Quelques problèmes sur les algèbres réelles de division

Conférence présentée par le Professeur Abdellatif ROCHDI

Université Hassan 2 Casablanca,
Séminaire d'Algèbre, Géométrie, Topologie et application
Faculté des Sciences et Techniques Marrakech

27 Mars 2021

Sir William Rowan Hamilton
(1805 - 1865)

Découverte des QUATERNIONS
(16 Octobre 1843)

John Thomas Graves
(1806 - 1870)

Découverte des OCTONIONS
(Décembre 1843)

Arthur Cayley
1821-1895

Découverte indépendante des OCTONIONS
(publiée en 1845)

Definition 1

Une algèbre sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-e.v.* $\mathcal{A}$ *muni d'une application bilinéaire* $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad (x, y) \mapsto xy$ *dite produit de* $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ *est dite* algèbre réelle de division *si elle est de dimension finie sur* $\mathbb{R}$ *et si les opérateurs de multiplication* $L_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad y \mapsto xy$*,* $R_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad y \mapsto yx$ *sont bijectifs pour tout* $x \in \mathcal{A} - \{0\}$. *Les algèbres réelles*

$$^*\mathbb{C} = (\mathbb{C}, \odot) : \qquad x \odot y = \overline{x}y,$$

$$\overset{*}{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}, \diamond) : \qquad x \diamond y = \overline{x}\,\overline{y}$$

sont non associatives et non unitaires.

Hamilton (1843)
(découverte des quaternions $\mathbb{H}$)

Graves (1843), Cayley (1845)
(découverte des octonions $\mathbb{O}$)

Frobenius (1878)

Ostrowski (1918)

Zorn (1931)

Dickson (1935)

Hopf (1940)

Albert (1942, 47, 48, 49)

Bruck (1944)

Rees (1950)

Raffin (1950)

Wright (1953)

Segre (1954)

Bott-Milnor, Kervaire (1958)

Urbanik-Wright (1960)

Urbanik (1961)

Osborn (1962)

Schafer (1966)

Okubo (1978)
(découverte des pseudo-octonions $\mathbb{P}$)

Yang (1981)

Benkart-Osborn (1981)

Benkart-Britten-Osborn (1982)

Petro (1987)

Hübner-Petersson (2004)

Rodríguez (2004)

Dieterich (2005)

Darpö (2006)

Cabrera-Rodríguez (2014)

Autres

Livres

[BD 73] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete Normed Algebras.* Springer-Verlag, (1973).

[BK 66] H. Braun and M. Koecher, *Jordan Algebren.* Springer-Verlag, (1966).

[CR 14] F M. Cabrera and Á. Rodríguez, *Non-associative normed algebras. Volume 1 : The Vidav-Palmer and Gelfand-Naimark Theorems.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **154**. Cambridge University Press, 2014.

[CR 18] F M. Cabrera and Á. Rodríguez, *Non-associative normed algebras. Volume 2 : Representation Theory and the Zel'manov Approach.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **167**. Cambridge University Press, 2018.

[HKR 90] F. Hirzebruch, M. Koecher, and R. Remmert, *Numbers.* Graduate texts in Mathematics **123**, Springer-Verlag, New York, 1990.

[Ka 77] A. M. Kaïdi, *Bases para una teoria de las algebras no asociativas normadas.* Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Spain (1977).

Livres

[Ku 67] A. G. Kurosh, *Algèbre Générale.* Collection Universitaire de Mathématiques, Dunod, Paris (1967).

[Ri 60] C. E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras.* Princeton (1960)

[Roc 94] A. Rochdi, *Algèbres non associatives normées de division. Classification des algèbres réelles de Jordan non commutatives de division linéaire de dimension 8.* Thèse Doctorale, Université Mohammed V, Faculté des Sciences de Rabat (1994).

[Sc 66] R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras.* Academic Press, New York (1966).

[Ram 99] M. I. Ramírez, *On four dimensional absolute valued algebras.* Proceedings of the International Conference on Jordan Structures (Málaga, June 1997) (Ed. A. Castellón, J. A. Cuenca, A. Fernández, and C. Martín), 169-173, Málaga, (1999)

Definitions 2

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre.

1. *Elle est dite* ***alternative*** *si* $x^2y = x(xy)$ *et* $yx^2 = (yx)x$.
2. *Elle est dite* ***à puissances associatives*** *si pour tout* $x \in \mathcal{A}$ *la sous-algèbre de* $\mathcal{A}$ *engendrée par* x *est associative.*
3. *Elle est dite* ***à puissances commutatives*** *si pour tout* $x \in \mathcal{A}$ *la sous-algèbre de* $\mathcal{A}$ *engendrée par* x *est commutative.*
4. *Elle est dite* ***flexible*** *si elle satisfait à l'identité* $(xy)x = x(yx)$.
5. *Elle est dite* ***à puissances*** 3***-associatives*** *si* $xx^2 = x^2x := x^3$.

L'organigramme suivant illustre la hiérarchie entre ces identités :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \textbf{Associative} & & . \\
 & & \Downarrow & & . \\
\textbf{Commutative} & & \textbf{Alternative} & & . \\
 & \searrow\!\!\searrow & \swarrow\!\!\swarrow \quad \searrow\!\!\searrow & & . \\
 & \textbf{Flexible} & & \textbf{P. Associatives} & \\
 & \Downarrow & & \Downarrow & . \\
 & & \textbf{P. Commutatives} & & . \\
 & & \Downarrow & & . \\
 & & \textbf{P. 3-associatives} & & .
\end{array}
$$

Definition 3. (Mutation)

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle mutation λ de $\mathcal{A}$ et on note $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ l'algèbre ayant pour espace vectoriel sous-jacent $\mathcal{A}$ et pour produit $x \overset{\lambda}{\odot} y = \lambda xy + (1 - \lambda)yx$.

Definition 4. (Isotopie)

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre et soient $\varphi, \psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ deux applications linéaires bijectives. On définit sur l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ un nouveau produit en posant $x \odot y = \varphi(x)\psi(y)$ pour tous $x, y \in \mathcal{A}$. L'algèbre $(\mathcal{A}, \odot)$ ainsi obtenue est dite isotope de $\mathcal{A}$ qu'on note $\mathcal{A}_{\varphi,\psi}$. Notons que $\mathcal{A}_{\varphi,\psi}$ est de division si et seulement si $\mathcal{A}$ est de division. L'algèbre $\overset{*}{\mathbb{C}}$ est isotope à $\mathbb{C}$. ∎

Definitions 5

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre à élément unité e.

1. $\mathcal{A}$ est dite quadratique si pour tout $x \in \mathcal{A}$ les éléments e, x, x^2 sont liés. C'est le cas pour l'algèbre réelle $M_2(\mathbb{R})$: $M^2 - tr(M)M + det(M)I_2 = 0$. $\mathcal{A}$ s'obtient à partir d'une algèbre anti-commutative $(V, \wedge)$ munie d'une forme bilinéaire $(.,.)$ en définissant sur le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathbb{K}e \oplus V$ le produit
$$(\alpha e + u)(\beta e + v) = \Big(\alpha\beta + (u, v)\Big)e + \Big(\alpha v + \beta u + u \wedge v\Big).$$
$(V, \wedge)$ est dite l'algèbre anti-commutative associée à $\mathcal{A} = \mathbb{K}e \oplus V$ et $(.,.) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ $(\alpha + x, \beta + y) \mapsto \alpha\beta + (x, y)$ est dite la forme bilinéaire associée à $\mathcal{A}$. On notera $(V, \wedge, (.,.))$ l'algèbre quadratique $\mathcal{A}$.

2. $\mathcal{A}$ est dite cayleyenne si elle est munie d'une involution $\sigma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ $x \mapsto \overline{x}$ telle que $x + \overline{x}, x\overline{x} \in \mathbb{K}e$.

Definition 6. (Procédé de Cayley-Dickson)

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre réelle cayleyenne munie de son involution cayleyenne $\sigma_{\mathcal{A}} : x \mapsto \overline{x}$. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ du produit :

$$(x, y)(x', y') = (xx' - \overline{y'}y, y\overline{x'} + y'x).$$

L'algèbre obtenue est cayeyenne dite extension cayleyenne de $\mathcal{A}$ notée $E(\mathcal{A})$. Elle munie de son involution cayleyenne $\sigma_{E(\mathcal{A})} : (x, y) \mapsto (\overline{x}, -y)$.

Examples 1

En partant de l'algèbre réelle cayeleyenne $\mathbb{R}$ *munie de son involution cayleyenne* $\sigma_{\mathbb{R}} = I_{\mathbb{R}}$ *on ontient :*

1. *l'algèbre réelle* $E(\mathbb{R}) = \mathbb{C}$ *des nombres complexes munie de sa conjugaison cayleyenne standard* $\sigma_{\mathbb{C}}$*,*
2. *l'algèbre réelle* $E(\mathbb{C}) = \mathbb{H}$ *des quaternions munie de son involution cayleyenne* $\sigma_{\mathbb{H}}$*,*
3. *l'algèbre réelle* $E(\mathbb{H}) = \mathbb{O}$ *des octonions munie de son involution cayleyenne* $\sigma_{\mathbb{O}}$*.*

Les algèbres réelles $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ *sont de division de dimension* $1, 2, 4, 8$ *respectivement. Seules* $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ *sont associatives et commutatives,* $\mathbb{H}$ *est associative mais non commutative,* $\mathbb{O}$ *est alternative mais non associative et non commutative.*

Theorem 1. (FROBENIUS 1878)

$\{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ classifie les algèbres réelles **associatives** de division.

FROBENIUS Georg Ferdinand
1849-1917

Theorem 2. (ZORN 1931)

$\{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ classifie les algèbres réelles **alternatives** de division.

Max Zorn
(1906 - 1993)

Theorem 3. (HOPF 1940)

La dimension d'une algèbre réelle de division est une puissance de 2. Elle est ≤ 2 si de plus l'algèbre est commutative.

Heinz Wilhelm Hopf
(1894 - 1971)

Theorem 4. (SEGRE 1954)

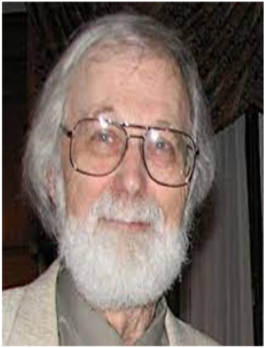
Toute algèbre réelle de division contient au moins un idempotent non nul.

Beniamino Segre
1903-1977

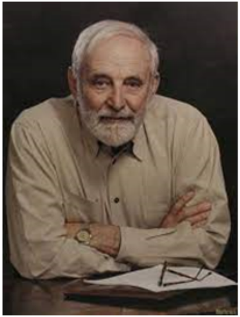
Theorem 5. (KERVAIRE-MILNOR-BOTT 1958)

Si l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit sans diviseurs de zéro alors $n = 1, 2, 4$ ou 8.

Michel Kervaire
1927-2007



John Milnor
1931 -
Prix Abel 2011



Raoul Bott
1926-2005
Prix Oswald Veblen en géométrie de l'AMS (1964)
Prix Jeffery-Williams de la SM du Canada (1983)
National Medal of Science (1987)
Prix Wolf de mathématiques (2000)
Membre étranger de la Royal Society (2005)

Theorem 6. (YANG 1981-PETRO 1987)

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre réelle ***unitaire*** de division de dimension ≥ 2. Alors $\mathscr{A}$ contient une sous-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$.

Chung-Tao Yang

Chung Tao Yang
1923 – 2005

Open problem 1

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre réelle de division de dimension ≥ 2 à idempotent non nul central. Est ce que $\mathcal{A}$ contient une sous-algèbre de dimension 2 ?

Theorem 7

Les algèbres réelles quadratiques flexibles de division de dimension ≤ 4 sont à isomorphisme près $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}^{(\lambda)}$ où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. De plus, $\mathbb{H}^{(\lambda)} \simeq \mathbb{H}^{(\mu)}$ *($\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$)* si et seulement si $\lambda = \mu$ ou $\lambda = 1 - \mu$.

Theorem 8. (DE LOS SANTOS-CUENCA-KAIDI-ROCHDI 1999)

Les algèbres réelles quadratiques flexibles de division de dimension 8 s'obtiennent, à partir de l'algèbre réelle $\mathbb{O} = \big(W, (.|.), \wedge\big)$ de Cayley-Dickson, par isotopie vectorielle et sont à isomorphisme près $\mathbb{O}(s)$ où s est un automorphisme symétrique de l'espace euclidien $\big(W, -(.|.)\big)$, défini positif. De plus, $\mathbb{O}(s') \simeq \mathbb{O}(s)$ *(s et s' étant deux automorphismes symétriques de l'espace euclidien $\big(W, -(.|.)\big)$, définis positifs)* si et seulement si il existe $f \in Aut(\mathbb{O})$ tel que $\tilde{s}' = f^{-1}\tilde{s}f$.

Open problem 2

Fournir une classification des algèbres réelles de division à idempotent non nul central qui satisfont à $(x^2, y^2, x^2) = 0$.

Theorem 9. (DARPÖ-ROCHDI 2011)

Toute algèbre réelle à puissances commutatives de division de dimension 4 s'obtient à partir d'une algèbre quadratique par isotopie plane.

$$
\begin{array}{rcl}
\textbf{Associative} & \rightarrow & \mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H} \\
 & \Downarrow & \\
\textbf{Alternative} & \rightarrow & \mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H},\ \mathbb{O} \\
 & \Downarrow & \\
\textbf{Flexible et à P. Associatives} & \rightarrow & \mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H}^{(\lambda)},\ \mathbb{O}(s) \\
 & \swarrow \quad \searrow &
\end{array}
$$

Flexible (complètement) **P. A.** $\rightarrow$ **1, 2, 4 et p. en dim 8**

$$\searrow \quad \swarrow$$

P. Commutatives $\rightarrow$ **uniquement en dim 1, 2, 4**

$$\Downarrow$$

P. 3-associatives $\rightarrow$ **en dim 1, 2 et p. en dim 4.**

Abraham Adrian Albert
1905 – 1972

Susumu Okubo
1930 - 2015

Georgia McClure Benkart

1949 -

Contribution à la classification des algèbres de Lie modulaires simples

Ángel Rodríguez Palacios

Bibliographie

- **[A 47]** A. A. Albert, *Absolute valued real algebras.* Ann. Math. **48** (1947), 495-501.
- **[B 01]** J. C. Baez, *The octonions.* Bulletin (New Series) of the AMS **39** (2) (2001), 145-205.
- **[BM 58]** R. Bott and J. Milnor, *On the parallelizability of the spheres.* Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 87-89.
- **[CKMMRR 11]** A. Calderón, A. Kaidi, C. Martín, A. Morales, M. Ramírez, and A. Rochdi, *Finite dimensional absolute valued algebras.* Israel J. Math. **184** (2011), 193-220.
- **[CR 08]** A. Chandid, and A. Rochdi, *A survey on absolute valued algebras satisfying* $(x^i, x^j, x^k) = 0$. Int. J. Algebra, **2** (2008), 837-852.

- **[Cu 92]** A. Cuenca Mira, *On one-sided division infinite-dimensional normed real algebras.* Publicacions Matemàtiques **36** (1992), 485-488.
- **[Cu 06]** J. A. Cuenca, *On composition and absolute valued algebras.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **136A**, (2006) 717-731.
- **[CDKR 99]** J. A. Cuenca, R. De Los Santos Villodres, A. Kaidi, and A. Rochdi, *Real quadratic flexible division algebras.* Linear Algebra Appl. **290**, (1999) 1-22.
- **[Da 06]** E. Darpö, *On the classification of the real flexible division algebras.* Colloq. Math. **105**, (2006) 1-17.
- **[Da-R 11]** E. Darpö, and A. Rochdi, *Classification of the four-dimensional power-commutative real division algebras.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **141** A, 1207-1223, (2011)

[DDLR 16] A. S. Diabang, O. Diankha, M. Ly and A. Rochdi, *A Note on the Real Division Algebras with Non-trivial Derivations.* Int. J. Algebra, **10** (1) (2016), 1-11.

[DDR 16] A. S. Diabang, O. Diankha and A. Rochdi, *On the Automorphisms of Absolute-Valued Algebras.* Int. J. Algebra, **10** (3) (2016), 113-123.

[DDRR 13] O. Diankha, A. Diouf, M. I. Ramírez and A. Rochdi, *Absolute Valued Algebras with One Sided Unit Satisfying* $(x^2, x^2, x^2) = 0$. IJA, **7** (19) (2013), 935-958.

[DDR 13] O. Diankha, A. Diouf and A. Rochdi, *A Brief Statement on the Absolute-valued Algebras with One-sided Unit.* Int. J. Algebra, **7** (17) (2013), 833-838

[DDTR 13] O. Diankha, A. Diouf, M. Traoré and A. Rochdi, *Division Algebras Satisfying* $(x^p x^q)x^r = x^p(x^q x^r)$. Int. J. Algebra, **7** (20), (2013), 959-972.

[DTRR 16] O. Diankha, M. Traoré, M. I. Ramírez, and A. Rochdi, *Four-Dimensional Real Third-Power Associative Division Algebras.* Communications in Algebra, **44** (2016), 3397-3406.

[Die 05] E. Dieterich, *Classification, automorphism groups and categorical structure of the two-dimensional real division algebras.* Journal of Algebra and its applications, **4** (2005), 517-538.

[E 83] M. L. El-Mallah, *Sur les algèbres absolument valuées qui vérifient l'identité* $(x, x, x) = 0$. J. Algebra **80** (1983), 314-322.

[E 87] M. L. El-Mallah, *On finite dimensional absolute valued algebras satisfying* $(x, x, x) = 0$. Arch. Math. **49** (1987), 16-22.

[E 01] M. L. El-Mallah, *Absolute valued algebras satisfying* $(x, x, x^2) = 0$. Arch. Math. **77** (2001), 378-382.

[EE 04] M. L. El-Mallah and M. El-Agawany, *Absolute valued algebras satisfying* $(x^2, x^2, x^2) = 0$. Comm. Algebra **32** (2004), 3537-3541.

[EERR 06] M. L. El-Mallah, H. Elgendy, A. Rochdi and Á. Rodríguez Palacios. *On absolute valued algebras with involution.* Linear Algebra and its Applications **414** (2006), 295-303.

[Ho 40] H. Hopf, *Ein topologischer beitrag zur reellen algebra.* Comment. Math. Helvet. (1940), 219-239.

[HP 04] M. Hübner and H. P. Petersson, *Two-dimensional real division algebras revisited.* Beiträge Algebra Geom., **45**, (2004) 29-36.

[Ke 58] M. Kervaire, *Non-parallelizability of the n−Sphere for $n > 7$.* Proc. Nat. Acad. Sci. Usa **44** (1958), 280283.

[Ok 78] S. Okubo, *Pseudo-quaternion and pseudo octonion algebras.* Hadronic J. **1** (1978), 1250-1278.

[On 02] Á. Oneto, Alternative Real Division Algebras of Finite Dimension. Divulgaciones Matem¶aticas **10** (2) (2002), 161-169.

[P 87] J. Petro, *Real division algebras of dimension* > 1 *contain* $\mathbb{C}$. Amer. Math., (1987) 445-449.

[Roc 03] A. Rochdi, *Eight-dimensional real absolute valued algebras with left unit whose automorphism group is trivial.* IJMMS **70**, (2003) 4447-4454.

[RR 09] A. Rochdi and Á. Rodríguez Palacios. *Absolute valued algebras with involution.* Comm. Algebra, **37** (4) (2009), 1151-1159.

[Rod 92] Á. Rodríguez Palacios, *One Sided Division Absolute Valued Algebras.* Publicacions Matemàtiques **36** (1992), 925-954.

[Rod 93] Á. Rodríguez Palacios, *Números Hipercomplejos en Dimensión Infinita.* Discurso de ingreso en la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada, Granada, 1993.

[Rod 04] Á. Rodríguez Palacios, *Absolute valued algebras, and absolute valuable Banach spaces.* Advanced courses of

[Rod 04] Á. Rodríguez Palacios, *Absolute valued algebras, and absolute valuable Banach spaces.* Advanced courses of mathematical analysis I, 99-155, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2004).

[Se 54] B. Segre, *La teoria delle algebre ed alcune questione di realta.* Univ. Roma, Ist. Naz. Alta. Mat., Rend. Mat. E Appl. Serie 5, **13** (1954), 157-188.

[UW 60] K. Urbanik and F. B. Wright, *Absolute valued algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 861-866.

[Wr 53] F. B. Wright, *Absolute valued algebras.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **39** (1953), 330-332.

[Y 81] C. T. Yang, *Division algebras and fibrations of spheres by great spheres.* Journal of Differential Geometry, V **16** N 4, (1981) 577-593.

[Z 31] M. Zorn, *Theorie der alternativen Ringe.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. **8**, (1931), 123-147.