Géométrie des variétés de Fedosov (Groupes de Fedosov canonique)

Mansouri Mohammed Wadia
Université Ibn Tofail. Kénitra

31-10-2020

Plan

I Connexions Symplectiques

- Existence et non unicité
- courbures symplectique
  - Tenseur de courbure symplectique
  - Tenseur de Ricci symplectique
  - Courbure sectionnelle
  - La $Sp(n)$-Décomposition des tenseurs de courbure

II algèbre de Fedosov canonique

- algèbre de Lie symplectique
- Connexions de Fedosov canonique
- La courbure d'une algèbre de Fedosov canonique

Introduction

1) Dans une variété riemannienne, il existe une unique connexion (de Levi-Civita), sans torsion compatible avec la métrique. La courbure de la connexion de Levi-Civita, apparaît comme une obstruction à l'unicité d'un modèle local. Les courbures de la connexion de Levi-Civita classifient localement les variétés riemanniennes.

2) Sur une variété symplectique (M, ω), il existe une infinité de connexions sans torsion qui laissent ω parallèle. (Tondeur a donné une formule générale pour toutes les connexions symplectiques). Dans le cadre symplectique, l'intérêt des connexions symplectiques est focalisé sur leurs utilisations dans la quantification de la déformation au sens de Fedosov. Certains auteurs étudient la géométrie des connexions symplectiques dans l'esprit de la géométrie riemannienne classique (Vaisman, Lichnerowicz, M. Cahen, S. Gutt, Gelfand, V. Retakh, M. Shubin, J.F.Fox...)

Connexions Symplectiques

Connexions Symplectiques, Existence et non unicité

Une variété presque-symplectique (M, ω) est une variété munie d'une 2-forme non-dégénérée ω. Si en plus, ω est fermée (i.e $d\omega = 0$) on dit que la variété (M, ω) est symplectique.

Définition

Soit (M, ω) une variété presque-symplectique. Une connexion linéaire ∇ est dite une connexion presque-symplectique si ∇ préserve ω i.e :

$$\nabla_Z \omega(X, Y) = Z.\omega(X, Y) - \omega(\nabla_Z X, Y) - \omega(X, \nabla_Z Y) = 0.$$

Lemme (Existence)

Soit $\overset{\circ}{\nabla}$ une connexion linéaire sur M, la connexion donnée par

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \frac{1}{3} N(X, Y) + \frac{1}{3} N(Y, X),$$

est une connexion presque-symplectique. Avec N est le tenseur caractérisé par :

$$\omega(N(X, Y), Z) = \overset{\circ}{\nabla}_X \omega(Y, Z) \qquad (\star).$$

Remarquons que :
ω est antisymétrique $\Longrightarrow \omega(N(X,Y),Z) = -\omega(N(X,Z),Y)$
ω est fermé $\Longrightarrow \oint \omega(N(X,Y),Z) = 0$.

Lemme (Non unicité)

Soit ∇ une connexion presque-symplectique, une connexion $\overset{1}{\nabla}$ est presque-symplectique si et seulement si le $(2,1)$-tenseur A donné par

$$A(X,Y) = \overset{1}{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

vérifie :

$$\omega(A(X,Y),Z) = \omega(A(X,Z),Y). \quad (\star)$$

Posons $B(X,Y,Z) = \omega(A(X,Y),Z)$
la condition $(\star)$ est équivalente à

$$B(X,Y,Z) = B(X,Z,Y),$$

on dira que le 3-tenseur B est complètement symétrique.

En effet, on a

$$\overset{1}{\nabla}_X\omega(Y,Z) = 0 \iff X.\omega(Y,Z) - \omega(\overset{1}{\nabla}_X Y, Z) - \omega(Y, \overset{1}{\nabla}_X Z) = 0$$
$$\iff X.\omega(Y,Z) - \omega(A(X,Y) + \nabla_X Y, Z) - \omega(Y, A(X,Z) + \nabla_X Z) = 0$$
$$\iff \omega(A(X,Y),Z) = \omega(A(X,Z),Y).$$

Lemme

Si une variété presque-symplectique (M,ω), admet une connexion presque symplectique sans torsion alors $d\omega = 0$.

En effet, Le tenseur de torsion T d'une connexion presque-symplectique ∇ est lié à la dérivée extérieure de ω par la formule

$$d\omega(X,Y,Z) = \omega(T(X,Y),Z) + \omega(T(Y,Z),X) + \omega(T(Z,X),Y)$$

qui découle de la compatibilité de ω et ∇ et de la somme des permutations cycliques de

$$\omega(T(X,Y),Z) = \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(\nabla_Y X, Z) - \omega([X,Y],Z).$$

Connexions Symplectiques

Définition

Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Une connexion symplectique est une connexion linéaire ∇ sans torsion qui préserve ω.

Théorème

Sur une variété symplectique (M, ω), Il existe toujours des connexions symplectiques. L'espace des connexions symplectiques est un espace affine modélisé par l'espace des 3-tenseurs symétriques et complètement symétriques $\Gamma(S^3 TM)$.

Définition

Une variété de Fedosov est une variété symplectique (M, ω, ∇) munie d'une connexion symplectique.

Tenseur de courbure symplectique

Soit (M, ω, ∇) une variété de Fedosov, on considère l'opérateur de courbure associé à ∇ :

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Par analogie avec le cas Riemannien, on définit :

Définition

Soit (M, ω, ∇) une variété de Fedosov, le tenseur de courbure symplectique est le $(4, 0)$-tenseur défini par

$$S(X, Y, Z, W) = \omega(R(X, Y)Z, W).$$

Proposition

Le tenseur de courbure symplectique a les propriétés suivantes :

1. $S(X, Y, Z, W) = -S(Y, X, Z, W)$
2. $S(X, Y, Z, W) + S(Y, Z, X, W) + S(Z, X, Y, W) = 0.$
3. $S(X, Y, Z, W) = S(X, Y, W, Z).$

En effet, posons

$$A = S(X,Y,Z,W) - S(X,Y,W,Z) \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} A &= \omega(R(X,Y)Z,W) - \omega(R(X,Y)W,Z) \\ &= \omega(\nabla_X\nabla_Y Z,W) - \omega(\nabla_Y\nabla_X Z,W) - \omega(\nabla_{[X,Y]}Z,W) - \omega(\nabla_X\nabla_Y W,Z) \\ &\quad +\omega(\nabla_Y\nabla_X W,Z) + \omega(\nabla_{[X,Y]}W,Z) \end{aligned}$$

en se basant sur le fait que $\nabla\omega = 0$ on a :

$$XY\omega(Z,W) = \omega(\nabla_X\nabla_Y Z,W)+\omega(\nabla_Y Z,\nabla_X W)+\omega(\nabla_X Z,\nabla_Y W)+\omega(Z,\nabla_X\nabla_Y W)$$
$$YX\omega(Z,W) = \omega(\nabla_Y\nabla_X Z,W)+\omega(\nabla_X Z,\nabla_Y W)+\omega(\nabla_Y Z,\nabla_X W)+\omega(Z,\nabla_Y\nabla_X W)$$

$$[X,Y]\omega(Z,W) = \omega(\nabla_{[X,Y]}Z,W) + \omega(Z,\nabla_{[X,Y]}W).$$

on trouve

$$A = (XY - YX - [X,Y])\omega(Z,W) = 0. \qquad \square$$

- Remarquons que, le tenseur de courbure symplectique vérifie aussi l'identité de Bianchi suivante :

$$S(X,Y,Z,W) + S(Y,Z,W,X) + S(Z,W,X,Y) + S(W,X,Y,Z) = 0.$$

Tenseur de Ricci symplectique

Soit (M, ω) une variété symplectique, sur $E = T_x M$, fixons une base de Darboux $\{(e_i, \overline{e_i})_{1 \leq i \leq n}\}$:

$$\omega_x(e_i, e_j) = \omega_x(\overline{e_i}, \overline{e_j}) = 0 \quad \text{et} \quad \omega_x(e_i, \overline{e_j}) = \delta_{i,j}$$

Notons $\{(e_i^*, \overline{e_i}^*)_{1 \leq i \leq n}\}$ sa base duale, remarquons que pour $X \in E$:

$$e_i^*(X) = \omega(X, \overline{e_i}) \quad \text{et} \quad \overline{e}_i^*(X) = -\omega(X, e_i).$$

Si A est un endomorphisme de E sa trace est donnée par

$$\begin{aligned} tr(A) &= \sum_{i=1}^n e_i^*(A(e_i)) + \sum_{i=1}^n \overline{e}_i^*(A(\overline{e}_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n (\omega_x(A(e_i), \overline{e}_i) - \omega_x(A(\overline{e}_i), e_i)). \end{aligned}$$

Définition

La courbure de Ricci symplectique ou tenseur de Ricci symplectique d'une variété de Fedosov (M, ω, ∇) est le 2-tenseur

$$ric(X, Y) = tr(Z \longmapsto R(Z, X)Y).$$

Si $\{(e_i, \overline{e_i})_{1 \leq i \leq n}\}$ est une base de Darboux de $T_x M$, alors

$$ric_x(X, Y) = \sum_{i=1}^n (S(e_i, X, Y, \overline{e}_i) - S(\overline{e}_i, X, Y, e_i)).$$

Proposition

Le tenseur de Ricci d'une variété de Fedosov (M, ω, ∇) est symétrique.

En effet, notons, $\rho : Z \longmapsto R(X, Y)Z$, on a :

$$\begin{aligned} tr(\rho(X,Y)) &= \sum_{i=1}^{n} e_i^*(\rho(X,Y)(e_i)) + \sum_{i=1}^{n} \overline{e}_i^*(\rho(X,Y)(\overline{e}_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\omega_x(R(X,Y)(e_i), \overline{e}_i) - \omega_x(R(X,Y)(\overline{e}_i), e_i)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dans le cadre symplectique l'analogue du tenseur scalaire est nul :

Proposition

Soit M une variété de Fedosov, la trace de l'endomorphisme de Ricci est toujours nulle.

En effet, soit $\overline{r}$ l'endomorphisme associé canoniquement au tenseur de Ricci : $ric(X, Y) = \omega(\overline{r}(X), Y)$. On a

$$\begin{aligned} tr(\overline{r}) &= \sum_{i=1}^{n}(e_i^*(\overline{r}(e_i) + \overline{e}_i^*(\overline{r}(\overline{e}_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\omega(\overline{r}(e_i), \overline{e}_i) - \omega(\overline{r}(\overline{e}_i), e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(ric(e_i, \overline{e}_i) - ric(\overline{e}_i, e_i)) = 0. \end{aligned}$$

• Il existe des exemples de variétés symplectiques où il y a un choix naturel d'une connexion symplectique unique, (préservant quelques données supplémentaires) : Variétés de Pseudo-Kahlerienne, Variétés para-Kahler...

• Bourgeois et Cahen ont introduit une règle pour sélectionner des connexions symplectiques (Principe variationnel). (Nous allons prendre les équations liées à ce principe variationnel comme définition)

Définition

Une variété de Fedosov (M, ω, ∇) est dite préférée si son tenseur de Ricci verifie :

$$\oint (\nabla_X ric)(Y, Z) = 0.$$

Courbure sectionnelle symplectique

La courbure sectionnelle symplectique, a été définie par Gelfand, Retakh et Shubin (1998) et étudiée par D. Fox.(2016). Soient (M, ω, ∇) une variété de Fedosov, $x \in M$ et $\mathcal{P}$ un plan de T_xM (dit plan tangent à la variété M en x), le plan tangent $\mathcal{P}$ est dit symplectique si la restriction de ω à $\mathcal{P}$ est non dégénérée. On note par $SGr(2, TM) \subset Gr(2, TM)$ sur l'ensemble (ouvert) des plans tangents symplectiques. Pour $Z \in T_xM$ et $\mathcal{P} = Vect(X, Y)$ il est facile de voir que la quantité $\frac{\omega(R(X,Y)Z,Z)}{\omega(X,Y)}$, ne dépend pas du choix de X et Y.

définition

La courbure sectionnelle symplectique du plan $\mathcal{P}$ au point x est la forme quadratique donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_x\mathcal{P} : P \subseteq T_xM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Z &\longmapsto \frac{\omega(R(X,Y)Z,Z)}{\omega(X,Y)}. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{P} \in SGr(2, T_xM)$, nous pouvons choisir X, Y, qui engendrent $\mathcal{P}$ de sorte que $\mathcal{K}_x\mathcal{P}$ est l'une des formes canoniques suivantes :

$$\begin{array}{ll} r(z_1^2 + z_2^2) & r \in \mathbb{R} \\ r(z_1^2 - z_2^2) & r > 0 \\ \pm z_1^2. & \end{array}$$

Définition

La courbure sectionnelle symplectique d'une variété de Fedosov M est la fonction :

$$P \longmapsto \{\text{La forme canonique de} \, \mathcal{K}_x\mathcal{P}\},$$

défini sur l'ensemble $SGr(2, TM)$.

Définition

Une variété de Fedosov (M, ω, ∇) a une courbure sectionnelle symplectique positive (resp. négative, non négative, etc.) si pour tout $x \in M$ et tout $\mathcal{P} \in SGr(T_xM)$, la courbure sectionnelle symplectique du plan $\mathcal{P}$, est définie positive (resp. définie négative, définie non négative, etc.).

Définition, Fox

Une variété de Fedosov (M, ω, ∇) a une courbure sectionnelle symplectique constante s'il existe un 2-tenseur symétrique parallèle A, tel que pour tout $x \in M$ et tout $\mathcal{P} \in SGr(2, T_xM)$, on a :

$$\mathcal{K}_x\mathcal{P}(Z) = A(Z, Z) \qquad \forall Z \in \mathcal{P}.$$

Théorème, Fox

La courbure sectionnelle symplectique est constante si et seulement si la connexion symplectique est de type de Ricci avec un tenseur de Ricci parallèle.

Groupes de Fedosov canonique

Définition

Un groupe de Lie G est dit groupe symplectique, s'il existe sur G une 2-forme différentielle ω^+ symplectique invariante à gauche.

Au niveau de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe de Lie G, on a :

Définition

Une algèbre symplectique $(\mathfrak{g}, \omega)$ est une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ munie d'une 2-forme non-dégénérée qui vérifie la condition de 1-cocycle :

$$\oint \omega([x, y], z) = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Définition

Une algèbre de Frobenius $(\mathfrak{g}, d\nu)$ est la donnée d'une 1-forme ν tel que

$$\omega(x, y) = \nu([x, y]) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

soit non-dégénérée.

Groupes de Fedosov canonique

Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique. Il est bien connu que $\mathfrak{g}$ peut étre munie d'un produit symétrique à gauche défini par la formule

$$\omega(x.y, z) = -\omega(y, [x, z]).$$

(i.e., $ass(x, y, z) = ass(y, x, z)$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$, avec

$$ass(x, y, z) = (x.y).z - x.(y.z)).$$

Géométriquement, ceci signifie que le groupe de Lie symplectique (G, ω^+) est muni d'une structure affine invariante à gauche donnée par $\dot{\nabla}_{x^+} y^+ = (x.y)^+$. Notons par $L_x : y \longmapsto x.y$ et $R_x : y \longmapsto y.x$.

Lemme

1. $L_x - R_x = ad_x$
2. $\omega(x.y, z) = \omega(x, z.y)$ et $\oint \omega(x.y, z) = 0$
3. $tr(ad_x) = -tr(L_x) = -\frac{1}{2} tr(R_x)$
4. $tr(R_x \circ R_y) = tr(R_{x.y})$.
5. $tr(R_x \circ L_y) = tr(L_{x.y})$ et $tr(ad_x \circ ad_y) = tr(L_x \circ L_y)$.

Notons que la connexion $\dot{\nabla}$ est symplectique si et seulement si G est un groupe abélien. Il est facile de vérifier que

$$\dot{\nabla}_{x^+}\omega^+(y^+, z^+) = \omega^+(-\dot{\nabla}_{y^+}x^+, z^+).$$

Donc $N(x^+, y^+) = -\dot{\nabla}_{y^+}x^+ = -(y.x)^+$ et

$$\nabla_{x^+}y^+ := \frac{2}{3}\dot{\nabla}_{x^+}y^+ - \frac{1}{3}\dot{\nabla}_{y^+}x^+$$

est une connexion symplectique. La connexion ∇ ne dépend que du groupe de Lie et de ω, il semble raisonnable de l'appeler connexion symplectique canonique du groupe de Lie symplectique (G, ω).

Définition

Une algèbre de Fedosov canonique $(\mathfrak{g}, \omega, \nabla)$ est une algèbre de Lie symplectique (G, ω) munie de la connexion symplectique canonique :

$$\begin{aligned}\nabla_x &= \frac{2}{3}L_x - \frac{1}{3}R_x \\ &= \frac{1}{3}(ad_x + L_x).\end{aligned}$$

La courbure d'une algèbre de Fedosov

Proposition

La courbure d'une algèbre de Fedosov canonique $(\mathfrak{g}, \omega, \nabla)$ est donnée par :

$$K(x, y) = -\frac{1}{9}[R_x, R_y] - \frac{2}{9}L_{[x,y]} + \frac{1}{9}R_{[x,y]}.$$

Corollaire

L'algèbre de Fedosov canonique $(\mathfrak{g}, \omega, \nabla)$ est plate si

$$[R_x, R_y] = R_{[x,y]} - 2L_{[x,y]}.$$

Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique et $H \in \mathfrak{g}$ l'élément défini par $\omega(H, x) = tr(ad_x) = -tr(L_x)$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, par définition, H est nul si et seulement si g est unimodulaire. Notons par B la forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

La courbure de Ricci d'une algèbre de Fedosov

Proposition

La courbure de Ricci d'une algèbre de Fedosov canonique est donnée par :

$$\begin{aligned} ric(x,y) &= \tfrac{5}{9}B(x,y) - \tfrac{4}{9}tr(ad_x \circ L_y) + \tfrac{1}{3}\omega(ad_H x, y) \\ &= \tfrac{1}{9}(B(x,y) - \omega(ad_H x, y)) \\ &= \tfrac{1}{9}(B(x,y) + tr(L_{x.y})) \text{ (Alekseevsky)} \end{aligned}$$

Corollaire

L'opérateur de Ricci d'une algèbre de Fedosov canonique est donné par :

$$Ric = \tfrac{1}{9}(b - ad_H).$$

Avec, b est l'endomorphisme défini par $\omega(bx,y) = B(x,y)$.

Corollaire

- Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente $ric(x,y) = 0$.
- Si $\mathfrak{g}$ est unimodulaire $ric(x,y) = \frac{1}{9}B(x,y)$ et $Ric = \frac{1}{9}b$.

La dimension deux

Soit $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, l'algèbre de Lie de dimension deux des transformations affines de la droite. Il existe une base $\{e_1, e_2\}$ tel que $[e_1, e_2] = e_2$. $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ supporte une structure kählérienne donnée par $\omega(e_1, e_2) = 1$ et $Je_1 = e_2$. Alors on a :

La connexion symplectique canonique :

$$\nabla_{e_1} e_1 = -\frac{1}{3} e_1, \ \nabla_{e_1} e_2 = \frac{1}{3} e_2, \ \nabla_{e_2} e_1 = -\frac{2}{3} e_2,$$

La courbure symplectique :

$$R(e_1, e_2) e_1 = \frac{2}{9} e_2.$$

Le tenseur et l'opérateur de Ricci :

$$ric(e_1, e_1) = -\frac{2}{9}, \quad Ric = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 \end{bmatrix}.$$

La courbure sectionnelle :

$$\mathcal{K}_\epsilon \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) = -\frac{2}{9} x^2.$$

La connexion ∇ n'est ni préférée ni kählérienne.

Parmi les 17 algébres de Lie sympléctiques, la structure de Fedosov canonique est :

• Plate pour $(\mathfrak{rh}_3, e^{14} + e^{23})$.

• Ricci Plate pour $\mathfrak{rh}_3$, $\mathfrak{n}_4$, $\mathfrak{d}'_{4,0,1}$ et $\mathfrak{d}'_{4,\frac{2\sqrt{7}}{7}}$.

(On remarque que les algèbres de Fedosov $\mathfrak{d}'_{4,0,1}$ et $\mathfrak{d}'_{4,\frac{2\sqrt{7}}{7}}$ sont des contres exemples d'une algèbre de Fedosov Ricci plate non nilpetente. Sur une algèbre de Fedosov Ricci plate n'implique pas que la courbure est Plate.)

• L'opérateur de Ricci sur une algèbre de Fedosove de dimension quatre est au plus 2-nilpetent.

• Les algèbres dont la connexion canonique est préférée sont $\mathfrak{rh}_3$, $\mathfrak{rr}_{3,-1}$, $\mathfrak{rr}'_{3,0}$, $\mathfrak{n}_4$, $\mathfrak{r}_{4,-1,0}$, $\mathfrak{r}_{4,0,1}$ et $\mathfrak{d}_{4,\frac{\sqrt{7}}{2}}$.

La dimension six

• Parmi les 25 algèbres de Lie de Fedosov nilpotentes, les algèbres de Fedosov Plates sont :

$$L^3_{6,13},\ L_{6,18},\ L_{6,23},\ L_{6,24},\ L_{6,25}$$

L'algèbre de lie $L_{6,13}$ peut supportée une structure de Fedosov plate et une structure de Fedosov non plate.

• L'algèbre de Lie symplectique, double extention symplectique de $\mathfrak{rh}_3$ suivant (φ, λ) avec $(\varphi(e_1) = 2e_1,\ \varphi(e_2) = -e_2,\ \varphi(e_3) = e_3,$ $\varphi(e_4) = -2e_4$ et $\lambda = 0)$, n'est pas plate.

$$[e_1, e_5] = 2e_1,\ [e_2, e_5] = -e_2,\ [e_3, e_5] = e_3,\ [e_4, e_5] = -2e_4$$

$$\omega = e^{14} + e^{23} + e^{56}.$$

L'opérateur de Ricci est 2-nilpetent.

• Dans $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}^2) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{r}_3$. L'opérateur de Ricci est 4-nilpetent.

• Soit l'algèbre de Lie symplectique irréductible de dim=6 donnée par $[e_5, e_1] = -e_2,\ [e_5, e_2] = e_1,\ [e_6, e_3] = -e_4,\ [e_6, e_4] = e_3$ et $\omega = e^{12} + e^{34} + e^{56}$. Alors les valeurs propres non nulles de l'opérateur de Ricci sont $\mp\frac{2}{9}i$.

Définition

Soient $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre symplectique et J un idéal.

- J est dit idéal isotrope si $J \subseteq J^{\perp}$.
- J est dit idéal isotrope normal si J est un idéal isotrope dont l'orthogonal $J^{\perp}$ est un idéal.
- J est dit idéal Lagrangien si J est un isotrope maximal.

- Idéal J est un idéal isotrope si et seulement si $\omega_{|_J} = 0$. En particulier tout idéal de dimension 1 est isotrope.

Lemme

Soit J un idéal de $\mathfrak{g}$. Alors

1. Si J est un idéal isotrope alors J est abélien.
2. L'orthogonal $J^{\perp}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.
3. L'orthogonal $J^{\perp}$ est un idéal si et seulement si $[J^{\perp}, J] = 0$.

La réduction symplectique

Soient $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique et $J \subset \mathfrak{g}$ un idéal isotrope. L'orthogonal $J^\perp$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ qui contient J, la forme symplectique ω passe au quotient et définie une structure symplectique sur l'algèbre de Lie quotient $\overline{\mathfrak{g}} = J^\perp / J$.

Définition

- L'algèbre symplectique $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ est appelée la réduction symplectique de $(\mathfrak{g}, \omega)$ par rapport à l'idéal isotrope J.
- Si en plus J est un idéal isotrope normal, la réduction symplectique est dite normale.

Nous distinguons plusieurs sous cas de la réduction :

- La réduction Lagrangienne, si l'idéal J est Lagrangien, dans ce cas, $J^\perp = J$ et $\overline{\mathfrak{g}} = \{0\}$.
- La réduction centrale, si J est central. Dans ce cas, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset J^\perp$. Il est clair qu'une réduction centrale est normale.
- La réduction de codimension un, si J est unidimensionnel.

Définition

Une algèbre symplectique $(\mathfrak{g}, \omega)$ est dite symplectiquement irréductible, si elle ne peut pas être réduite symplectiquement, c'est-à-dire si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal isotrope non trivial.

- De même, si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal normal (res, central) non trivial, on parle d'une irréductibilité normale (res, centrale).

exemple

1. Toute algèbre de Lie symplectique qui admet un idéal de dimension un (en particulier si l'algèbre de Lie est complètement résoluble) se réduit symplectiquement.
2. Toute algèbre de Lie symplectique qui admet un élément central se réduit normalement.

- Une algèbre de Lie symplectique contient un ideal abelien non trivial qui est symplectique ou isotrope.
- Une algèbre de Lie symplectique est soit irréductible (ne contenant pas d'ideal isotrope), soit se réduit par une suite de réductions symplectiques à une algèbre de Lie symplectique irréductible.
- Une algèbre de Lie symplectique qui ne contient pas d'ideal abelien isotrope est un produit semi direct de son ideal dérivé qui est abelien et de son orthogonal qui est une sous-algèbre abelienne. De plus l'ideal dérivé est la somme directe orthogonale d'ideaux de dimension 2.

Algèbre de Fedosov irréductible

Soit $(\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{a}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique irréductible. Il existe une base $\{f_1, ..., f_{2h}, e_1^1, e_2^1, ..., e_1^m, e_2^m\}$ telle que : $\mathfrak{h} = \langle f_1, ..., f_{2h} \rangle$ et $\mathfrak{a} = \langle e_1^1, e_2^1 \rangle \oplus ... \oplus \langle e_1^m, e_2^m \rangle$, $m \geq 2h$ avec,

$$[f_i, e_1^k] = -\lambda_k(f_i)e_2^k \text{ et } \quad [f_i, e_2^k] = \lambda_k(f_i)e_1^k.$$
$$\omega = \omega_{|\mathfrak{h}} + \Sigma_k e_1^{*k} \wedge e_2^{*k}.$$

- L'algèbre de Lie symplectique irréductible est unimodulaire, de centre nul et 2-résoluble.
- La forme de Killeng est donnée par $B(f_i, f_i) = -2\Sigma_{k=1}^m \lambda_k^2(f_i)$ et $B(f_i, f_j) = -2\Sigma_{k=1}^m \lambda_k(f_i)\lambda_k(f_j)$.
- L'algèbre de Lie symplectique irréductible supporte une structure kählérienne.

Lemme

Soit $(\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{a}, \omega)$ une algèbre de Fedosov irréductible. Il existe une base $\{e_1, \overline{e_1}, ..., e_h, \overline{e_h}\}$ de $\mathfrak{h}$, tel que le produit symétrique à gauche est donné par

$$\begin{cases} e_1^k.e_1^k = e_2^k.e_2^k = \Sigma_i \lambda_k(e_i)\overline{e_i} - \Sigma_i \lambda_k(\overline{e}_i)e_i \\ e_i.e_1^k = -\lambda_k(e_i)e_2^k, \quad \overline{e}_i.e_1^k = -\lambda_k(\overline{e}_i)e_2^k \\ e_i.e_2^k = \lambda_k(e_i)e_1^k, \quad \overline{e}_i.e_2^k = \lambda_k(\overline{e}_i)e_1^k \end{cases}$$

Théorème

Soit $(\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{a}, \omega)$ une algèbre de Fedosov irréductible. Alors, la connexion canonique est donnée par

$\nabla_{e_i} e_1^k = -\frac{2\lambda_k(e_i)}{3} e_2^k$ et $\nabla_{e_i} e_2^k = \frac{2\lambda_k(e_i)}{3} e_2^k$.

$\nabla_{e_1^k} e_i = \frac{\lambda_k(e_i)}{3} e_2^k$ et $\nabla_{e_2^k} e_i = -\frac{\lambda_k(\overline{e_i})}{3} e_2^k$.

$\nabla_{\overline{e_i}} e_1^k = -\frac{2\lambda_k(\overline{e_i})}{3} e_2^k$ et $\nabla_{e_i} e_2^k = \frac{2\lambda_k(e_i)}{3} e_2^k$.

$\nabla_{e_1^k} \overline{e_i} = \frac{\lambda_k(\overline{e_i})}{3} e_2^k$ et $\nabla_{e_2^k} \overline{e_i} = -\frac{\lambda_k(\overline{e_i})}{3} e_2^k$.

$\nabla_{e_1^k} e_1^k = \nabla_{e_2^k} e_2^k = \frac{1}{3}(\Sigma_i \lambda_k(e_i)\overline{e_i} - \Sigma_i \lambda_k(\overline{e}_i)e_i)$.

- La courbure est donnée par

$K(f_i, e_1^k)f_j = -\frac{1}{9}\lambda_k(f_i)\lambda_k(f_j)e_2^k, \quad K(f_i, e_2^k)f_j = -\frac{1}{9}\lambda_k(f_i)\lambda_k(f_j)e_1^k$
$K(f_i, e_1^k)e_2^k = \frac{1}{9}\lambda_k(f_i)e_1^k.e_1^k, \quad K(f_i, e_2^k)e_1^k = -\frac{1}{9}\lambda_k(f_i)e_1^k.e_1^k$

- L'opérateur de Ricci est donné par :

$$
\mathrm{b}=\begin{pmatrix}
-B(f_2,f_1) & -B(f_2,f_2) & \cdots & -B(f_2,f_{2h}) & 0 & \cdots & 0 \\
B(f_1,f_1) & B(f_1,f_2) & \cdots & B(f_1,f_{2h}) & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-B(f_{2h},f_1) & \cdots & -B(f_{2h},f_{2h-1}) & -B(f_{2h},f_{2h}) & 0 & \cdots & 0 \\
B(f_{2h-1},f_1) & \cdots & B(f_{2h-1},f_{2h-1}) & B(f_{2h-1},f_{2h}) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}.
$$

Lemme

Soit $(\mathfrak{g}_{(a,b,c,d)}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique irréducible de dimension six. Alors il existe une base $\{e_1, ..., e_6\}$ tel que

$[e_5, e_1] = -ae_2$, $[e_5, e_2] = ae_1$, $[e_6, e_1] = -be_2$, $[e_6, e_2] = be_1$
$[e_5, e_3] = -ce_4$, $[e_5, e_4] = ce_3$, $[e_6, e_3] = -de_4$, $[e_6, e_4] = de_3$

et
$$\omega_1 = e^{12} + e^{34} + e^{56}.$$

L'isomorphisme d'alèbre de Lie
$f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$, $f(e_3) = -e_3$, $f(e_4) = e_4$
$f(e_5) = \frac{d}{\delta}e_5 - \frac{c}{\delta}e_6$, $f(e_6) = \frac{b}{\delta}e_5 - \frac{a}{\delta}e_6$ avec $\delta = ad - bc$
vérifie :

$f(\mathfrak{g}_{(a,b,c,d)}) = \mathfrak{g}_{(1,0,0,1)}$ et $\omega_\delta = f_*(\omega_1) = e^{12} - e^{34} - \frac{1}{\delta}e^{56}$.

Les algèbres de Lie symplectique $(\mathfrak{g}_{(1,0,0,1)}, \omega_\delta)$ sont deux à deux non sympléctomorphe car les valeurs propres de l'endomorphisme de Ricci associé sont $\pm i\frac{2}{9}\delta$.

Soient $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{[.,.]})$ une algèbre de Lie,

1. $\alpha \in Z^2(\overline{\mathfrak{g}})$ un 2-cocycle,
2. $\varphi \in Der(\overline{\mathfrak{g}})$ une dérivation,
3. $\lambda \in \overline{\mathfrak{g}}^*$ une forme linéaire

et $\mathfrak{g} =< a > \oplus \overline{\mathfrak{g}} \oplus < b >$ l'espace vectoriel somme directe de $\overline{\mathfrak{g}}$ avec les espaces vectoriels unidimensionnels $< a >$, $< b >$.
On définit une application bilinéaire alternée : $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ par

$$\begin{aligned} [x,y] &= \overline{[x,y]} + \alpha(x,y)b \quad si \;\; x,y \in \overline{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g} \\ [a,x] &= \varphi(x) + \lambda(x)b. \end{aligned}$$

Proposition

La paire $(\mathfrak{g}, [,])$ est une algèbre de Lie si et seulement si

$$\alpha_\varphi = -\partial\lambda$$

où α_φ est le 2-cocycle définie par

$$\alpha_\varphi(x,y) = \alpha(\varphi(x),y) + \alpha(x,\varphi(y)) \quad \forall x,y \in \overline{\mathfrak{g}}.$$

Oxydation symplectique

Définition

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{g}}_{\varphi,\alpha,\lambda}$ est dite oxydation centrale de l'algèbre de Lie $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{[,]})$ par rapport à φ, α et λ.

- Remarquons que b est dans le centre $\mathfrak{g}$.

Proposition

Soit $\overline{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie nilpotente, supposons que la dérivation φ est nilpotente. Alors l'oxydation centrale $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{g}}_{\varphi,\alpha,\lambda}$ est une algèbre de Lie nilpotente.

Oxydation symplectique

Soient $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ une algèbre de Lie symplectique et $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{g}}_{\varphi,\alpha,\lambda}$ l'oxydation centrale par rapport à φ, α et λ. Nous définissons une forme ω non dégénérée sur $\mathfrak{g} =< a > \oplus \overline{\mathfrak{g}} \oplus < b >$ par

1. ω prolonge $\overline{\omega}$
2. $\overline{\mathfrak{g}}^{\perp} =< a, b >$
3. $\omega(a, b) = 1$

Proposition

Soient $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ une algèbre symplectique et $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{g}}_{\varphi,\alpha,\lambda}$ l'oxydation centrale par rapport à φ, α et λ. Alors $(\mathfrak{g}, \omega)$ est une algèbre symplectique, si et seulement si

$$\overline{\omega}_{\varphi} = \alpha,$$

avec $\overline{\omega}_{\varphi}(v, w) = \overline{\omega}(\varphi x, w) + \overline{\omega}(v, \varphi w)$, $v, \ w \in \overline{\mathfrak{g}}$.

- Remarquons que, puisque $[a, x] = \varphi(x) + \lambda(x)b$, alors $\lambda(x) = -\omega([a, x], a)$ pour $x \in \overline{\mathfrak{g}}$.

Oxydation symplectique

Définition

L'algèbre de Lie symplectique $(\mathfrak{g}, \omega) = (\bar{\mathfrak{g}}_{\varphi,\overline{\omega}_\varphi,\lambda}, \omega)$ est appelée l'oxydation symplectique centrale de $(\bar{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ par rapport à φ et λ.

Soient $(\bar{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ une algèbre symplectique et $\varphi \in Der(\bar{\mathfrak{g}})$ une dérivation, nous voulons construire une oxydation symplectique centrale $(\bar{\mathfrak{g}}, \omega)$, à partir de $\overline{\omega}$ et φ. Il est naturel de prendre $\alpha = \overline{\omega}_\varphi$, notons par $\alpha_\varphi = \overline{\omega}_{\varphi,\varphi}$. Alors $[\overline{\omega}_{\varphi,\varphi}] \in H^2(\bar{\mathfrak{g}})$ se présente comme une obstruction à l'existence d'une oxydation symplectique centrale on a alors la

Proposition

Soient $(\bar{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ une algèbre de Lie symplectique et $\varphi \in Der(\bar{\mathfrak{g}})$ une dérivation. Il existe alors une oxydation symplectique centrale si et seulement si la classe de cohomologie $[\overline{\omega}_{\varphi,\varphi}] \in H^2(\bar{\mathfrak{g}})$ est nulle.

Soit $(\mathfrak{g} = \langle a \rangle \oplus \overline{\mathfrak{g}} \oplus \langle b \rangle, \omega)$ l'Oxydation centrale de $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ suivant le couple $(\varphi, \lambda) \in Der(\overline{\mathfrak{g}}) \times \overline{\mathfrak{g}}^*$.

Lemme

Le produit symétrique à gauche de l'algèbre de Lie symplectique $(\mathfrak{g}, \omega)$ exprimé en fonction de celui de $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ (noté $\bar{.}$) et du couple (φ, λ) est donné par

$$\begin{cases} x.y = x\bar{.}y + \overline{\omega}(\varphi x, y)b \\ a.x = -\varphi^* x \\ x.a = -(\varphi + \varphi^*)x - \lambda(x)b \\ a.a = z \end{cases}$$

avec $z \in \overline{\mathfrak{g}}$ donné par $\lambda(x) = \overline{\omega}(z, x)$.

Le produit symétrique à gauche est bien admissible :

$$[x, y] = \overline{[x, y]} + \overline{\omega}(\varphi(x), y)b$$
$$[a, x] = \varphi(x) + \lambda(x)b.$$

Corollaire

Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ l'Oxydation centrale de $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ suivant le couple (φ, λ). Alors la connexion symplectique canonique de $(\mathfrak{g}, \omega)$ est donnée par :

$$\begin{cases} \nabla_x y = \overline{\nabla}_x y + \frac{1}{3}(\overline{\omega}_\varphi(x,y) + \overline{\omega}(\varphi(x), y))b \\ \nabla_x a = -\frac{1}{3}(2\varphi(x) + \varphi^*(x) + 2\lambda(x)b) \\ \nabla_a x = \frac{1}{3}(\varphi(x) - \varphi^*(x) + \lambda(x)b) \\ \nabla_a a = \frac{1}{3}z \end{cases}$$

$$K(x,y)z = 0 \Longleftrightarrow (\varphi + 2\varphi^*)([x,y]) = \varphi^*(y).x - \varphi^*(x).y$$

$$K(x,y)a = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (\varphi^* - \varphi)([x,y]) = \varphi^*(x).y - \varphi^*(y).x \\ \lambda([x,y]) = 2\omega(\varphi\varphi^* y, x) \end{cases}$$

$$K(a,x)y \Longleftrightarrow \begin{cases} (\varphi^* + \varphi)(y.x) = \varphi(y).x - \varphi(x).y + \varphi^*(y).x \\ \lambda([x,y]) = \omega(\varphi\varphi^* y, x) - \lambda(y.x) \end{cases}$$

$$K(a,x)a = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z.x = \varphi^2(x) + \varphi\varphi^*(x) - \varphi^*\varphi(x) + \varphi^{*2}(x) \\ \lambda(\varphi(x)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi^*([x,y]) = 0 \; et \; \lambda(\varphi(x)) = 0 \\ \varphi([x,y]) = \varphi^*(y).x - \varphi^*(x).y \\ (\varphi^* + \varphi)(y.x) = \varphi(y).x - \varphi(x).y + \varphi^*(y).x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda([x,y]) = -2\omega(\varphi\varphi^* x, y) \\ \lambda([x,y]) + \lambda(y.x) = -\omega(\varphi\varphi^* x, y) \\ \lambda([x,y]) - \lambda(y.x) = 3\omega(\varphi^*\varphi x, y) + \omega(\varphi\varphi^* x, y) \end{cases}$$

Théorème

Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ l'Oxydation centrale suivant le couple (φ, λ) d'une algèbre de Fedosov $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ plate. Alors $(\mathfrak{g}, \omega)$ est plate si et seulement si

$$Im(\varphi) \subset (\cap_{x \in \overline{\mathfrak{g}}}(\ker L_x)) \cap \ker \lambda,$$
$$3\varphi^*\varphi + 4\varphi\varphi^* = 0$$
$$\lambda(y.x) = \omega(\varphi\varphi^* x, y)$$
$$\varphi([x,y]) = \varphi^*(y).x - \varphi^*(x).y$$
$$(\varphi^* + \varphi)(y.x) = \varphi(y).x - \varphi(x).y + \varphi^*(y).x.$$

MERCI

POUR

VOTRE

ATTENTION !