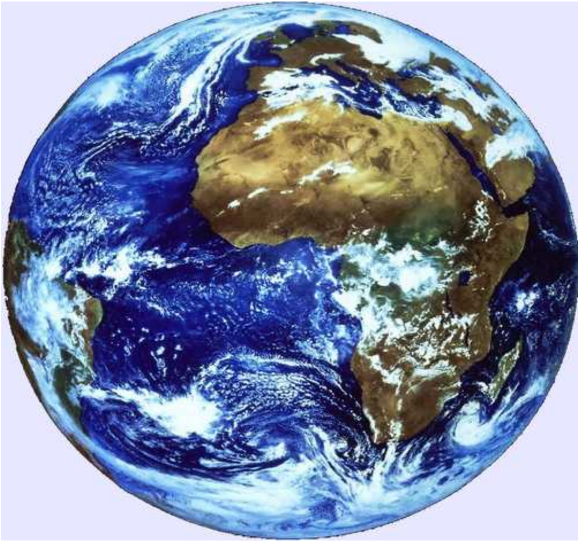
Géométrie sphérique

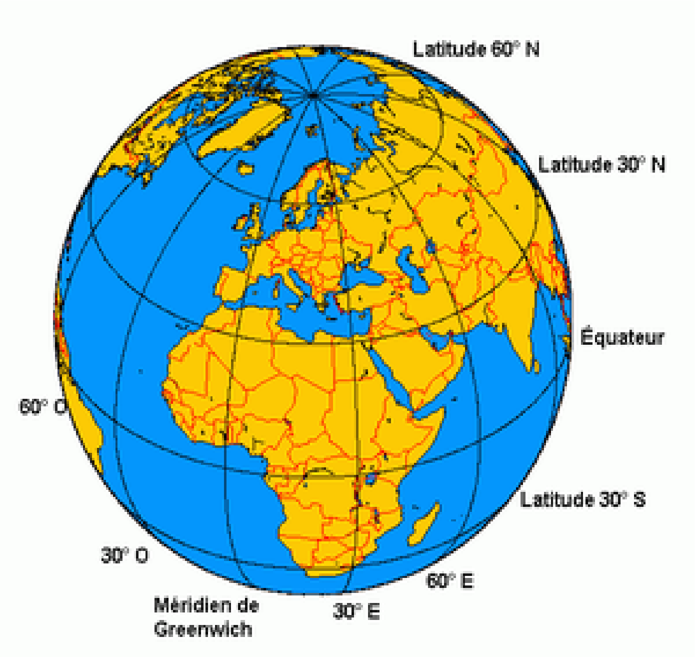
Abdelhak Abouqateb

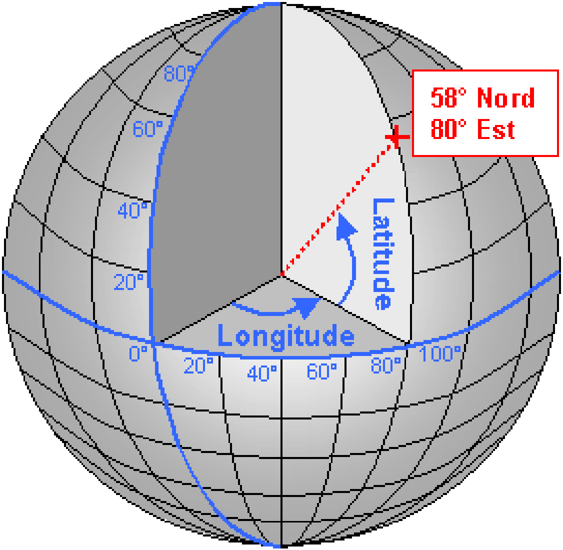
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences et Techniques Marrakech

Géométrie du globe terrestre



Géométrie d'un ballon de foot


Latitude 60° N
Latitude 30° N
Équateur
60° O
Latitude 30° S
30° O
60° E
Méridien de
Greenwich
30° E


58° Nord
80° Est
Latitude
Longitude
80°
60°
40°
20°
0°
20°
40°
60°
80°
100°

Intérêts du thème

- Historiques : Contributions de mathématiciens musulmans (trigonométrie sphérique).

Intérêts du thème

- Historiques : Contributions de mathématiciens musulmans (trigonométrie sphérique).
- Techniques : navigation maritime et aérienne.

Intérêts du thème

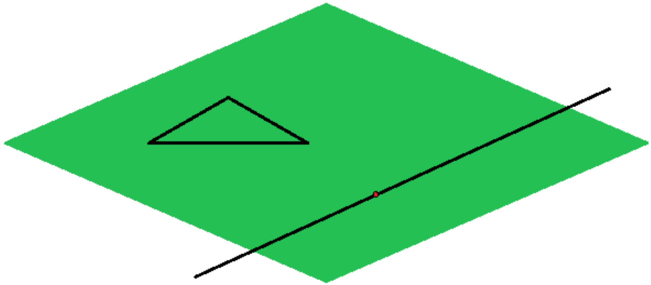
- Historiques : Contributions de mathématiciens musulmans (trigonométrie sphérique).
- Techniques : navigation maritime et aérienne.
- Scientifiques : découverte de géométrie non-euclidienne (applications à la physique : théorie de la relativité)

Introduction

• La **géométrie euclidienne** est la branche des mathématiques qui étudie les figures usuelles du plan : droites, segments, longueurs, mesures des angles ...(Géométrie usuelle du collège)

Introduction

• La **géométrie euclidienne** est la branche des mathématiques qui étudie les figures usuelles du plan : droites, segments, longueurs, mesures des angles ...(Géométrie usuelle du collège)



Géométrie euclidienne

• Au collège, la droite en géométrie, était un objet si évident que l'on négligeait de faire plus de précisions. Et cela suffisait pour établir des résultats intéressants (théorème de Thales, théorème de Pythagore.)

Géométrie euclidienne

• Au collège, la droite en géométrie, était un objet si évident que l'on négligeait de faire plus de précisions. Et cela suffisait pour établir des résultats intéressants (théorème de Thales, théorème de Pythagore.)

• L'approche d'Euclide : **Euclide** définit les objets relevant de la géométrie (point, droite, plan, angle) et leur affecte un certain nombre de propriétés (Axiomes et postulats). À l'aide de ces éléments de base, il essaie de construire, par des démonstrations rigoureuses, l'ensemble des autres propriétés.

• La géométrie usuelle dans le plan ou dans l'espace est toujours très pratique : Physique, Architecture et Ingénierie.

• La géométrie usuelle dans le plan ou dans l'espace est toujours très pratique : Physique, Architecture et Ingénierie.

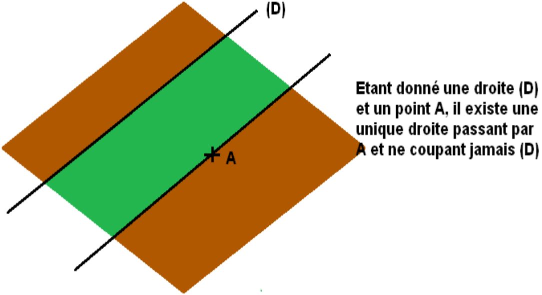
• Les progrès de la physique (mécanique du solide et théorie de la relativité) et aussi des mathématiques (chercher à démontrer le cinquième postulat d'Euclide) engendrent d'autres nouvelles géométries : géométrie non euclidienne, géométrie différentielle.

Postulat des parallèles

Cinquième postulat d'Euclide ou **Postulat des parallèles**

Postulat des parallèles

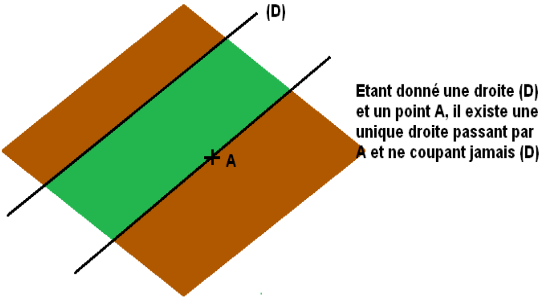
Cinquième postulat d'Euclide ou **Postulat des parallèles**



Postulat des parallèles

Cinquième postulat d'Euclide ou **Postulat des parallèles**

" **Par un point donné et parallèlement à une droite donnée passe une et une seule droite"** :



Somme des angles d'un triangle

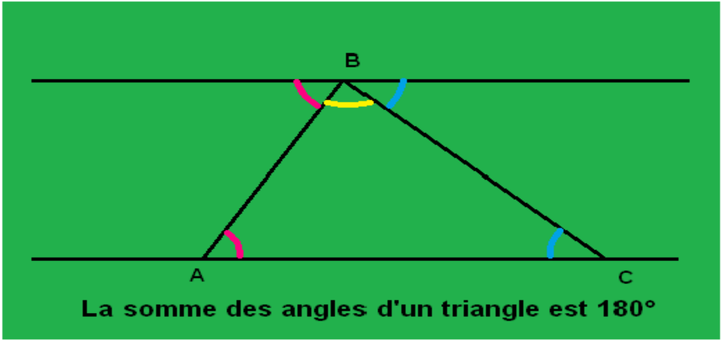
La somme des angles d'un triangle est 180° (degré) ; en Radian :

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi$$

Somme des angles d’un triangle

La somme des angles d’un triangle est 180° (degré) ; en Radian :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$$



Géodésiques du plan

Pour une géométrie sur la sphère, nous avons donc besoin de revenir à la définition (même naïvement) d'une droite !

Géodésiques du plan

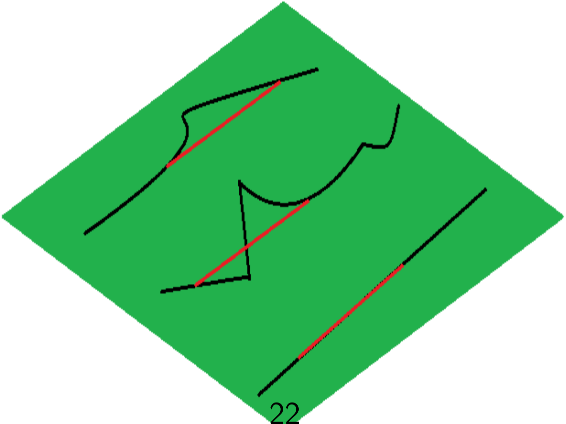
Pour une géométrie sur la sphère, nous avons donc besoin de revenir à la définition (même naïvement) d'une droite !

<u>Définition</u> : une droite est un chemin qui contient le plus court chemin entre deux de ses points quelconques.

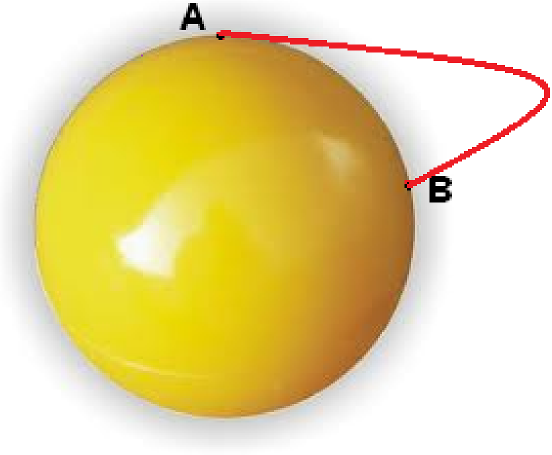
Géodésiques du plan

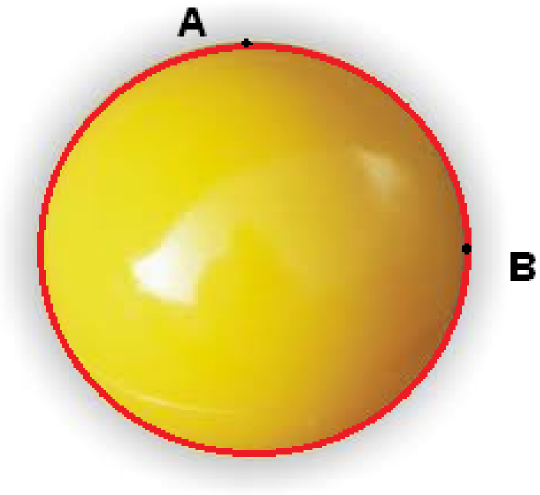
Pour une géométrie sur la sphère, nous avons donc besoin de revenir à la définition (même naïvement) d'une droite !

Définition : une droite est un chemin qui contient le plus court chemin entre deux de ses points quelconques.



Géodésiques de la sphère



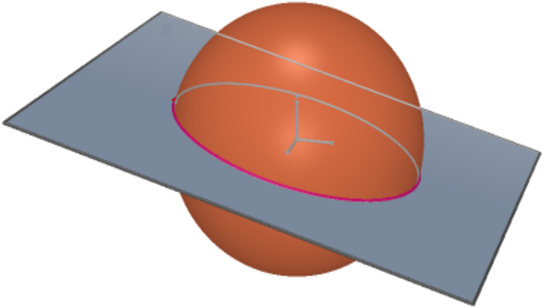

A
B

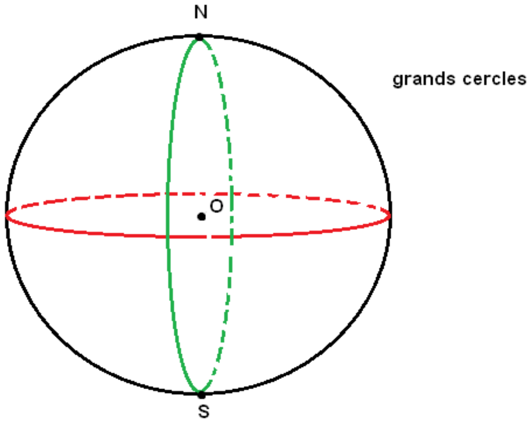
Grands cercles

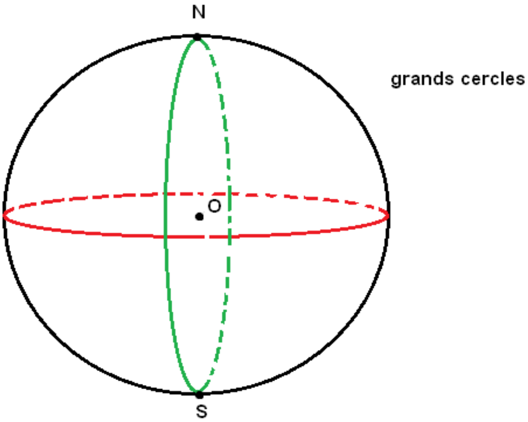
Définition : Un grand cercle sur une sphère S est l'intersection de celle-ci avec un plan passant par le centre.

Grands cercles

Définition : Un grand cercle sur une sphère S est l'intersection de celle-ci avec un plan passant par le centre.



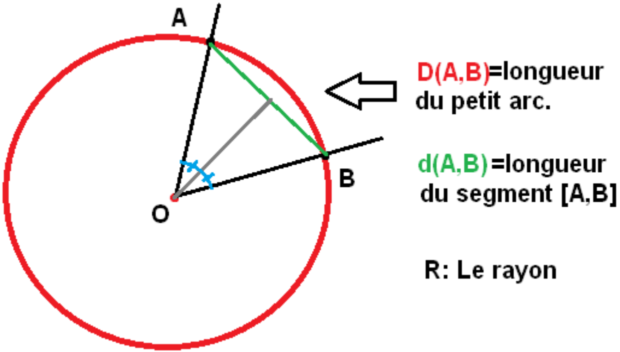

N
O
S
grands cercles



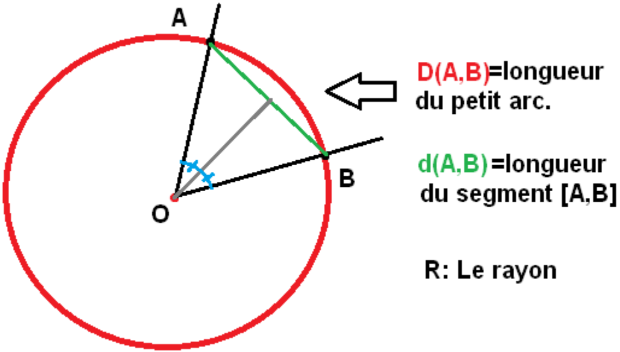
Donc sur la sphère, il n'y a pas de droites parallèles !

Distances sur la sphère. Soit S une sphère de rayon R.
Deux points A et B sur S sont forcement sur un grand cercle

Distances sur la sphère. Soit S une sphère de rayon R.
Deux points A et B sur S sont forcement sur un grand cercle

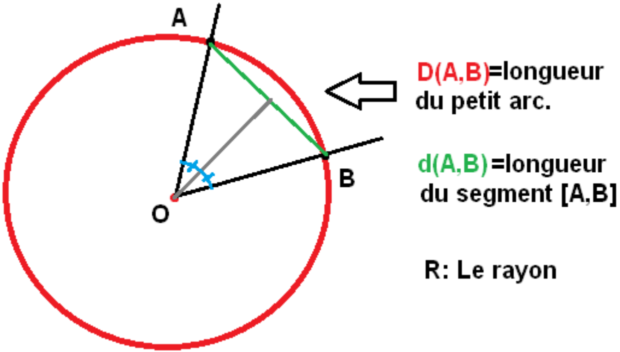


Distances sur la sphère. Soit S une sphère de rayon R. Deux points A et B sur S sont forcement sur un grand cercle



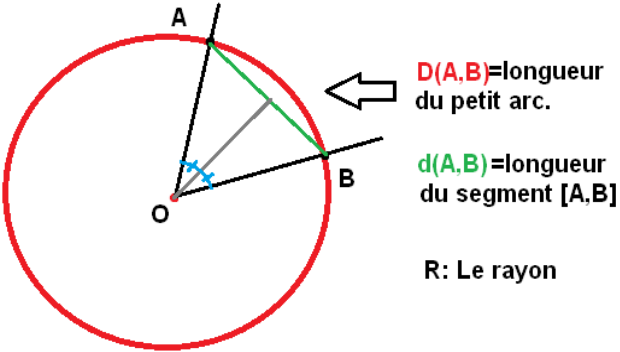
La mesure (en Radian) de l'angle délimité par le petit arc est $\theta = \frac{D(A,B)}{R}$.

Distances sur la sphère. Soit S une sphère de rayon R. Deux points A et B sur S sont forcement sur un grand cercle



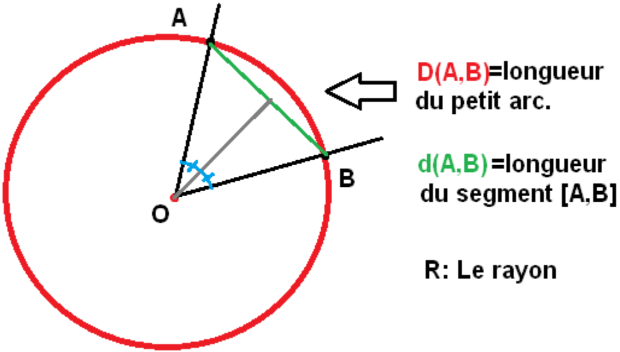
La mesure (en Radian) de l'angle délimité par le petit arc est $\theta = \frac{D(A,B)}{R}$. Donc $D(A, B) = R\theta$.

Distances sur la sphère. Soit S une sphère de rayon R. Deux points A et B sur S sont forcement sur un grand cercle



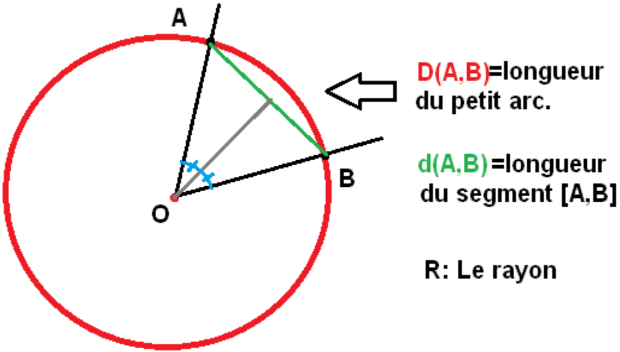
La mesure (en Radian) de l'angle délimité par le petit arc est $\theta = \frac{D(A,B)}{R}$. Donc $D(A, B) = R\theta$. Or $\sin(\frac{\theta}{2}) = \frac{d(A,B)}{2R}$.

Distances sur la sphère. Soit S une sphère de rayon R. Deux points A et B sur S sont forcement sur un grand cercle



La mesure (en Radian) de l'angle délimité par le petit arc est $\theta = \frac{D(A,B)}{R}$. Donc $D(A, B) = R\theta$. Or $\sin(\frac{\theta}{2}) = \frac{d(A,B)}{2R}$. Ainsi $\mathbf{D(A, B) = 2R}\arcsin(\frac{\mathbf{d(A,B)}}{\mathbf{2R}})$.

Distances sur la sphère. Soit S une sphère de rayon R. Deux points A et B sur S sont forcement sur un grand cercle



La mesure (en Radian) de l'angle délimité par le petit arc est $\theta = \frac{D(A,B)}{R}$. Donc $D(A,B) = R\theta$. Or $\sin(\frac{\theta}{2}) = \frac{d(A,B)}{2R}$. Ainsi $\mathbf{D(A,B) = 2R \arcsin(\frac{d(A,B)}{2R})}$.

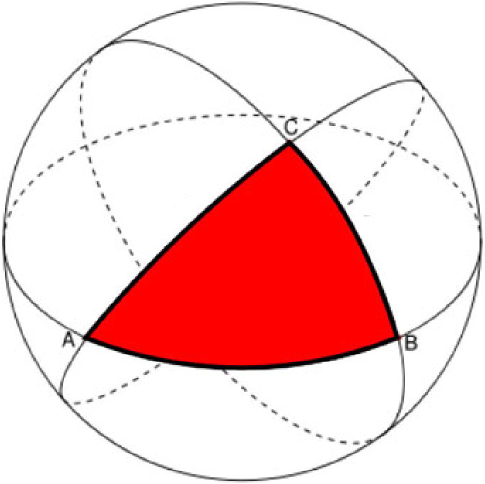
Exercice. Montrer que $\mathbf{D(A,B)} = \arccos(\frac{<\mathbf{A,B}>}{\mathbf{R^2}})$

Triangles sphériques

Définition : Un triangle sphérique est la partie de la sphère délimitée par trois points et 3 arcs de grands cercles.

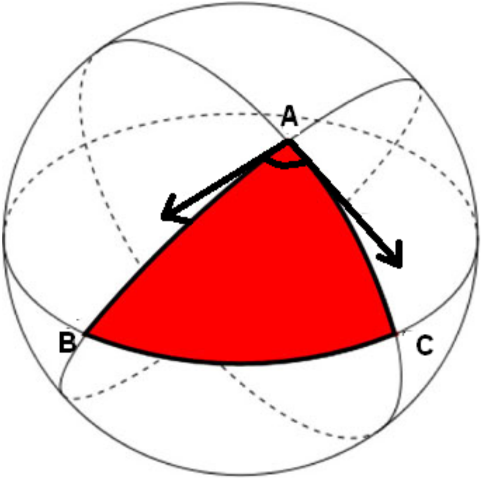
Triangles sphériques

Définition : Un triangle sphérique est la partie de la sphère délimitée par trois points et 3 arcs de grands cercles.



Somme des angles

Notons $\widehat{A}$ l'angle (mesuré en Radian) des demi-droites tangentes aux arcs de grands cercles (voir figure)



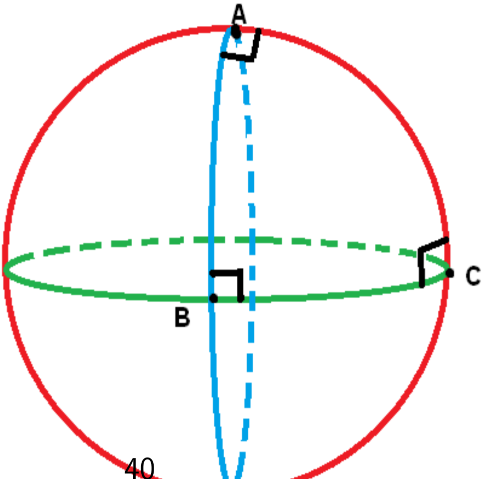
Question :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi = ?$$

Question :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi = ?$$

Exemple : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi = \frac{\pi}{2}$



Théorème : Soit T un triangle sphérique d'angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Alors :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi = \frac{Aire(T)}{R^2}$$

Théorème : Soit T un triangle sphérique d'angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Alors :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi = \frac{Aire(T)}{R^2}$$

Démonstration :

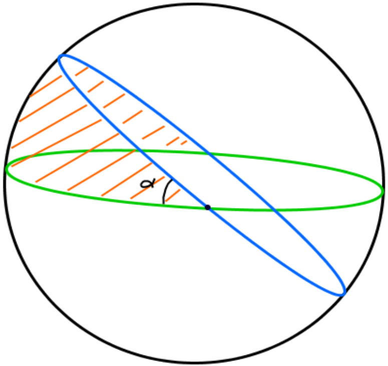
Etape 1 : Aire d'un fuseau

Théorème : Soit T un triangle sphérique d'angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Alors :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi = \frac{Aire(T)}{R^2}$$

Démonstration :

Etape 1 : Aire d'un fuseau



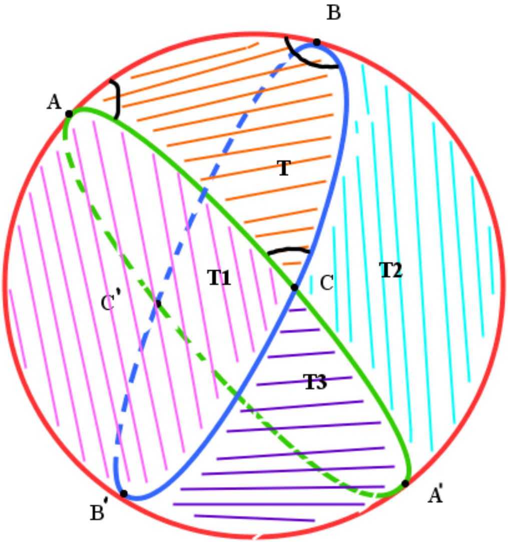
Un fuseau sur la sphère est un polygone sur S à deux sommets antipodaux. L'angle à chaque sommet est le même. Appelons le α(un fuseau horaire sur un globe terrestre en est un exemple).

Un fuseau sur la sphère est un polygone sur S à deux sommets antipodaux. L'angle à chaque sommet est le même. Appelons le α(un fuseau horaire sur un globe terrestre en est un exemple). L'aire d'un tel fuseau S_α est proportionnelle à l'angle d'ouverture :

$$Aire(S_\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi} Aire(S) = 2\alpha R^2$$

Etape 2 :

Etape 2 :



On obtient 8 triangles sphèriques opposés 2 à 2 ; dont 4 sur une hémisphère.

On obtient 8 triangles sphèriques opposés 2 à 2 ; dont 4 sur une hémisphère. On a (aires de fuseaux) :

$$Aire(T) + Aire(T3) = 2\widehat{C}R^2$$

$$Aire(T) + Aire(T2) = 2\widehat{A}R^2$$

$$Aire(T) + Aire(T1) = 2\widehat{B}R^2$$

On obtient 8 triangles sphèriques opposés 2 à 2 ; dont 4 sur une hémisphère. On a (aires de fuseaux) :

$$Aire(T) + Aire(T3) = 2\widehat{C}R^2$$

$$Aire(T) + Aire(T2) = 2\widehat{A}R^2$$

$$Aire(T) + Aire(T1) = 2\widehat{B}R^2$$

En sommant terme à terme ces trois égalités, on obtient :

$$2Aire(T) + \frac{1}{2}Aire(S) = (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})2R^2$$

On obtient 8 triangles sphèriques opposés 2 à 2 ; dont 4 sur une hémisphère. On a (aires de fuseaux) :

$$Aire(T) + Aire(T3) = 2\widehat{C}R^2$$

$$Aire(T) + Aire(T2) = 2\widehat{A}R^2$$

$$Aire(T) + Aire(T1) = 2\widehat{B}R^2$$

En sommant terme à terme ces trois égalités, on obtient :

$$2Aire(T) + \frac{1}{2}Aire(S) = (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})2R^2$$

D'où :

$$\frac{Aire(T)}{R^2} + \pi = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$$

Conséquences

Corollaire : La somme des angles d'un triangle sphérique est toujours strictement supérieur à π.

Conséquences

Corollaire : La somme des angles d'un triangle sphérique est toujours strictement supérieur à π.

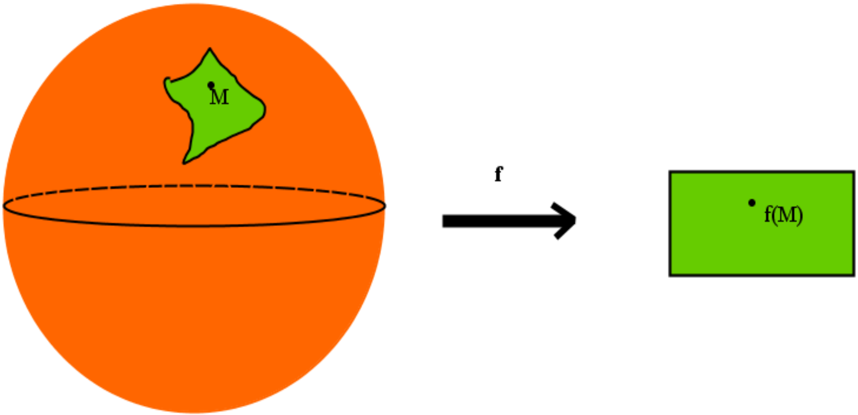
Remarque : Le corollaire ci-dessous permet de comprendre pourquoi il n'existe pas de carte parfaite de n'importe quelle région du globe terrestre (carte parfaite : carte qui représente les vraies (rapports de) distances).

Conséquences

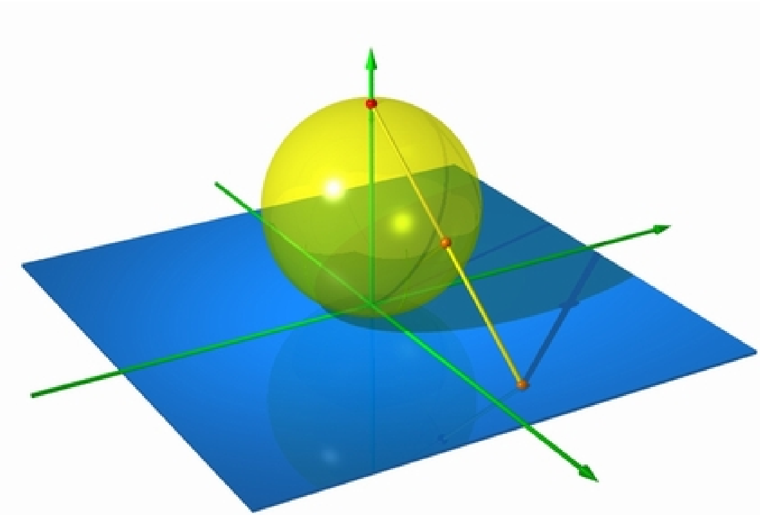
Corollaire : La somme des angles d'un triangle sphérique est toujours strictement supérieur à π.

Remarque : Le corollaire ci-dessous permet de comprendre pourquoi il n'existe pas de carte parfaite de n'importe quelle région du globe terrestre (carte parfaite : carte qui représente les vraies (rapports de) distances). Cartographie et mathématiques !

Une carte d'un point de vue mathématique

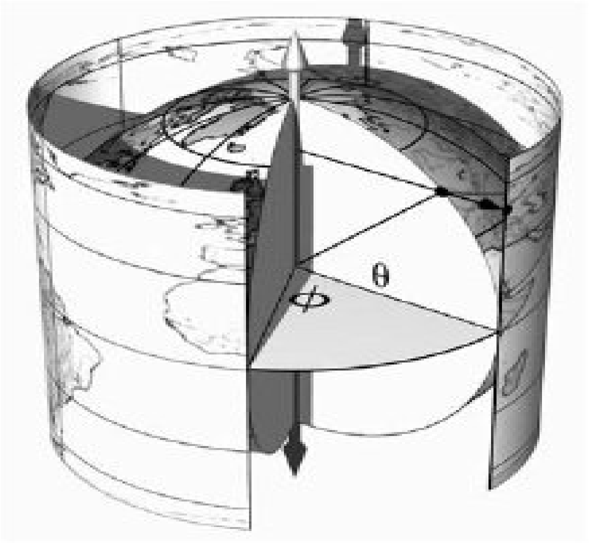


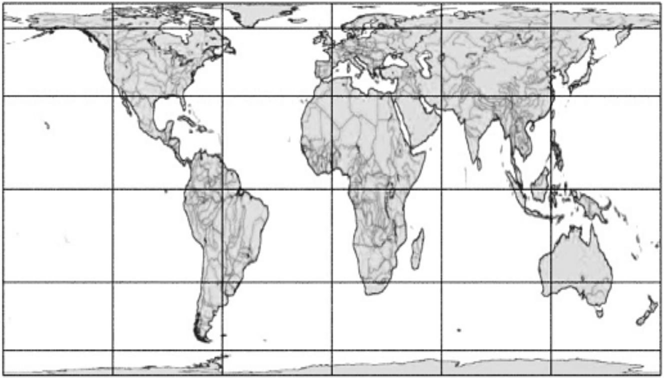
La projection stéréographique identifie la sphère privé du pôle nord avec le plan $\mathbb{R}^2$



La projection stéréographique conserve les angles

La projection d'archimède conserve les aires





La projection de Mercator est une projection cylindrique qui conserve les angles

MERCATOR (1512-1594) : époque où la navigation maritime connaît un grand essor.

La projection de Mercator est une projection cylindrique qui conserve les angles

MERCATOR (1512-1594) : époque où la navigation maritime connaît un grand essor. Il voudrait créer des cartes utiles aux navigateurs

La projection de Mercator est une projection cylindrique qui conserve les angles

MERCATOR (1512-1594) : époque où la navigation maritime connaît un grand essor. Il voudrait créer des cartes utiles aux navigateurs : La préoccupation majeure des cartographes de cette époque était de concevoir une carte qui transforme les courbes qui font un angle constant avec les méridiens (appelées *loxodromes*) en des droites sur la carte.

La projection de Mercator est une projection cylindrique qui conserve les angles

MERCATOR (1512-1594) : époque où la navigation maritime connaît un grand essor. Il voudrait créer des cartes utiles aux navigateurs : La préoccupation majeure des cartographes de cette époque était de concevoir une carte qui transforme les courbes qui font un angle constant avec les méridiens (appelées *loxodromes*) en des droites sur la carte.
Il obtient ce qu'on appelle actuellement les cartes de Mercator.


180°
135°
90°
45°
0°
45°
90°
135°
180°
60°
40°
20°
0°
20°
40°
60°
cartographe.servhome.org

Contributions de mathématiciens musulmans

Motivations : astronomie et médecine.

Contributions de mathématiciens musulmans

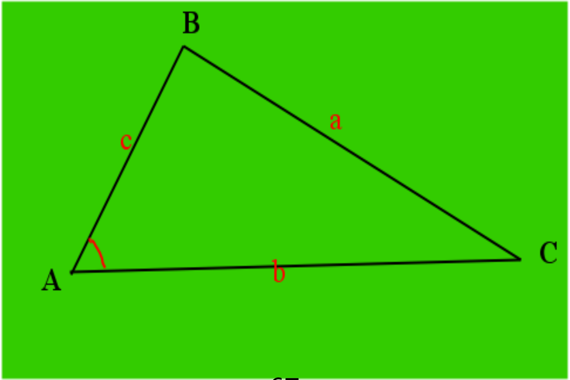
Motivations : astronomie et médecine.
Géométrie plane : Formule d'Al-Kashi (et Et-Toussi) (siècles 13 **et** 14**)**

Contributions de mathématiciens musulmans

Motivations : astronomie et médecine.

Géométrie plane : Formule d'Al-Kashi (et Et-Toussi) (siècles 13 **et** 14**)**

Pour un triangle ABC du plan



on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$$

on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$$

D'où :

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})}$$

et

$$\cos(\widehat{A}) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Pour un triangle quelconque ABC on a aussi les relations :

$$\frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}$$

Pour un triangle quelconque ABC on a aussi les relations :

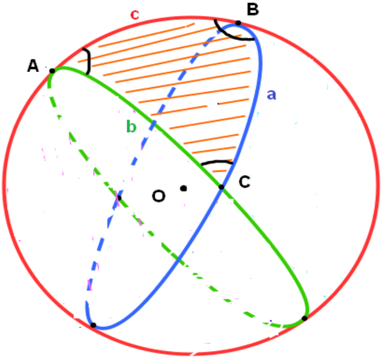
$$\frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}$$

Et comme exercice d'application :

$$\tan(\widehat{A}) = \frac{a \sin(\widehat{B})}{c - a \cos \widehat{B}}$$

Nous allons voir maintenant l'analogue de ces relations pour un triangle sphérique ?

Nous allons voir maintenant l'analogue de ces relations pour un triangle sphérique ?



Contributions d'Albattani et Al-Buzjani (siècles 9 et 10)
(La nécessité de se diriger vers La Mecque a stimulé les géographes, astronomes et mathématiciens musulmans dans la recherche d'outils mathématiques et d'instruments aussi précis que possible.)

Contributions d'Albattani et Al-Buzjani (siècles 9 et 10) (La nécessité de se diriger vers La Mecque a stimulé les géographes, astronomes et mathématiciens musulmans dans la recherche d'outils mathématiques et d'instruments aussi précis que possible.)
Sur **la sphère unité (R=1) et pour un triangle sphérique** ABC **(inscrit dans un hémisphère)** On a les formules :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A} \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\sin(\widehat{A})}{\sin a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{\sin b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{\sin c} \qquad \text{(II)}$$

Question 1 : Quel est l'intérêt pratique de ces formules ?

Comme application de (I) et (II), on obtient :

$$\tan \widehat{A} = \frac{\sin(\widehat{B})}{\cot a \sin c - \cos c \cos \widehat{B}}$$

Comme application de (I) et (II), on obtient :

$$\tan \widehat{A} = \frac{\sin(\widehat{B})}{\cot a \sin c - \cos c \cos \widehat{B}}$$

Lorsqu'il s'agit d'une sphère de rayon R, on utilise l'homothétie de rapport $\frac{1}{R}$ pour se ramener à la sphère unité.

Comme application de (I) et (II), on obtient :

$$\tan \widehat{A} = \frac{\sin(\widehat{B})}{\cot a \sin c - \cos c \cos \widehat{B}}$$

Lorsqu'il s'agit d'une sphère de rayon R, on utilise l'homothétie de rapport $\frac{1}{R}$ pour se ramener à la sphère unité. les angles ne changent pas mais les longueurs des côtés deviennent $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$ et $\frac{c}{R}$.

Comme application de (I) et (II), on obtient :

$$\tan \widehat{A} = \frac{\sin(\widehat{B})}{\cot a \sin c - \cos c \cos \widehat{B}}$$

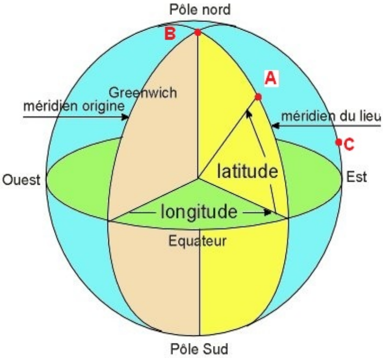
Lorsqu'il s'agit d'une sphère de rayon R, on utilise l'homothétie de rapport $\frac{1}{R}$ pour se ramener à la sphère unité. les angles ne changent pas mais les longueurs des côtés deviennent $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$ et $\frac{c}{R}$. On obtient :

Formule donnant l'angle de la Qibla :

$$\tan \widehat{\mathbf{A}} = \frac{\sin(\widehat{\mathbf{B}})}{\cot \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{R}} \sin \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{R}} - \cos \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{R}} \cos \widehat{\mathbf{B}}}$$

Formule donnant l'angle de la Qibla :

$$\tan \widehat{\mathbf{A}} = \frac{\sin(\widehat{\mathbf{B}})}{\cot \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{R}} \sin \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{R}} - \cos \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{R}} \cos \widehat{\mathbf{B}}}$$

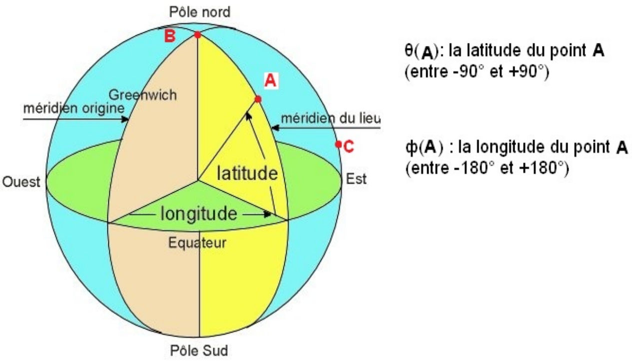


θ(**A**): la latitude du point **A** (entre -90° et +90°)

ϕ(**A**) : la longitude du point **A** (entre -180° et +180°)

Formule donnant l'angle de la Qibla :

$$\tan \widehat{\mathbf{A}} = \frac{\sin(\widehat{\mathbf{B}})}{\cot \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{R}} \sin \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{R}} - \cos \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{R}} \cos \widehat{\mathbf{B}}}$$



Pour pouvoir déduire $\widehat{A}$ à l'aide de la fonction arctan, et puisque $\widehat{A} \in [0, \pi]$ on utilise l'égalité $\tan(\widehat{A} - \frac{\pi}{2}) = -\cot(\widehat{A})$.

Calculer la distance entre deux points du globe terrestre ?

Sur la terre (Sphère de rayon R), et pour un triangle spérique (où B est le pôle nord, A et C deux points quelconques), on a la formule :

Calculer la distance entre deux points du globe terrestre ?

Sur la terre (Sphère de rayon R), et pour un triangle spérique (où B est le pôle nord, A et C deux points quelconques), on a la formule :

$$\cos\frac{b}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\widehat{B} \qquad \text{(I)}$$

Calculer la distance entre deux points du globe terrestre ?

Sur la terre (Sphère de rayon R), et pour un triangle spérique (où B est le pôle nord, A et C deux points quelconques), on a la formule :

$$\cos\frac{b}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\widehat{B} \qquad \text{(I)}$$

Cette formule permet de déduire la distance b (entre A et C) en utilisant les coordonnées terrestres des points A et C (en utilisant la fonction arccos).

Une formule précise pour exprimer la distance en fonction des latitudes et longitudes

Une formule précise pour exprimer la distance en fonction des latitudes et longitudes

$$d(M_1, M_2) = \frac{R\pi}{90}\sqrt{\sin^2(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}) + \cos\phi_1 \cos\phi_2 \sin^2(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2})}$$

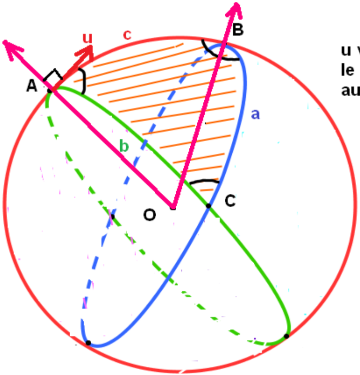
Une formule précise pour exprimer la distance en fonction des latitudes et longitudes

$$d(M_1, M_2) = \frac{R\pi}{90}\sqrt{\sin^2(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}) + \cos\phi_1 \cos\phi_2 \sin^2(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2})}$$

$$\lambda_i = longitude(M_i), \quad \phi_i = latilude(M_i)$$

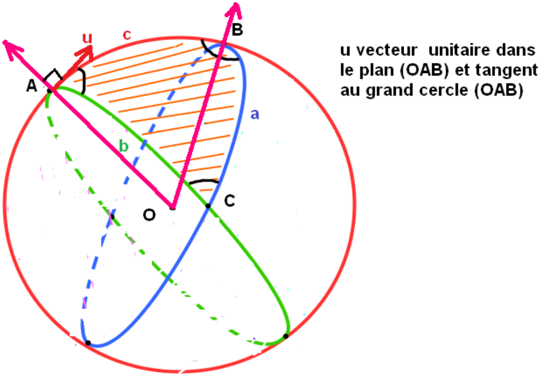
Question 2 : Comment établir ces formules ?

Question 2 : Comment établir ces formules ?



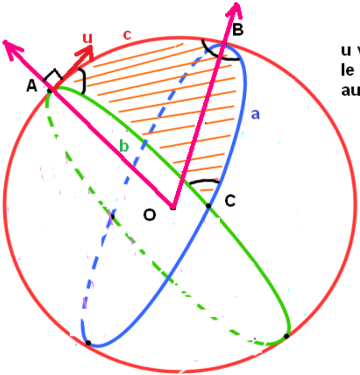
u vecteur unitaire dans le plan (OAB) et tangent au grand cercle (OAB)

Question 2 : Comment établir ces formules ?



La position d'un point M sur le grand cercle (OAB) peut être définie par : $\overrightarrow{OM} = \cos(t)\overrightarrow{OA} + \sin(t)\overrightarrow{u}$; où le paramètre t est la longueur de l'arc entre le point A et M.

Question 2 : Comment établir ces formules ?



u vecteur unitaire dans le plan (OAB) et tangent au grand cercle (OAB)

La position d'un point M sur le grand cercle (OAB) peut être définie par : $\overrightarrow{OM} = \cos(t)\overrightarrow{OA} + \sin(t)\overrightarrow{u}$; où le paramètre t est la longueur de l'arc entre le point A et M. En particulier pour B, on a :

$$\overrightarrow{OB} = \cos(c)\overrightarrow{OA} + \sin(c)\overrightarrow{u}$$

En fait le vecteur u est donné par :

$$u = \frac{\overrightarrow{OB} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > \overrightarrow{OA}}{\| \overrightarrow{OB} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > \overrightarrow{OA} \|}$$

En fait le vecteur u est donné par :

$$u = \frac{\overrightarrow{OB} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > \overrightarrow{OA}}{\| \overrightarrow{OB} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > \overrightarrow{OA} \|}$$

De la même fçon, on obtient :

$$\overrightarrow{OC} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{v}$$

En fait le vecteur u est donné par :

$$u = \frac{\overrightarrow{OB} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > \overrightarrow{OA}}{\| \overrightarrow{OB} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > \overrightarrow{OA} \|}$$

De la même fçon, on obtient :

$$\overrightarrow{OC} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{v}$$

$$v = \frac{\overrightarrow{OC} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} > \overrightarrow{OA}}{\| \overrightarrow{OC} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} > \overrightarrow{OA} \|}$$

En fait le vecteur u est donné par :

$$u = \frac{\overrightarrow{OB} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > \overrightarrow{OA}}{\| \overrightarrow{OB} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > \overrightarrow{OA} \|}$$

De la même fçon, on obtient :

$$\overrightarrow{OC} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{v}$$

$$v = \frac{\overrightarrow{OC} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} > \overrightarrow{OA}}{\| \overrightarrow{OC} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} > \overrightarrow{OA} \|}$$

Or le produit scalaire $< \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} >$ n'est autre que le cosinus de l'angle entre ces deux vecteurs.

En fait le vecteur u est donné par :

$$u = \frac{\overrightarrow{OB} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > \overrightarrow{OA}}{\| \overrightarrow{OB} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > \overrightarrow{OA} \|}$$

De la même fçon, on obtient :

$$\overrightarrow{OC} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{v}$$

$$v = \frac{\overrightarrow{OC} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} > \overrightarrow{OA}}{\| \overrightarrow{OC} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} > \overrightarrow{OA} \|}$$

Or le produit scalaire $< \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} >$ n'est autre que le cosinus de l'angle entre ces deux vecteurs. C'est-à-dire :
$\cos a =< \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} >$.

En fait le vecteur u est donné par :

$$u = \frac{\overrightarrow{OB} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > \overrightarrow{OA}}{\| \overrightarrow{OB} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > \overrightarrow{OA} \|}$$

De la même fçon, on obtient :

$$\overrightarrow{OC} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{v}$$

$$v = \frac{\overrightarrow{OC} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} > \overrightarrow{OA}}{\| \overrightarrow{OC} - < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} > \overrightarrow{OA} \|}$$

Or le produit scalaire $< \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} >$ n'est autre que le cosinus de l'angle entre ces deux vecteurs. C'est-à-dire :
$\cos a =< \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} >$. Et puisque $< u, v >= \cos(\widehat{A})$, on obtient la formule (I).

Pour la obtenir la formule (II), on utilise encore les expressions de $\overrightarrow{OB}$ et de $\overrightarrow{OC}$ pour calculer le produit vectoriel mixte $< \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} >$, $< \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} >$ et $< \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA} >$.

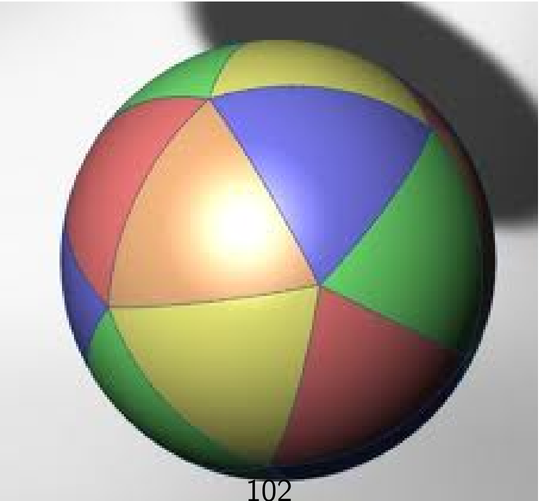
Pour la obtenir la formule (II), on utilise encore les expressions de $\overrightarrow{OB}$ et de $\overrightarrow{OC}$ pour calculer le produit vectoriel mixte $<\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}>$, $<\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}>$ et $<\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}>$. Et puis, on sait que ces trois quantités sont les égales, la formule en découle.

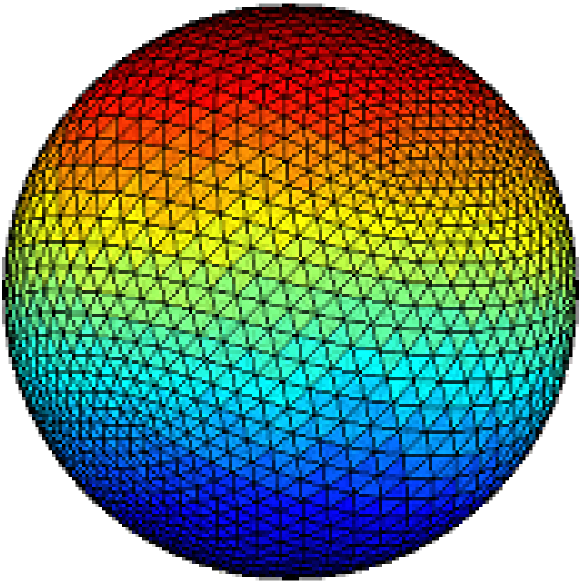
Triangulation de la sphère

On appelle triangulation de la sphère S une "décomposition" de celle-ci en triangles phériques (*Chaque triangle est bordé par* 3 *aêtes et que chaque arête est commune à deux triangles*)

Triangulation de la sphère

On appelle triangulation de la sphère S une "décomposition" de celle-ci en triangles phériques (*Chaque triangle est bordé par* 3 *aêtes et que chaque arête est commune à deux triangles*)



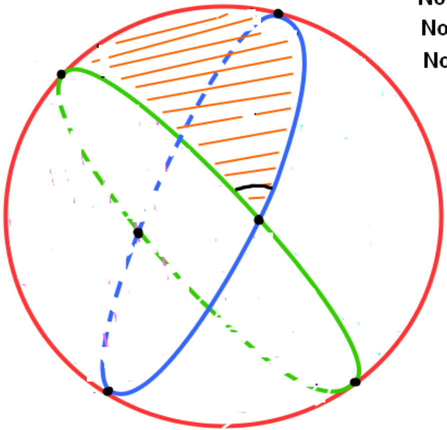


Formule d'Euler

Question : Quelle est la relation entre le nombres de sommets S, le nombres d'arêtes A et le nombres de faces F ?

Formule d'Euler

Question : Quelle est la relation entre le nombres de sommets S, le nombres d'arêtes A et le nombres de faces F ?
Regardons un exemple simple :



Nombre de sommets ?
Nombre d'arêtes ?
Nombre de faces ?

Formule d'Euler

Notons S le nombre de sommets de la triangulation, A le nombre d'arêtes, et F le nombres de triangles.

Formule d'Euler

Notons S le nombre de sommets de la triangulation, A le nombre d'arêtes, et F le nombres de triangles.

Théorème (Euler). On a toujours, quelque soit la triangulation,

$$\mathbf{F} + \mathbf{S} - \mathbf{A} = \mathbf{2}$$

Formule d'Euler

Notons S le nombre de sommets de la triangulation, A le nombre d'arêtes, et F le nombres de triangles.

Théorème (Euler). On a toujours, quelque soit la triangulation,

$$\mathbf{F} + \mathbf{S} - \mathbf{A} = \mathbf{2}$$

N.B. On suppose que chaque triangle est bordé par trois arêtes et que chaque arête et commune à deux triangles !

Démonstration :

__**Démonstration**__ : Puisque chaque triangle est bordé par 3 arêtes et chaque arête est commune à deux triangles,

Démonstration : Puisque chaque triangle est bordé par 3 arêtes et chaque arête est commune à deux triangles,on en déduit : $\mathbf{3F = 2A}$

Démonstration : Puisque chaque triangle est bordé par 3 arêtes et chaque arête est commune à deux triangles,on en déduit : $\mathbf{3F = 2A}$

Écrivons maintenant que pour chaque triangle $T_k = A_k B_k C_k$, on a :

$$\widehat{A_k} + \widehat{B_k} + \widehat{C_k} - \pi = \frac{Aire(T_k)}{R^2}$$

__**Démonstration**__ : Puisque chaque triangle est bordé par 3 arêtes et chaque arête est commune à deux triangles,on en déduit : $\mathbf{3F = 2A}$

Écrivons maintenant que pour chaque triangle $T_k = A_k B_k C_k$, on a :

$$\widehat{A_k} + \widehat{B_k} + \widehat{C_k} - \pi = \frac{Aire(T_k)}{R^2}$$

Sommons membre à membre toutes les égalités obtenues.

Démonstration : Puisque chaque triangle est bordé par 3 arêtes et chaque arête est commune à deux triangles,on en déduit : $\mathbf{3F = 2A}$

Écrivons maintenant que pour chaque triangle $T_k = A_k B_k C_k$, on a :

$$\widehat{A_k} + \widehat{B_k} + \widehat{C_k} - \pi = \frac{Aire(T_k)}{R^2}$$

Sommons membre à membre toutes les égalités obtenues. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{F} (\widehat{A_k} + \widehat{B_k} + \widehat{C_k}) = F\pi + 4\pi$$

Démonstration : Puisque chaque triangle est bordé par 3 arêtes et chaque arête est commune à deux triangles,on en déduit : $\mathbf{3F = 2A}$

Écrivons maintenant que pour chaque triangle $T_k = A_k B_k C_k$, on a :

$$\widehat{A_k} + \widehat{B_k} + \widehat{C_k} - \pi = \frac{Aire(T_k)}{R^2}$$

Sommons membre à membre toutes les égalités obtenues. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{F} (\widehat{A_k} + \widehat{B_k} + \widehat{C_k}) = F\pi + 4\pi$$

Et puisque la somme des angles en un sommet est $S 2\pi$,

Démonstration : Puisque chaque triangle est bordé par 3 arêtes et chaque arête est commune à deux triangles,on en déduit : $\mathbf{3F = 2A}$

Écrivons maintenant que pour chaque triangle $T_k = A_k B_k C_k$, on a :

$$\widehat{A_k} + \widehat{B_k} + \widehat{C_k} - \pi = \frac{Aire(T_k)}{R^2}$$

Sommons membre à membre toutes les égalités obtenues. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{F} (\widehat{A_k} + \widehat{B_k} + \widehat{C_k}) = F\pi + 4\pi$$

Et puisque la somme des angles en un sommet est $S2\pi$, on en déduit $\mathbf{2S = F + 4}$.

Démonstration : Puisque chaque triangle est bordé par 3 arêtes et chaque arête est commune à deux triangles,on en déduit : $\mathbf{3F = 2A}$

Écrivons maintenant que pour chaque triangle $T_k = A_k B_k C_k$, on a :

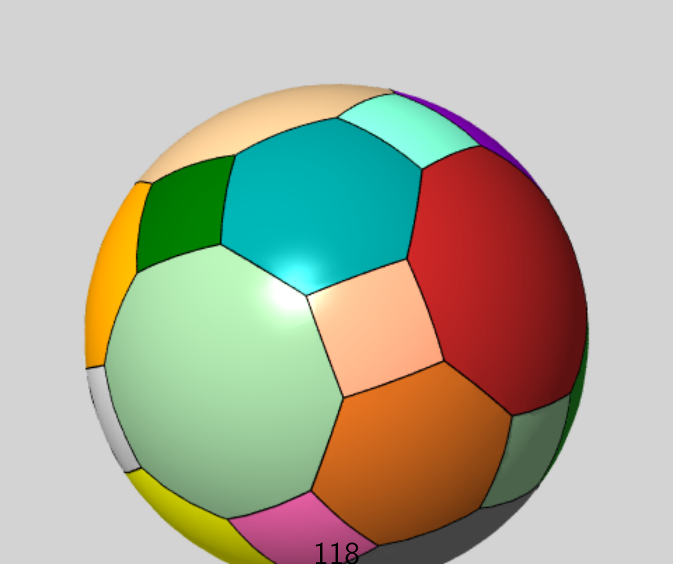
$$\widehat{A_k} + \widehat{B_k} + \widehat{C_k} - \pi = \frac{Aire(T_k)}{R^2}$$

Sommons membre à membre toutes les égalités obtenues. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{F} (\widehat{A_k} + \widehat{B_k} + \widehat{C_k}) = F\pi + 4\pi$$

Et puisque la somme des angles en un sommet est $S2\pi$, on en déduit $\mathbf{2S = F + 4}$. D'où la formule $\mathbf{F + S - A = 2}$.

Pavages de la sphère : Décomposition en polygones convexes

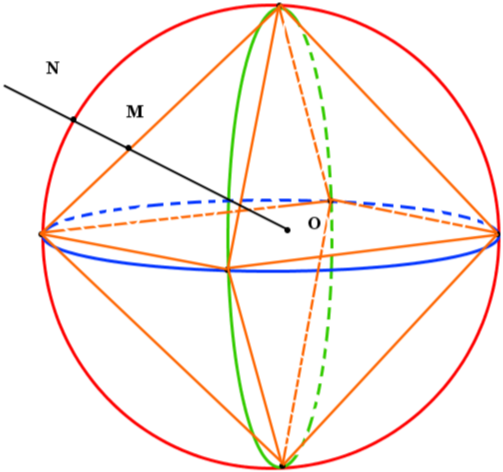


Pavages de la sphère et bons polyèdres

Un bon polyèdre est "*homéomorphe*" à une sphère

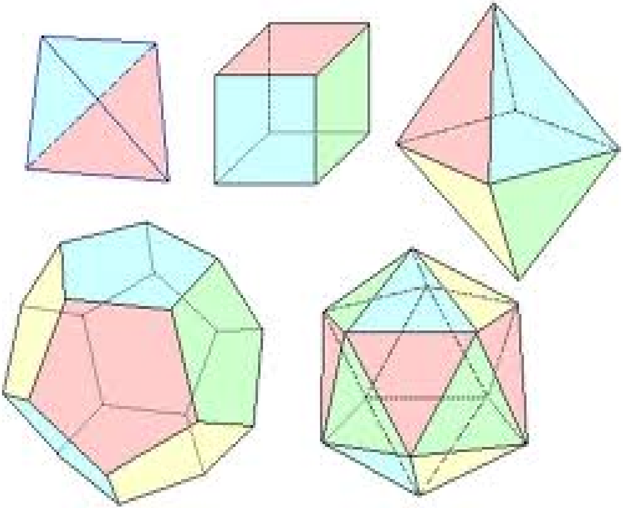
Pavages de la sphère et bons polyèdres

Un bon polyèdre est "*homéomorphe*" à une sphère



Exemples de bons polyèdres

Comme exemples de bon polyèdres,



Un bon polyèdre P, dans l'espace à 3 dimensions, est un solide délimité par un nombre fini de polygones plans appelés les faces du polyèdre, Un bon polyèdre P, dans l'espace à 3 dimensions, est un solide délimité par un nombre fini de polygones plans appelés les faces du polyèdre, les côtés de ces faces sont appelés les arêtes du polyèdre et les extrémités des arêtes sont appelés ses sommets. On suppose que :

Un bon polyèdre P, dans l'espace à 3 dimensions, est un solide délimité par un nombre fini de polygones plans appelés les faces du polyèdre, les côtés de ces faces sont appelés les arêtes du polyèdre et les extrémités des arêtes sont appelés ses sommets. On suppose que :

- chaque côté de chaque face coïncide avec un côté d'une seule autre face, non coplanaire avec la première .
- chaque arête aboutit exactement à deux sommets.
- il existe un point O de l'espace ayant la propriété suivante : toute demi droite issue de O coupe la frontière en un point et un seul

Formule d'Euler pour les bons polyèdres

Théorème (Euler). Pour tout bon polyèdre, on a toujours :

$$\mathbf{F} + \mathbf{S} - \mathbf{A} = \mathbf{2}$$

Pavages réguliers de la sphére ou classification des polyèdres réguliers

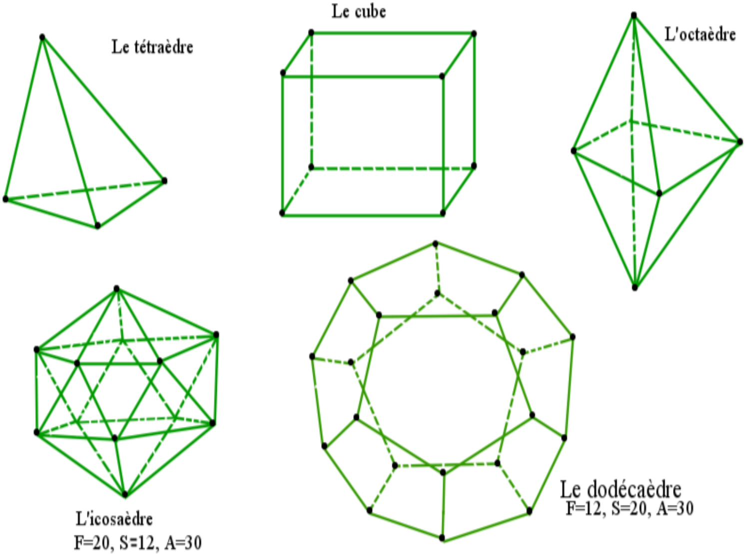
Définition. • Un bon polyèdre est dit polyèdre régulier de type (p, q) si chacune de ses faces est un polygone à p côtés et si aboutissant exactement q arêtes à chacune de ses sommets.

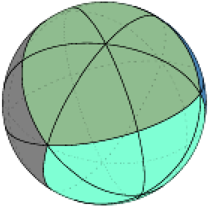
Pavages réguliers de la sphére ou classification des polyèdres réguliers

Définition. • Un bon polyèdre est dit polyèdre régulier de type (p, q) si chacune de ses faces est un polygone à p côtés et si aboutissant exactement q arêtes à chacune de ses sommets.

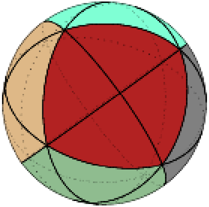
Théorème (Classification combinatoire). Tout polyèdre régulier est l'un des 5 types : Le tétraédre - Le cube - L'octaèdre - Le dodécaèdre - L'icosaèdre.

Solides de platon

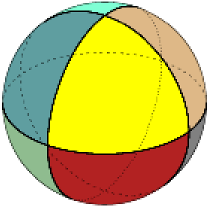




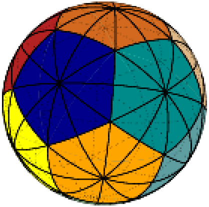
Tétraèdre



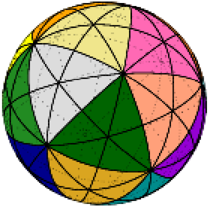
Cube



Octaèdre



Dodécaèdre



Icosaèdre

Mathématiques et Ballon de football

Un ballon de football est formé de plusieurs morceaux :

Mathématiques et Ballon de football

Un ballon de football est formé de plusieurs morceaux :

des polygones réguliers, pas tous les mêmes (souvent des hexagones et des pentagones).

Mathématiques et Ballon de football

Un ballon de football est formé de plusieurs morceaux :

des polygones réguliers, pas tous les mêmes (souvent des hexagones et des pentagones). Nous allons comprendre par exemple qu'**il impossible que ces morceaux soient tous des hexagones**.

Mathématiques et Ballon de football

Un ballon de football est formé de plusieurs morceaux :

des polygones réguliers, pas tous les mêmes (souvent des hexagones et des pentagones). Nous allons comprendre par exemple qu'**il impossible que ces morceaux soient tous des hexagones**. Il y a des raisons mathématiques derrière !

Construire un ballon de football

Nous allons, à l'aide de la formule d'Euler, essayer de construire un ballon de football, en partant du principe qu'il est composé d'hexagones (au nombre de x) et de pentagones (au nombre de y)

Construire un ballon de football

Nous allons, à l'aide de la formule d'Euler, essayer de construire un ballon de football, en partant du principe qu'il est composé d'hexagones (au nombre de x) et de pentagones (au nombre de y)et en sachant que ce sont des bouts de cuir plats qu'on veut coudre pour en faire ce qui se rapproche le plus d'une sphère.

Construire un ballon de football

Nous allons, à l'aide de la formule d'Euler, essayer de construire un ballon de football, en partant du principe qu'il est composé d'hexagones (au nombre de x) et de pentagones (au nombre de y)et en sachant que ce sont des bouts de cuir plats qu'on veut coudre pour en faire ce qui se rapproche le plus d'une sphère. On écrit : $F = x + y$, $A = \frac{1}{2}(5x + 6y)$, $S = \frac{1}{3}(5x + 6y)$.

Construire un ballon de football

Nous allons, à l'aide de la formule d'Euler, essayer de construire un ballon de football, en partant du principe qu'il est composé d'hexagones (au nombre de x) et de pentagones (au nombre de y)et en sachant que ce sont des bouts de cuir plats qu'on veut coudre pour en faire ce qui se rapproche le plus d'une sphère. On écrit : $F = x + y$, $A = \frac{1}{2}(5x + 6y)$, $S = \frac{1}{3}(5x + 6y)$. La relation d'Euler donne alors $x = 12$.

Méthode : À chaque sommet, on met au moins un pentagone, donc chaque sommet appartient à au moins un pentagone ; comme il y a 12, il y a au plus 60 sommets dans le ballon.

Méthode : À chaque sommet, on met au moins un pentagone, donc chaque sommet appartient à au moins un pentagone ; comme il y a 12, il y a au plus 60 sommets dans le ballon.Pour que le ballon soit le plus rond possible, il faut qu'il ait le maximum de sommets ; prenons donc $S = 60$;

Méthode : À chaque sommet, on met au moins un pentagone, donc chaque sommet appartient à au moins un pentagone ; comme il y a 12, il y a au plus 60 sommets dans le ballon.Pour que le ballon soit le plus rond possible, il faut qu'il ait le maximum de sommets ; prenons donc $S = 60$; or
$S = \frac{1}{3}(5x + 6y)$,

Méthode : À chaque sommet, on met au moins un pentagone, donc chaque sommet appartient à au moins un pentagone ; comme il y a 12, il y a au plus 60 sommets dans le ballon.Pour que le ballon soit le plus rond possible, il faut qu'il ait le maximum de sommets ; prenons donc $S = 60$; or $S = \frac{1}{3}(5x + 6y)$, donc $y = 20$.

Molécules de fullerènes : $C60$

On a découvert que les 60 atomes de carbone devaient être aux sommets d'une microballe de foot (Les inventeurs ont reçu en 1996 le Prix Nobel de chimie)