de $\lambda = 0$

$$\Longrightarrow \boxed{2\, \mathrm{Asso}(x, y, z \cdot x) + \mathrm{Asso}(z, y, x^2) = 0}$$

Soit $t \in V$, en remplaçant $x$ par $x + \lambda t$ dans l'équation ci-dessus, on obtient:

$$\boxed{\mathrm{Asso}(x, y, t \cdot z) + \mathrm{Asso}(t, y, z \cdot x) + \mathrm{Asso}(z, y, x \cdot t) = 0}$$

(c'est le coefficient de $\lambda = 0$).

C'est-à-dire:

$$(*) \begin{cases} (x \cdot y) \cdot (t \cdot z) - x\,(y \cdot (t \cdot z)) + (t \cdot y) \cdot (z \cdot x) \\ - \; t \cdot (y \cdot (z \cdot x)) + (z \cdot y)(x \cdot t) - z \cdot (y \cdot (x \cdot t)) \\ = 0 \end{cases}$$

C'est équivalent à:

$$L_{t \cdot z} L_x - L_{t \cdot z} \cdot L_x + L_{z \cdot x} L_t - L_t L_{z \cdot x} + L_{x \cdot t} L_z - L_z L_{x \cdot t} = 0$$

c'est-à-dire :

$$[L_{t.z}, L_x] + [L_{z.x}, L_t] + [L_{x.t}, L_z] = 0$$

<u>c.q.f.d</u>

<u>Remarque.</u>

$$(*) \Longleftrightarrow L_z L_{x.y} - L_x L_y L_z + L_{z.x} L_y - L_{y.(z.x)} + L_{z.y} L_x - L_z L_y L_x = 0 \quad (**)$$

Si on échange $x$ et $y$ dans $(**)$, on obtient :

$$L_z L_{y.x} - L_y L_x L_z + L_{z.y} L_x - L_{x.(z.y)} + L_{z.x} L_y - L_z L_x L_y = 0 \quad (***)$$

$(**) - (***)$

$$\Longleftrightarrow [L_y, L_x] L_z + L_{z.x} L_y - L_{z.y} L_x - L_{y.(z.x) - x.(z.y)} + L_{z.y} L_x - L_{z.x} L_y - L_z [L_y, L_x] = 0$$

Donc $\left[[L_y, L_x], L_z\right] = L_{y\cdot(z\cdot x) - x(z\cdot y)}$

Par conséquent,

$$[L_z, [L_x, L_y]] = L_{(x\cdot z)\cdot y - x\cdot(z\cdot y)}$$

$$= L_{Asso(x,z,y)}$$

$$= L_{[L_y, L_x](z)}$$

Donc $\left[[L_x, L_y], L_z\right] = L_{[L_x, L_y](z)}$

Ccl $\boxed{[L_x, L_y] \text{ est une dérivation de } (A, \cdot). \quad (d)}$

Rappelons que si $(A, \cdot)$ est une algèbre non associative, alors l'ensemble des dérivations de $A$, noté $Der(A)$, est

une sous-algèbre de Lie de $gl(A)$
$= (End(A), \circ)^-$.

Rappelons aussi que si $(A, .)$ est une algèbre non associative, alors la sous-algèbre de l'algèbre associative $(End(A), \circ)$ engendrée par $\{L_x, x \in A\} \cup \{R_x, x \in A\}$ est appelé l'algèbre-Multiplication associative de $(A, \cdot)$ notée $m(A)$.

" les éléments de $m(A)$ sont de la forme $\sum S_1 \dots S_k$ où
$S_i \in \{L_x, x \in A\} \cup \{R_x, x \in A\}$".

Maintenant, on va définir l'algèbre-Multiplication de Lie de $(A, \cdot)$.

L'algèbre-multiplication de Lie de $(A,\cdot)$, notée $\mathcal{L}(A)$ est la sous-algèbre de $gl(A)=(\mathrm{End}\,A,\circ)$ engendrée par $\{L_x, x\in A\}\cup\{R_x, x\in A\}$.

C'est l'intersection de toutes les sous algèbres de $gl(A)$ contenant

$$\underbrace{\{L_x, x\in A\}\cup\{R_x, x\in A\}}_{M}$$

On note $M_1 = M$, $M_{i+1}=[M_1, M_i]$ $\forall i\in\mathbb{N}^*$. On montre que $\forall i,j\in\mathbb{N}^*$, $[M_i,M_j]\subseteq M_{i+j}$

Donc: $\mathcal{L}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i := \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}(M_1+\dots+M_i)$

2) Dans le cas où $(A,\cdot)$ est une algèbre de Jordan, l'identité (J) implique que

$$\boxed{\mathcal{L}(A) = L(A) + [L(A), L(A)]}$$

# Définitions - Notations.

Soit $(A, .)$ une algèbre de Jordan.

$\mathrm{Inn}(A) := \mathrm{Vect}\{[L_x, L_y], x, y \in A\}$

$\mathrm{Inn}(A) \subseteq \mathrm{Der}(A)$ (d'après l'identité (J))

Soient $D \in \mathrm{Der}(A)$ et $x, y \in A$,

$$[D, [L_x, L_y]] = [[D, L_x], L_y] + [L_x, [D, L_y]]$$

$$= \underbrace{[L_{D(x)}, L_y] + [L_x, L_{D(y)}]}_{\in \mathrm{Inn}(A)}$$

$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Inn}(A) \text{ est un idéal de l'algèbre de Lie } \mathrm{Der}(A)}$

$\mathrm{Inn}(A)$ est dit le sous-espace ou l'idéal des dérivations intérieures de $(A, .)$

Donc $\mathcal{L}(A) = L(A) + \mathrm{Inn}(A)$

- L'algèbre structure de $(A, \cdot)$ notée $str(A)$ est :

$$\boxed{str(A) := L(A) + \mathrm{Der}(A)}$$

- L'algèbre structure intérieur de $(A, \cdot)$ notée $istr(A)$ est :

$$\boxed{istr(A) := L(A) + \mathrm{Inn}(A)}$$

càd $istr(A) = \mathcal{L}(A)$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ L_x , [L_x, L_y] \,/\, x, y \in A \right\}$$

Maintenant, on va voir comment I. KANTOR a construit une algèbre 3-graduée $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ à partir d'une algèbre de Jordan $(A, \cdot)$ telle que $\mathfrak{g}_0 = ist(A)$

Rappelons qu'une algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\,,]_{\mathfrak{g}})$ est dite $\mathbb{Z}$-graduée si $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$, où $\forall i,j \in \mathbb{Z}$ : $\mathfrak{g}_i$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ et $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$.

On dira que $\mathfrak{g}$ est 3-graduée si $\mathfrak{g}_i = \{0\}$, $\forall\, i \in \mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$ càd $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.

Soit $(A, .)$ une algèbre de Jordan, on considère l'espace vectoriel

$$\mathrm{Kan}(J) := \mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{1}$$

où $\mathfrak{g}_{-1} := A$,

$$\mathfrak{g}_0 := \mathrm{inst}(A) = \mathrm{vect}\{L_x, [L_x, L_y],\ x,y \in A\} \subseteq \mathrm{End}(A).$$

$$\mathfrak{g}_1 = \mathrm{vect}\{P, \langle L_a, P\rangle, a \in A\}$$

$$\subseteq \mathrm{End}(\mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1})$$

$$\simeq \mathrm{Bilinsym}(\mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_{-1})$$

où $P : \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1} \longrightarrow \mathfrak{g}_{-1}$

$$(x,y) \longmapsto x.y$$

et $\forall a \in J$,

$$\langle L_a, P\rangle : \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1} \longrightarrow \mathfrak{g}_{-1}$$

définie par : $\forall x, y \in \mathfrak{g}_{-1}$,

$$\begin{aligned}\langle L_a, P\rangle(x,y) := {} & a.(x.y) - (a.x)y \\ & - (a.y).x \\ = {} & (L_a L_x - L_x L_a - L_{a.x})(y) \\ = {} & ([L_a, L_x] - L_{a.x})(y)\end{aligned}$$

L'espace vectoriel

$$\mathrm{Kan}(A) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

muni du produit suivant est une algèbre de Lie 3-graduée :

- $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}] = \{0\} = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$

- $[f, x] = f(x)$, $\forall f \in \mathfrak{g}_0$ et $\forall x \in \mathfrak{g}_{-1}$

- $[A, x](y) = A(x, y)$, $\forall A \in \mathfrak{g}_1$ et $\forall x, y \in \mathfrak{g}_{-1}$

- $[f, B](x, y) = f(B(x, y)) - B(f(x), y) - B(f(y), x)$, $\forall f \in \mathfrak{g}_0$, $\forall B \in \mathfrak{g}_1$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}_{-1}$

La prochaine séance, je donnerai la preuve de $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ est une algèbre de Lie 3-graduée

Pour terminer, on va expliquer comment obtenir une algèbre de Jordan à partir d'une algèbre de Lie 3-graduée (c'est l'idée de départ de I. Kantor pour faire le lien entre les algèbres de Jordan et les algèbres de Lie 3-graduées)

Soit $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, [\,,\,]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie 3-graduée.

Soit $a$ un élément qcq de $\mathfrak{g}_{-1}$.

alors $(\mathfrak{g}_1, \bullet)$ où

$$\bullet : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_1$$
$$(x, y) \longmapsto x \bullet y := [[x, a]_{\mathfrak{g}}, y]_{\mathfrak{g}}$$

est une algèbre de Jordan ?

# Algèbre de Jordan (II)

12/03/2022

## La construction de J. Tits d'une algèbre de Lie 3-graduée à partir d'une algèbre de Jordan.

Soit $(A, .)$ une algèbre de Jordan.

Soient $a, b \in A$, on notera :

$$D_{a,b} := [L_a, L_b]$$

(est une dérivation intérieure de $(A, .)$)

On a vu que : $\forall x, y, z \in A$ :

$$[[L_x, L_y], L_z] = L_{[L_x, L_y](z)},$$

et que $\mathrm{Inn}(A) := \mathrm{Vect}\{D_{a,b}\,,\ a, b \in J\}$ est un idéal de l'algèbre de Lie des dérivations $\mathrm{Der}(A)$ de $A$.

Rappelons que :

$\forall a, b, c \in A$ et $\forall D \in \mathrm{Der}(A)$,

① $D_{a,b} + D_{b,a} = 0$ ;

② $D_{a.b,c} + D_{b.c,a} + D_{c.a,b} = 0$

③ $[D, D_{a,b}] = D_{D(a),b} + D_{a,D(b)}$.

J. Tits a considéré l'espace vectoriel

$$\boxed{\boxed{\mathrm{Tit}(A) := \left(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} A\right) \oplus \mathrm{Inn}(A).}}$$

Sur cet espace vectoriel, il a considéré le produit $[\,,\,]$ (bilinéaire antisymétrique) défini par :

$\forall A, B \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, $\forall a, b \in A$, $\forall D, \delta \in \mathrm{Inn}(A)$

$[A \otimes a, B \otimes b]_T := [A, B] \otimes a.b + 2\,\mathrm{tr}(AB) D_{a,b}$ ;

et $[D, A \otimes a]_T := A \otimes D(a)$ ;

$[D, \delta] := D\delta - \delta D$.

Rappelons que $\{H, F, G\}$ est une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ où $H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$F := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $G := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette base vérifie :

$$[H, F] = 2F, \quad [H, G] = -2G, \quad [F, G] = H.$$

Cette base va définir une 3-graduation de l'espace vectoriel $\mathrm{Tit}(A)$ :

$$\mathrm{Tit}(A) = \big(\mathrm{Tit}(A)\big)_{-1} \oplus \big(\mathrm{Tit}(A)\big)_0 \oplus \big(\mathrm{Tit}(A)\big)_1$$

où $\big(\mathrm{Tit}(A)\big)_{-1} := \mathbb{K}F \otimes_{\mathbb{K}} A$ ;

$\big(\mathrm{Tit}(A)\big)_0 := \big(\mathbb{K}H \otimes_{\mathbb{K}} A\big) \oplus \mathrm{Im}(A)$ ;

$\big(\mathrm{Tit}(A)\big)_1 := \mathbb{K}G \otimes_{\mathbb{K}} A$.

Comme $tr(H^2)=2$, $tr(F^2)=tr(G^2)=0$, $tr(HF)=tr(HG)=0$ et $tr(FG)=1$,

alors $\begin{cases} [Tit(A)_{-1}, Tit(A)_1]_T \subseteq Tit(A)_0 \\ [Tit(A)_{-1}, Tit(A)_0]_T \subseteq Tit(A)_{-1} \\ [Tit(A)_1, Tit(A)_0]_T \subseteq Tit(A)_1 \end{cases}$

<u>Proposition</u> $(Tit(A), [\,,]_T)$ est

2 une algèbre de Lie 3-graduée.

<u>Preuve.</u>

- Soient $A, B, C \in sl_2(\mathbb{K})$ et $a, b, c \in A$.

$$[A\otimes a, [B\otimes b, C\otimes c]_T]_T$$
$$= [A\otimes a, [B,C]\otimes b.c + 2tr(BC)D_{b,c}]_T$$
$$= [A,[B,C]]\otimes a.(b.c) + 2tr(A[B,C])D_{a,b.c} - 2tr(BC)\left(A\otimes D_{b,c}(a)\right)$$

$A = H$, $B = F$ et $C = G$

$\to [A \otimes a, [B \otimes b, C \otimes c]_T]_T$

$= [H \otimes a, [F \otimes b, G \otimes c]_T]_T$

$= [H, [F, G]] \otimes a.(b.c)$

$+ 2\,\mathrm{tr}(H\,[F,G])\,D_{a, b.c}$

$- 2\,\mathrm{tr}(FG)\,(H \otimes D_{b,c}(a))$

$= [H, H] \otimes a.(b.c) + 2\,\mathrm{tr}(H^2)\,D_{a, b.c}$

$- 2(H \otimes D_{b,c}(a))$

$= 4\,D_{a, b.c} - 2(H \otimes D_{b,c}(a))$

$\to [F \otimes b, [G \otimes c, H \otimes a]]$

$= [F, [G, H]] \otimes b.(c.a)$

$+ 2\,\mathrm{tr}(F\,[G,H])\,D_{b, c.a} - 2\,\mathrm{tr}(GH)\,(F \otimes D_{c,a}(b))$

$= +2\,H \otimes b.(c.a) + 4\,D_{b, c.a}$

$$\to \quad [G\otimes c, [H\otimes a, F\otimes b]_T]_T$$

$$= [G,[H,F]]\otimes c.(a.b)$$
$$+ 2\,\mathrm{tr}(G[H,F])\, D_{c,a.b}$$
$$- 2\,\mathrm{tr}(HF)\,(G\otimes D_{a,b}(c))$$

$$= -2H\otimes c.(a.b) + 4D_{c,a.b}$$

$$\sum_{cycl} [H\otimes a, [F\otimes b, G\otimes c]_T]_T$$

$$= 4(D_{a,b.c} + D_{b,c.a} + D_{c,a.b})$$
$$-2H\otimes D_{b,c}(a) + 2H\otimes b.(c.a)$$
$$-2H\otimes c.(a.b)$$

$$= 4\times 0 + H\otimes (2(b.(c.a) - c.(a.b) - D_{b,c}(a)))$$
$$= 0$$

Car $D_{b,c}(a) = [L_b, L_c](a) = L_b L_c(a) - L_c L_b(a) = b(ca) - c(b.a)$

. Soit $D \in \mathrm{Inn}(A)$ et soient $A, B \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ et $a, b \in A$.

---

$\to [D, [A \otimes a, B \otimes b]_T]_T$

$$= [D, [A,B] \otimes a.b + 2\,\mathrm{tr}(AB) D_{a,b}]$$
$$= [A,B] \otimes D(a.b) + 2\,\mathrm{tr}(AB) [D, D_{a,b}]$$

---

$\to [A \otimes a, [B \otimes b, D]_T]_T$

$$= -[A \otimes a, B \otimes D(b)]$$
$$= -\left([A,B] \otimes a.D(b) + 2\,\mathrm{tr}(AB) D_{a,D(b)}\right)$$

---

$\to [B \otimes b, [D, A \otimes a]_T]_T$

$$= [B \otimes b, A \otimes D(a)]_T$$
$$= [B,A] \otimes b.D(a) + 2\,\mathrm{tr}(BA) D_{b,D(a)}$$
$$= -\left([A,B] \otimes b.D(a) + 2\,\mathrm{tr}(AB) D_{D(a),b}\right).$$

---

Donc, $[D, [A\otimes a, B\otimes b]_T]_T$

$+ [A\otimes a, [B\otimes b, D]_T]_T$

$+ [B\otimes b, [D, A\otimes a]_T]_T$

$$= [A,B]\otimes\big(\underbrace{D(a.b) - a.D(b) - b.D(a)}_{=0}\big)$$

$$+ 2\,\mathrm{tr}(AB)\big(\underbrace{[D, D_{a,b}] - D_{a,D(b)} - D_{D(a),b}}_{=0}\big)$$

$= 0$

---

- Soient $D, \delta \in \mathrm{Inn}(A)$, $B \in sl_2(\mathbb{K})$ et $b \in A$

$\rightarrow\ [D, [\delta, B\otimes b]_T]_T$

$= [D, B\otimes \delta(b)]_T = B\otimes D(\delta(b))$

$\rightarrow\ [\delta, [B\otimes b, D]_T]_T = -[\delta, B\otimes D(b)]$

$= - B\otimes \delta D(b)$

$\rightarrow\ [B\otimes b, [D,\delta]_T]_T$

$= -\ B\otimes [D,\delta]_T(b) = -B\otimes [D,\delta](b)$

Donc $[D,[\delta, B\otimes b]_T]_T$

$$+ [\delta,[B\otimes b, D]_T]_T + [B\otimes b,[D,\delta]_T]_T$$

$$= B\otimes \big(\underbrace{D\delta - \delta D - [D,\delta]}_{\text{"0"}}\big)(b)$$

$$= 0$$

---

Si $D, \delta, \Delta \in \mathrm{Inn}(A)$,

$$\sum_{cycl} [D,[\delta,\Delta]_T]_T = \sum_{cycl} [D,[\delta,\Delta]]$$

$$= 0.$$

$$\boxed{\text{On conclut que } (\mathrm{Tit}(A), [\,,\,]_T) \text{ est une algèbre de Lie}}$$

Maintenant soient $B, C \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$,

$D, \delta \in \mathrm{Im}(A)$ et $b, c \in A$

$$[F \otimes b, F \otimes c] = \underbrace{[F,F]}_{=0} \otimes b.c + 2\,\underbrace{\mathrm{tr}(F^2)}_{=0} D_{b,c}$$

Donc $\boxed{\left[\left(\mathrm{Tit}(A)\right)_{-1}, \left(\mathrm{Tit}(A)\right)_{-1}\right] = \{0\}.}$

$$[G \otimes b, G \otimes c] = \underbrace{[G,G]}_{=0} \otimes b.c + 2\,\underbrace{\mathrm{tr}(G^2)}_{=0} D_{b,c}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\left[\left(\mathrm{Tit}(A)\right)_{1}, \left(\mathrm{Tit}(A)\right)_{1}\right] = \{0\}.}$$

$$[F \otimes b, H \otimes c + D]_T$$

$$= [F,H] \otimes b.c + 2\,\underbrace{\mathrm{tr}(FH)}_{=0} D_{b,c} - F \otimes D(b)$$

$$= F \otimes (-2\,b.c - D(b)) \in \underbrace{\mathbb{K}F \otimes_{\mathbb{K}} A}_{\left(\mathrm{Tit}(A)\right)_{-1}}$$

Donc $\boxed{[(\mathrm{Tit}(A))_{-1}, (\mathrm{Tit}(A))_0] \subseteq (\mathrm{Tit}(A))_{-1}}$

$$[G\otimes b, H\otimes c + D]_T$$
$$= [G,H]\otimes b.c - G\otimes D(b)$$
$$= 2G\otimes b.c - G\otimes D(b)$$
$$= G\otimes (2b.c - D(b)) \in \underbrace{\mathbb{K}G\otimes A}_{\in(\mathrm{Tit}(A))_{-1}}$$

Donc $\boxed{[(\mathrm{Tit}(A))_1, (\mathrm{Tit}(A))_0] \subseteq (\mathrm{Tit}(A))_1}$

$$[H\otimes b + D, H\otimes c + \delta]_T$$
$$= [H,H]\otimes b.c + 2\,\mathrm{tr}(H^2)\,D_{b,c}$$
$$- H\otimes \delta(b) + H\otimes D(c) + [D,\delta]$$
$$= H\otimes(\underbrace{D(c) - \delta(b)}_{\in A}) + (\underbrace{4D_{b,c} + [D,\delta]}_{\in \mathrm{Inn}(A)})$$
$$\in (\mathrm{Tit}(A))_0$$

Donc $[(Tit(A))_0, (Tit(A))_0] \subseteq (Tit(A))_0$

On conclut que $(Tit(A), [\,,\,]_T)$ est une algèbre de Lie 3-graduée.

Remarque.

① Si $(A, .)$ est une algèbre associative commutative, alors

- $Tit(A) = sl_{\mathbb{K}}(2) \otimes A$

 car $Inn(A) = Vect\{ \underbrace{[L_a, L_b]}_{D_{a,b} = 0}, a, b \in A\} = \{0\}$.

- $[B \otimes b, C \otimes c]_T = [B, C] \otimes b.c$, $\forall B, C \in sl_{\mathbb{K}}(2)$ et $\forall b, c \in A$

- $(Tit(A))_0 = \mathbb{K}H \otimes A$ ; $(Tit(A))_1 = \mathbb{K}E \otimes A$ et $(Tit(A))_{-2} = \mathbb{K}F \otimes A$.

② Jacques Tits, en étudiant des modèles pour les algèbres de Lie exceptionnelles, a fait la remarque suivante :

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie contenant l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}) = \mathrm{vect}\{H, F, G\}$.

Si $ad_{\mathfrak{g}}(H)$ agissant sur $\mathfrak{g}$ a $-2, 0, 2$ comme seules valeurs propres, alors le sous-espace propre $\mathfrak{g}(2)$ de $\mathfrak{g}$ associé à la valeur propre 2 muni du produit :

$$x \circ y := [[x, F], y], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}(2)$$

est une algèbre de Jordan.

2

# Construction de Max Koecher

Soit $(A, .)$ une algèbre de Jordan unitaire.

et soit $\bar{A}$ une autre copie de $A$.

Les éléments de $\bar{A}$ seront notés $\bar{a}$

où $a \in A$.

Notons $\mathcal{L}(A) := L(A) \oplus \mathrm{Inn}(A)$ (car $A$ est unitaire)

où $L(A) := \{ L_a \,/\, a \in A \}$

et $\mathrm{Inn}(A) := \{ D_{a,b} := [L_a, L_b] \,/\, a, b \in A \}$.

$\mathcal{L}(A)$ est une sous-algèbre de Lie

de $gl(A) = (\mathrm{End}(A))^- = (\mathrm{End}(A), [,])$

car $[\underbrace{D_{a,b}}_{\delta}, D_{a',b'}] = D_{\delta(a'),b'} + D_{a',\delta(b')}$

On considère l'application

$$\begin{aligned} \square : A \times \bar{A} &\longrightarrow \mathcal{L}(A) \\ (a, \bar{b}) &\longmapsto a \square \bar{b} := 2(L_{a.b} + D_{a,b}) \end{aligned}$$

$\square$ est clairement bilinéaire.

On considère l'application linéaire

$$\mathcal{L}(A) \longrightarrow \mathcal{L}(A)$$
$$T \longmapsto T^*$$

où $T^* := T$ si $T \in L(A)$

et $T^* := -T$ si $T \in \mathrm{Inn}(A)$.

On considère l'espace vectoriel

$$\mathrm{Koec}(A) = A \oplus \mathcal{L}(A) \oplus \bar{A}.$$

Sur cet espace vectoriel, on définit le produit (bilinéaire et anti-symétrique) $[\,,]_K$ suivant: $\forall\, T_1, T_2, T \in \mathcal{L}(A)$ et $\forall\, a, b, a', b' \in A$:

$$\boxed{\begin{array}{l} [T_1, T_2]_K := [T_1, T_2] = T_1T_2 - T_2T_1 \,; \\ [T, a]_K := T(a) \,; \\ [T, \bar{a}]_K := -\overline{T^*(a)} \,; \\ [a, \bar{b}]_K = a \square \bar{b} \;;\; [a, a']_K = [\bar{b}, \bar{b}']_K = 0 \end{array}}$$

**Notation.** $T(\bar{a}) := -\overline{T^*(a)}$

$\forall\, T \in \mathcal{L}(A)$ et $\forall\, a \in A$.

On vérifie facilement que : $(\mathrm{Koec}(A), [\ ,\ ]_K)$ est une algèbre de Lie si et seulement si

$$\boxed{\begin{array}{ll} ① & (a \,\square\, \bar{b})(a') = (a' \,\square\, b)(a)\ ; \\ ② & (a \,\square\, \bar{b})(\bar{b'}) = (a \,\square\, \bar{b'})(\bar{b})\ ; \\ ③ & [T, a \,\square\, \bar{b}] = T(a) \,\square\, \bar{b} - a \,\square\, \overline{T^*(b)}\ ; \end{array}}$$

$\forall\, a, b, a', b' \in A$ et $\forall\, T \in \mathcal{L}(A)$.

① et ② sont vérifiées car "." est commutative et le ③ est vérifiée car $(A, .)$ est de Jordan (on utilise des identités vérifiées par les algèbres de Jordan (voir Algèbre de Jordan (I))).

En effet,

→ Soient $a, b, c \in A$,

- $[a, [b, \bar{c}]_k]_k = [a, b \square \bar{c}]_k$

$= -(b \square \bar{c})(a)$

$= -2(L_{bc} + D_{b,c})(a)$

- $[b, [\bar{c}, a]_k]_k = -[b, [a, \bar{c}]_k]_k$

$= 2(L_{ac} + D_{a,c})(b)$

- $[\bar{c}, \underbrace{[a, b]_k}_{\overset{\shortparallel}{0}}]_k = 0$

Donc $\sum_{c,y,\varphi} [a, [b, \bar{c}]_k]_k = 2\left((L_{ac} + D_{a,c})(b) - (L_{bc} + D_{b,c})(a)\right)$

$= (a \square \bar{c})(b) - (b \square \bar{c})(a).$

$(L_{ac} + D_{a,c})(b) = (L_{ac} + L_a L_c - L_c L_a)(b)$

$= (ac)b + a(cb) - c(ab)$

$(L_{bc} + D_{b,c})(a) = (bc)(a) + b(ca) - c(ba)$

$= (L_{ac} + D_{a,c})(b).$

Donc $\sum_{cycl} [a,[\bar{b},\bar{c}]_k]_k = 0$.

- $[a,[\bar{b},\bar{c}]]_{k\,k} + [\bar{b},[\bar{c},a]_k]_k + [\bar{c},[a,\bar{b}]_k]$

$= -[\bar{b}, a\,\Box\,\bar{c}]_k + [\bar{c}, a\,\Box\,\bar{b}]_k$

$= -\overline{(a\,\Box\,\bar{c})^* b} + \overline{(a\,\Box\,\bar{b})^*(c)}$

$= \overline{(a\,\Box\,\bar{c})b} - (a\,\Box\,\bar{b})(c)$

$= 2\,\overline{(L_{a,c}+D_{a,c})(b) - (L_{a,b}+D_{a,b})(c)}$

$= 2\left( \begin{array}{l} \overline{(a.c).b + a.(c.b) - c.(a.b)} \\ - \overline{(a.b).c + a.(b.c) - b.(a.c)} \end{array} \right.$

$= 0$ car "." est commutative.

- Soient $T \in \mathcal{L}(A)$, $a, b \in A$

$[T,[a,b]_k]_k + [a,[b,T]_k]_k + [b,[T,a]_k]_k$

$= 0 - \underbrace{[a,T(b)]_k}_{0} + \underbrace{[b,T(a)]_k}_{0} = 0$

$$\to [L_a, [b, \bar{c}]_k]_k + [b, [\bar{c}, L_a]_k]_k$$

$$+ [\bar{c}, [L_a, b]_k]_k$$

$$= [L_a, b \,\Box\, \bar{c}]_k - [b, [L_a, \bar{c}]_k]_k$$

$$+ [\bar{c}, a.b]_k$$

$$= [L_a, b \,\Box\, \bar{c}]_k + [b, \overline{L_a^*(c)}]_k$$

$$- a.b \,\Box\, \bar{c}$$

$$= [L_a, 2(L_{bc} + [L_b, L_c]) ]$$

$$+ [b, \overline{ac}]_k - 2L_{(a.b)c} - 2[L_{a.b}, L_c]$$

$$= 2[L_a, L_{bc} + [L_b, L_c]]$$

$$+ 2 L_{b(ac)} + 2[L_b, L_{ac}]$$

$$- 2L_{(a.b).c} - 2[L_{a.b}, L_c]$$

$$= 2\Big( [L_a, L_{bc}] + [L_a, [L_b, L_c]]$$

$$+ L_{b(ac)} + [L_b, L_{ac}] - L_{(ab)c} - [L_{a.b}, L_c] \Big)$$

$$= 2\Big( \underbrace{[[L_a, L_b], L_a] - L_{\underbrace{[L_c, L_b](a)}_{c(ba) - b(ca)}}}_{0} \Big)$$

$$+ 2\Big( \underbrace{[L_a, L_{bc}] + [L_b, L_{ac}] + [L_c, L_{a.b}]}_{0} \Big)$$

car $(A,.)$ est une algèbre de Jordan

**Remarque.** si $(A,.)$ est une algèbre de Jordan non unitaire, Koecher considère le cas où $(A,.)$ est semi-euclidienne, càd $\exists B : A \times A \longrightarrow \mathbb{K}$ bilinéaire non dégénérée, symétrique tq $B(ab,c) = B(a,bc)$ $\forall a,b,c \in A$ et dans ce cas on a en vue $L(A) \cap \mathrm{Inn}(A) = \{0\}$ et par conséquent, Sa construction reste valable dans ce cas.

Avec A. Baklouti (Thèse Metz 2007), nous avons remarqué que $\mathrm{Kaec}(A)$ n'est pas en général quadratique dans ce cas.

Nous avons donc opéré une modification de $\mathrm{Kaec}(A)$ en remplaçant $\mathrm{Lie}(A) = L(A) \oplus \mathrm{Inn}(A)$ par $H(A) := L(A^2) \oplus \mathrm{Inn}(A)$.

Dans ce cas, $A \oplus H(A) \oplus \bar{A}$ est une algèbre de Lie quadratique.

# Algèbres de Lie $\mathbb{Z}_2$-graduées

Soit $(\mathfrak{g}, [\,,\,]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie

$(\mathfrak{g}, [\,,\,]_{\mathfrak{g}})$ est dite $\mathbb{Z}_2$-graduée

si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, où

$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ et $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\,,\,]_{\mathfrak{g}})$, tel que :

- $[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}]_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ ;
- $[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}]_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ ;
- $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}]_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{0}}$.

Càd $[\mathfrak{g}_{\bar{i}}, \mathfrak{g}_{\bar{j}}] \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{i}+\bar{j}}$

$\forall\, \bar{i}, \bar{j} \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

2

**Remarque.** (1) $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \neq \{0\}$ et $[\,,\,]_{\mathfrak{g}} \neq 0$ est le cas intéressant.

(2) Soit $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{0} \oplus \mathfrak{g}_{1}, [\,,\,]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre 3-graduée, alors

$(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}, [\,,\,]_{\mathfrak{g}})$

est une algèbre de Lie $\mathbb{Z}_2$-graduée

où $\mathfrak{g}_{\bar{0}} := \mathfrak{g}_{0}$ et $\mathfrak{g}_{\bar{1}} := \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{1}$

Par conséquent, si $(A, \cdot)$ est une algèbre de Jordan, alors <u>Kan$(A)$, Tit$(A)$ et Koec$(A)$</u> sont $\mathbb{Z}_2$-graduées

**Proposition.** Soit $(\mathfrak{g}, [\,,\,]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie.

$(\mathfrak{g}, [\,,\,]_{\mathfrak{g}})$ est $\mathbb{Z}_2$-graduée si et seulement si $\exists\, \sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ un morphisme d'algèbres de Lie tq $\sigma^2 = id_{\mathfrak{g}}$ (càd $\sigma$ est une involution)

2

**Preuve.** $(\Longrightarrow)$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$

On considère l'application linéaire

$\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ tq $\sigma(x) = x$ si $x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$

et $\sigma(x) = -x$ si $x \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$

Soient $X = X_{\bar{0}} + X_{\bar{1}}$, $Y = Y_{\bar{0}} + Y_{\bar{1}}$

où $X_{\bar{0}}, Y_{\bar{0}} \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ et $X_{\bar{1}}, Y_{\bar{1}} \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$,

$$\sigma^2(x) = \sigma(x_{\bar 0} - x_{\bar 1}) = x_{\bar 0} + x_{\bar 1} = x$$

$$\sigma([x,y]_{\mathfrak g}) = \sigma\Big([x_{\bar 0}, y_{\bar 0}]_{\mathfrak g} + [x_{\bar 1}, y_{\bar 1}]_{\mathfrak g} + [x_{\bar 1}, y_{\bar 0}]_{\mathfrak g} + [x_{\bar 0}, y_{\bar 1}]_{\mathfrak g}\Big)$$

$$= [x_{\bar 0}, y_{\bar 0}]_{\mathfrak g} + [x_{\bar 1}, y_{\bar 1}]_{\mathfrak g} - [x_{\bar 1}, y_{\bar 0}]_{\mathfrak g} - [x_{\bar 0}, y_{\bar 1}]_{\mathfrak g}$$

$$= [x_{\bar 0} - x_{\bar 1}, y_{\bar 0} - y_{\bar 1}]_{\mathfrak g} = [\sigma(x), \sigma(y)]_{\mathfrak g}.$$

($\Leftarrow$) Supposons $\exists\, \sigma : \mathfrak g \to \mathfrak g$ morphisme d'algèbre de Lie tq $\sigma^2 = id$

On considère $\mathfrak g_{\bar 0} := \{x \in \mathfrak g \,/\, \sigma(x) = x\}$

$\mathfrak g_{\bar 1} := \{x \in \mathfrak g \,/\, \sigma(x) = -x\}$

$\forall x \in \mathfrak g$, $\quad x = \underbrace{(x + \sigma(x))}_{\in \mathfrak g_{\bar 0}} + \underbrace{(x - \sigma(x))}_{\in \mathfrak g_{\bar 1}}$

et $\mathfrak g_{\bar 0} \cap \mathfrak g_{\bar 1} = \{0\}$.

Donc $\mathfrak g = \mathfrak g_{\bar 0} \oplus \mathfrak g_{\bar 1}$. Comme $\sigma$ est un morphisme d'algèbre de Lie, alors

$$[\mathfrak g_{\bar i}, \mathfrak g_{\bar j}]_{\mathfrak g} \subseteq \mathfrak g_{\bar i + \bar j} \quad \forall\, \bar i, \bar j \in \mathbb Z_2.$$

**Remarque.** Soit $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}, [\,,\,]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie $\mathbb{Z}_2$-graduée, alors

$$[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} & \longrightarrow & \mathfrak{g}_{\bar{1}} \\ (x,y,z) & \longmapsto & [x,y,z]_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} \end{array}$$

$$:= [[x,y]_{\mathfrak{g}}, z]_{\mathfrak{g}}$$

est bien définie qui vérifie les conditions d'un système de triple de Lie.

**Définition (Système triple de Lie)**

Soit $S$ un espace vectoriel et soit $[\cdot,\cdot,\cdot]_{S} : S \times S \times S \longrightarrow S$ une application trilinéaire. $(S, [\cdot,\cdot,\cdot]_{S})$ est dit un système triple de Lie si :

① $[x,y,z]_{S'} = -[y,x,z]_{S'}$,

② $[x,y,z]_{S'} + [y,z,x]_{S'} + [z,x,y]_{S'} = 0$,

③ $[x,y,[z,u,v]]$
$$= [[x,y,z],u,v] + [z,[x,y,u],v] + [z,u,[x,y,v]],$$

2 $\forall x,y,z,u,v \in S'$.

**Notation** $\forall x,y \in S'$, $L_{x,y} = [x,y,\cdot]$.

**Définition.** Soit $(S', [\cdot,\cdot,\cdot]_{S'})$ un système triple de Lie et soit $D : S' \to S'$ une application linéaire. $D$ est dite une dérivation du système triple de Lie $S'$ si $\forall x,y,z \in S'$ :

$$D[x,y,z]_{S'} = [D(x),y,z]_{S'} + [x,D(y),z]_{S'} + [x,y,D(z)]_{S'}, \quad \forall x,y,z \in S'.$$

Remarque ① La condition ③ dans la définition d'un système triple de Lie est équivalente à $L_{x,y}$ est une dérivation de $(S, [\cdot,\cdot,\cdot]_S)$, $\forall x,y \in S$. $L_{x,y}$ est dite une dérivation intérieure.

② Si $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ est une algèbre de Lie, alors $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} := [[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}},\cdot]_{\mathfrak{g}})$ est un système triple de Lie.

Notation. Soit $(S, [\cdot,\cdot,\cdot]_S)$ un S.T.L.

$Der(S) := \{D : S \to S \text{ dérivation}\}$

$Inn(S) := vect\{L_{x,y} \,/\, x,y \in S\}$

Proposition. ① $Der(S)$ est une sous-algèbre de Lie de $gl(S) := (End(S))^{-}$

② $Inn(S)$ est un idéal de l'algèbre de Lie $Der(S)$.

2

**Preuve.** Soient $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{S}')$ et $x, y, z \in \mathcal{S}'$

② $[D, L_{x,y}](z) = D([x,y,z]_{\mathcal{S}'}) - [x,y,D(z)]_{\mathcal{S}'}$

$= [D(x),y,z]_{\mathcal{S}'} + [x, D(y), z]_{\mathcal{S}'}$

$= \left(L_{D(x),y} + L_{x,D(y)}\right)(z)$

Donc $\boxed{[D, L_{x,y}] = L_{D(x),y} + L_{x,D(y)} \in \mathrm{Inn}(\mathcal{S}').}$

Soit $(\mathcal{S}', [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathcal{S}'})$ un système triple de Lie, alors on considère l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué :

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$$

où $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathrm{Inn}(\mathcal{S}')$ et $\mathfrak{g}_{\bar{1}} := \mathcal{S}'$

**Proposition** $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{\bar 0} \oplus \mathfrak{g}_{\bar 1}$

où $\mathfrak{g}_{\bar 0} := \mathrm{Inn}(S')$ et $\mathfrak{g}_{\bar 1} := S'$

muni du produit (bilinéaire antisymétrique) défini par :

$\forall X, Y \in S'$, $\forall D, \delta \in \mathrm{Inn}(S')$ :

① $[D, \delta]_{\mathfrak{g}} := D\delta - \delta D$ ;

② $[D, X]_{\mathfrak{g}} := D(X)$ ;

③ $[X, Y]_{\mathfrak{g}} := L_{X,Y}$,

est une algèbre de Lie $\mathbb{Z}_2$-graduée.

**Preuve.** Un calcul direct

**Remarque** ① Si $X, Y, Z \in S'$ $[L_{X,Y}, Z]_{\mathfrak{g}} := [X, Y, Z]_{S'}$

② Nous avons montré le lien étroit entre les algèbres de Lie $\mathbb{Z}_2$ graduées et les systèmes triples de Lie.

# Système triple de Jordan

Soit $(S', \{\cdot,\cdot,\cdot\}_{S'})$ un système triple (càd $S'$ espace vectoriel et $\{\cdot,\cdot,\cdot\}_{S'} : S' \times S' \times S' \longrightarrow S'$ trilinéaire).

$(S, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_{S'})$ est dit un système triple de Jordan si :

$\forall x, y, u, v, w \in S'$,

① $\{u, v, w\}_{S'} = \{w, v, u\}_{S'}$ ;

② $\{x, y, \{u, v, w\}_{S'}\}_{S'} - \{u, v, \{x, y, w\}\}_{S'}$

$= \{\{x, y, u\}, v, w\} - \{u, \{y, x, v\}, w\}$

## Théorème (K. MYBERG).

Si $(\mathbb{S}', \{\cdot,\cdot,\cdot\}_{\mathbb{S}'})$ est un système triple de Jordan, alors $(\mathbb{S}', [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathbb{S}'})$ est un système triple de Lie, où

$$\boxed{[x,y,z]_{\mathbb{S}'} := \{x,y,z\}_{\mathbb{S}'} - \{y,x,z\}_{\mathbb{S}'}, \quad \forall x,y,z \in \mathbb{S}'}$$

Preuve. Un calcul direct.

Proposition.

Soit $(A, .)$ une algèbre de Jordan. Alors $(A, \{.,.,.\}_A)$ est un système triple de Jordan, où :

$$\boxed{\begin{aligned}\{x,y,z\} := x.(y.z) - y.(x.z) \\ + (x.y).z, \\ \forall x,y,z \in J.\end{aligned}}$$

Preuve un calcul directe

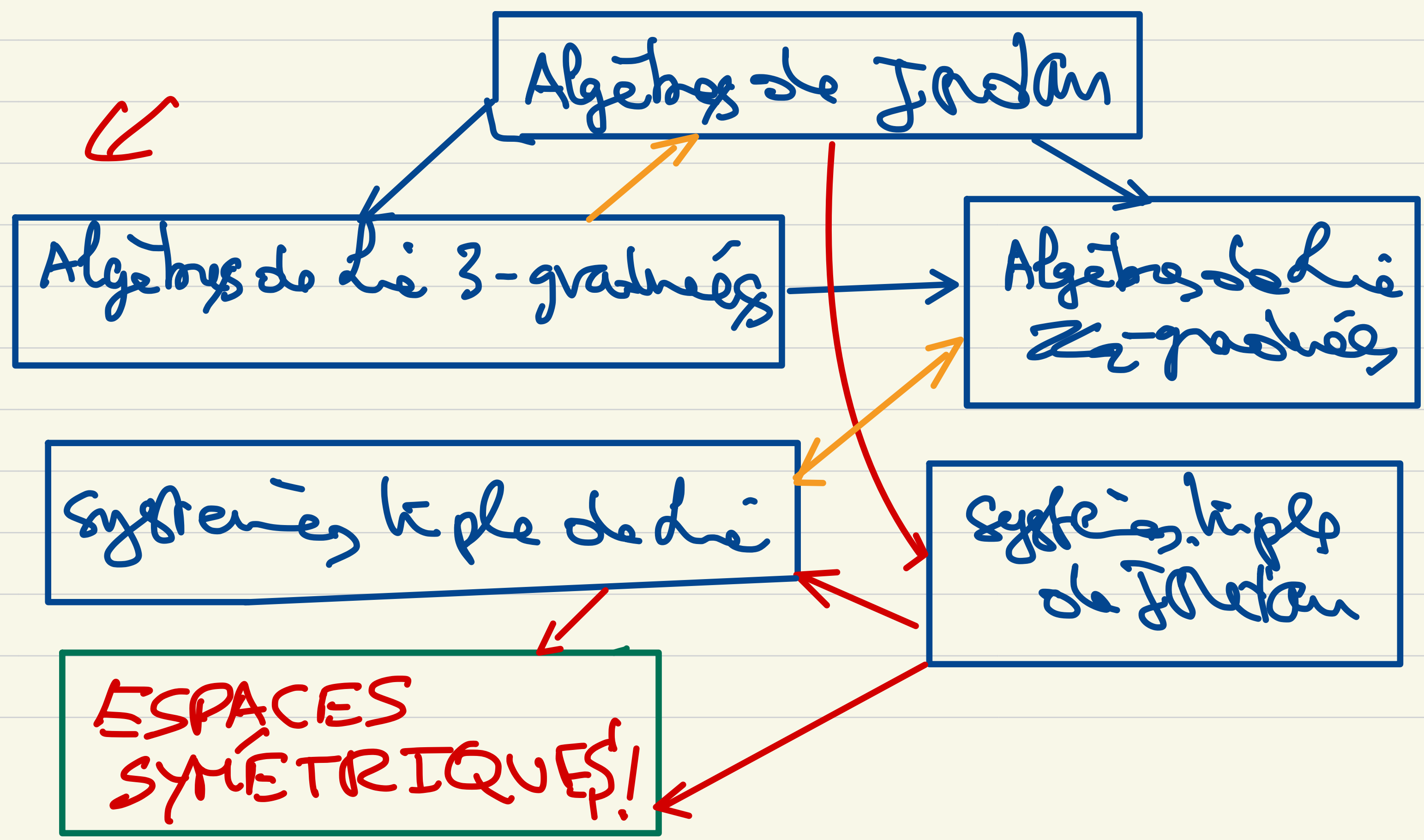
Corollaire Si $(A, .)$ est une algèbre de Jordan, alors $(A, [.,.,.]_A)$ est un système triple de Lie, où

2) $\forall x,y,z \in A$, $[x,y,z]_A := 2 D_{x,y}(z)$

Preuve.

$$[x,y,z]_A = \{x,y,z\}_A - \{y,x,z\}_A$$

$$= x(yz) - y(xz) + (xy)z$$
$$- y(xz) + x(yz) - (yx)z$$
$$= 2\big(x(yz) - y(xz)\big)$$
$$= 2\big([L_x, L_y](z)\big)$$
$$= 2 D_{x,y}(z)$$



## Quelques références.


(1) R.D. Schafer, "An introduction to nonassociative algebras", 1966, Academic Press

(2) J. Faraut, A. Koranyi, "Analysis on symmetric cones", 1994, Oxford Science Publications.

(3) Max Koecher, "The Minnesota notes on Jordan Algebras and Their Applications", Lecture notes in Mathematics 1710, 1999.

(4) K. McCrimmon, "A Taste of Jordan Algebras", Springer, 2003.

(5) W. Bertram, "The Geometry of Jordan and Lie structures, Lecture notes in Mathematics, 1754, 2000.

(6) W. G. LISTER, "A structure Theory of Lie triple systems, Transaction of Mathematical society, 1952, N° 2, pp 217-242.

(7) O. LOOS, "Symmetric Spaces I: General Theory", 1969, W. A BENJAMIN, INC.

(8) O. Smirnov, "Imbedding of Lie triple Systems into Lie Algebras", J. Algebra (341), 2009.

(9) J. Tits, "Une classe d'algèbres de Lie en relation avec les algèbres de Jordan", Indag. Math. 24 (1962) 530–535.

(10) M. Koecher, Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras I, Amer. J. Math. 89 (1967) 787–816

(11) I. L. Kantor, "Transitive differential groups and invariant connections in homogeneous spaces. Trudy Sem. Vector. Tenzor. Anal. 13 (1966) 310–398

(12) S. Barbier, K. Coulembier, "On structure and TKK algebras for Jordan Superalgebras", Comm Algebra, 2018, vol 46, N°2, 684–704

(13) E. Neher,
On the classification of
Lie and Jordan triple systems,
Comm Algebra, 1985, vol 13,
issue 12.

(14) E. Neher,
Lie algebras graded by 3-graded
root systems and Jordan
pairs covered by grids
Amer Journal of Mathematics,
vol 118, N° 2, 1996, 439-491

(15) N. Jacobson, Lie and Jordan
triple systems, Amer Journal
of Mathematics, vol 71, N° 1, 1949,
pp 149-170.

16 A. Baklouti, S. Benayadi, "Pseudo Euclidean Jordan Algebras", Comm Algebra, vol 43, N5, 2015, pp 2094-2123.

Merci pour votre Attention!