



UNIVERSITÉ CADI AYYAD  
Faculté des Sciences et Techniques  
Marrakech

LST-MIASI

PROJET DE FIN D'ÉTUDES

---

# Propriétés algébriques et géométriques des transformations de Möbius

---

*Réalisé par : Dani Othmane*

*Encadré par : Pr. Abouqateb Abdelhak*

Membres du jury :

*Pr. Tber Hicham*

*Pr. Ikemakhen Aziz*

10 mars 2020

## Remerciements :

La réalisation de ce rapport a été un succès grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner respect et gratitude.

Je tiens, tout d'abord à exprimer ma reconnaissance à mon encadrant Monsieur ***Abouqateb Abdelhak*** pour sa patience, sa disponibilité, ses judicieux conseils et surtout le temps qu'il a consacré afin de m'offrir les outils indispensables à la conduite de ce projet. Son orientation et son exigence m'ont grandement stimulé. L'enseignement de qualité dispensé par notre licence **MIASI** a également représenté une profonde satisfaction intellectuelle que sans laquelle je n'aurais pas su réussir. Un grand remerciement alors au corps professoral de notre département mathématique surtout, ainsi que universitaire.

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de loin ou de près à la réalisation de ce projet. Notamment, ***mes parents, mon frère et mes amis***. Leur soutien et leurs encouragements ont été la chandelle qui m'a éclaircie la route vers la réussite.

## Introduction :

La géométrie est généralement la science qui s'intéresse aux formes et aux espaces. Bien qu'elle a connue des évolutions gigantesques au fil des siècles, aujourd'hui elle connaît plusieurs classifications. Chacune de ces classifications définit un type de la géométrie à savoir la géométrie algébrique, différentielle, complexe, entre autres.

Dans notre projet, nous nous intéresserons à l'étude préliminaire d'une partie de la géométrie différentielle : la géométrie sphérique. Tout d'abord, comme les bases sont importantes pour toute construction, nous commencerons par un rappel bien détaillé de la géométrie euclidienne classique. Ensuite, une étude de projections sphériques s'impose afin d'ouvrir la porte vers un troisième chapitre qui caractérise les transformations de Möbius.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Quelques éléments de la géométrie affine euclidienne</b>	<b>4</b>
1.1	Espace affine . . . . .	4
1.1.1	Définitions et notations . . . . .	4
1.2	Barycentres . . . . .	6
1.3	Sous espace affine . . . . .	8
1.4	Application affine . . . . .	10
1.5	Convexité . . . . .	12
1.6	Espace affine euclidien . . . . .	13
1.7	Projection . . . . .	14
1.7.1	Théorème général de la projection . . . . .	15
1.7.2	Projection orthogonale d'un point sur un sous-espace affine . . . . .	18
1.8	Exemples de calcul . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Quelques projections sphériques et isométries</b>	<b>23</b>
2.1	Rappel sur les courbes et les surfaces . . . . .	23
2.2	Projection stéréographique . . . . .	30
2.2.1	Définition de la projection stéréographique . . . . .	30
2.2.2	Propriétés de la projection stéréographique . . . . .	32
2.3	Projection d'Archimède . . . . .	41
2.3.1	Définition de la projection d'Archimède . . . . .	41
2.3.2	Propriété de la projection d'Archimède . . . . .	43
2.4	Plan tangent et formes fondamentales . . . . .	44
2.4.1	Plan tangent . . . . .	44
2.4.2	Première forme fondamentale . . . . .	46
2.4.3	Deuxième forme fondamentale . . . . .	47
2.5	Isométries locales . . . . .	51
2.5.1	définition et propriétés . . . . .	51
2.5.2	Exemples des isométries locales . . . . .	52
2.5.3	Isométrie entre la sphère et le plan . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Propriétés des transformations de Möbius</b>	<b>59</b>
3.1	La sphère de Riemann . . . . .	59
3.1.1	Définitions et propriétés . . . . .	59
3.1.2	Projection stéréographique de la sphère de Riemann . . . . .	60
3.2	Transformations de Möbius . . . . .	60
3.2.1	Définitions et propriétés . . . . .	60
3.2.2	Transformations de Möbius et rotations . . . . .	66
3.2.3	Les groupes $SO(3)$ et $SU(2)$ . . . . .	70

3.3	Le birapport . . . . .	71
3.3.1	Définitions et propriétés . . . . .	71
3.3.2	L'action des transformations de Möbius sur la sphère de Riemann	73

# Chapitre 1

## Quelques éléments de la géométrie affine euclidienne

Ce chapitre est une introduction à la géométrie euclidienne classique. On définit d'abord les notions d'espaces affines, d'applications affines, de barycentre, de parallélisme et de distance d'un point à un hyperplan affine. Un espace affine euclidien est un espace affine muni d'un produit scalaire; dans ce contexte on définira la notion d'orthogonalité et de la projection orthogonale affine.

### 1.1 Espace affine

#### 1.1.1 Définitions et notations

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  - espace vectoriel de dimension finie.

**Définition 1.1.1.** *Un espace affine de direction  $E$  est une couple  $(\mathcal{E}, +)$  formé d'un ensemble  $\mathcal{E}$  non vide et d'une loi externe  $+$  qui à un couple  $(A, u) \in \mathcal{E} \times E$  associe un élément  $A + u$  de  $\mathcal{E}$  vérifiant les axiomes suivants*

- (1)  $\forall A \in \mathcal{E}, \quad A + \vec{0} = A$
- (2)  $\forall A \in \mathcal{E} \quad \forall u, v \in E, \quad A + (u + v) = (A + u) + v$
- (3)  $\forall A, B \in \mathcal{E} \quad \exists! u \in E, \quad B = A + u$

**Notation 1.1.** *Si  $\mathcal{E}$  est un espace affine de direction  $E$ ,*

- *On dit que  $E$  est l'espace vectoriel directeur à  $\mathcal{E}$ .*
- *Les éléments de  $\mathcal{E}$  sont appelés des points, et ceux de  $E$  des vecteurs.*
- *Etant donnés deux points  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{E}$ , l'unique vecteur  $u \in E$  tel que  $B = A + u$  est noté  $\vec{AB}$ .*
- *Par définition la dimension de  $\mathcal{E}$  est égale à la dimension de  $E$ .*

**Proposition 1.1.1. (Relation de Chasles)** *Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine de direction  $E$ . Soit  $A, B$  et  $C$  trois points quelconque de  $\mathcal{E}$ , alors on a*

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

*Démonstration.* Soit  $A, B$  et  $C$  trois points de  $\mathcal{E}$ , alors d'après les axiomes (2) et (3)

on a

$$\begin{aligned}
 A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) &= (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} \\
 &= B + \overrightarrow{BC} \\
 &= C \\
 &= A + \overrightarrow{AC}
 \end{aligned}$$

d'où

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

□

**Proposition 1.1.2.** *Pour tous points  $A, B$  et  $O$  de  $\mathcal{E}$ , on a*

- 1)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff A = B$
- 2)  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
- 3)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

*Démonstration.* 1) En faisant  $A = B$  dans la relation de Chasles, on voit que

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AC} \quad \forall A, C \in \mathcal{E}$$

d'où  $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ . Réciproquement, si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$  alors d'après l'axiome (3) on a

$$B = A + \overrightarrow{0} = A$$

2) En faisant  $A = C$  dans la relation de Chasles, on obtient

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

3) découle de la relation de Chasles et de la propriété 2). □

**Remarque 1.1.** *On peut aussi définir un espace affine de direction  $E$  par un ensemble non vide  $\mathcal{E}$  muni d'une application  $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$  de  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$  dans  $E$ , vérifiant*

- (i) *Pour tout triplet  $(A, B, C)$  de points de  $\mathcal{E}$ , on a  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .*
- (ii) *pour tout point  $O$  de  $\mathcal{E}$ , l'application  $M \mapsto \overrightarrow{OM}$  est une bijection de  $\mathcal{E}$  dans  $E$ .*

En effet, pour tout  $(A, u) \in \mathcal{E} \times E$ , il existe un unique point  $B \in \mathcal{E}$  d'après (ii) tel que

$$\overrightarrow{AB} = u$$

On définit alors une application

$$\begin{aligned}
 \varphi : \mathcal{E} \times E &\longrightarrow \mathcal{E} \\
 (A, u) &\longmapsto B
 \end{aligned}$$

Vérifions que  $\varphi$  est une loi externe sur  $\mathcal{E}$  qui satisfait (1), (2) et (3) de la définition 1.1.1.

1) On a d'après (i)

$$\forall A \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{E} \quad \varphi(A, \overrightarrow{0}) = A$$

2) Soient  $A \in \mathcal{E}$  et  $u, v \in E$  alors il existe un unique point  $B \in \mathcal{E}$  et un unique point  $C \in \mathcal{E}$  d'après (ii) tel que

$$\begin{cases} u = \overrightarrow{AB} \\ v = \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi(A, u), v) &= \varphi(B, v) \\ &= C \\ &\stackrel{(i)}{=} \varphi(A, u + v) \end{aligned}$$

3) Découle de (ii).

d'où  $\varphi$  est une loi externe sur  $\mathcal{E}$ .

**Exemples 1.1.1.** i)  $E$  est muni d'une structure naturelle d'espace affine sur lui-même, où la loi + externe est la même que la loi + interne.

ii) Plus généralement, soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , et soit  $a \in E$ . Alors l'ensemble

$$\mathcal{F} := a + F = \{a + u / u \in F\}$$

est un espace affine de direction  $F$ .

**Définition 1.1.2. (Translation)** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine de direction  $E$ , et soit  $u$  un vecteur de  $E$ , alors la translation est l'application  $\tau_u$  donnée par

$$\begin{array}{ccc} \tau_u : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M + u \end{array}$$

On vérifie aisément les propriétés suivantes

- (1)  $\tau_{\vec{0}} = id_{\mathcal{E}}$
- (2)  $\forall u, v \in E, \quad \tau_{u+v} = \tau_u \circ \tau_v$
- (3)  $\forall A, B \in \mathcal{E} \quad \exists! u \in E, \quad \tau_u(A) = B$

**Définition 1.1.3.** On appelle droite (resp. plan) affine tout espace affine de dimension 1 (resp. 2).

## 1.2 Barycentres

La notion de barycentre est essentielle en géométrie affine. Elle joue un rôle identique à celui que tient la notion de combinaison linéaire en algèbre linéaire.

Dans ce paragraphe  $E$  est un  $\mathbb{R}$  - espace vectoriel de dimension finie, et  $\mathcal{E}$  est un espace affine de direction  $E$ .

**Définition 1.2.1.** Un système de points pondérés de  $\mathcal{E}$  est une famille finie  $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$  de couples  $(A_i, \lambda_i)$ , où pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $A_i$  est un élément de  $\mathcal{E}$  et  $\lambda_i$  un réel. Le poids total du système est le réel  $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

À tout système de points pondérés de  $\mathcal{E}$ , on associe une fonction  $\vec{f}$  de  $\mathcal{E}$  dans  $E$  appelée **fonction vectorielle de Leibniz** du système, donnée par

$$\vec{f}(M) := \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$$

**Proposition 1.2.1.** Soit  $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$  un système de points pondérés de  $\mathcal{E}$ .

1. Si le poids total du système est nul, la fonction vectorielle de Leibniz associée est constante.

2. Si le poids total du système n'est pas nul, la fonction vectorielle de Leibniz associée est une bijection de  $\mathcal{E}$  sur  $E$ . En particulier, il existe un et un seul point de  $E$  où cette fonction s'annule.

*Démonstration.* Soit  $O$  un point fixé de  $\mathcal{E}$ . On a pour tout point  $M$  de  $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \vec{f}(M) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \overrightarrow{MO} + \vec{f}(O) \end{aligned}$$

Il en résulte que si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ , alors  $\vec{f}(M) = \vec{f}(O)$  pour tout point  $M$  de  $\mathcal{E}$ .

Sinon, pour tout vecteur  $u$  de  $E$ , il existe un unique point  $M$  de  $\mathcal{E}$  vérifiant  $\vec{f}(M) = u$ , ce point étant défini par

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} (\vec{f}(O) - u)$$

□

**Définition 1.2.2.** Soit  $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$  un système de points pondérés de  $\mathcal{E}$  de poids total non nul (i.e.  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ ). On appelle barycentre de ce système l'unique point  $G$  de  $\mathcal{E}$  vérifiant

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

**Propriétés 1.2.1.** 1. Le barycentre ne dépend pas de l'ordre des points.

2. Homogénéité : le barycentre d'un système de points pondérés ne change pas lorsque l'on multiplie tous les poids  $\lambda_i$  par un même réel non nul.

3. Associativité : le barycentre d'un système de points pondérés ne change pas lorsque l'on remplace certains de ces points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients correspondants (à condition naturellement que cette somme ne soit pas nulle).

4. Si  $G$  est le barycentre du système de points pondérés  $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ , on a pour tout point  $O$  de  $\mathcal{E}$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

*Démonstration.* Les deux premières propriétés sont évidentes.

Pour démontrer la troisième, soit  $G$  le barycentre du système pondéré  $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ . Il suffit de considérer (en réordonnant éventuellement les points) le cas où les points que l'on regroupe sont  $A_1, \dots, A_p$  avec  $\sum_{i=1}^p \lambda_i \neq 0$ . En notant  $H$  le barycentre du système pondéré  $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, p}$ , on a alors

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{HA_i} = \vec{0}$$

et

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i \right) \overrightarrow{GH} + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} &= \sum_{i=1}^p \lambda_i (\overrightarrow{GA_i} + \overrightarrow{A_iH}) + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{A_iH} \\ &= \vec{0} - \sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{HA_i} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

ce qui montre que  $G$  est le barycentre du système pondéré  $[(H, \sum_{i=1}^p \lambda_i), (A_{p+1}, \lambda_{p+1}), \dots, (A_n, \lambda_n)]$ .

Maintenant, soit  $O$  un point quelconque de  $\mathcal{E}$  fixé. Alors la dernière propriété provient de la relation

$$\begin{aligned} \vec{f}(G) = \vec{0} &\iff \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \overrightarrow{GO} + \vec{f}(O) = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{GO} = \frac{-\vec{f}(O)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \\ &\iff \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \end{aligned}$$

□

### 1.3 Sous espace affine

Dans ce paragraphe  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $\mathcal{E}$  est un espace affine de direction  $E$ .

**Définition 1.3.1.** Une partie  $\mathcal{F}$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  s'il existe un point  $A$  de  $\mathcal{F}$  tel que

$$F := \{ \overrightarrow{AM} / M \in \mathcal{F} \}$$

soit un sous-espace vectoriel de  $E$ . On a alors

$$\mathcal{F} := \{A + u / u \in F\}$$

**Notation 1.2.** 1) Si  $u$  est un vecteur non nul de  $E$ , on notera  $D(A, u)$  la droite affine passant par  $A$  et de direction la droite vectorielle  $\mathbb{R}u$ . De même, si  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs linéairement indépendants, on notera  $P(A, u, v)$  le plan affine passant par  $A$  et de direction le plan vectoriel  $\mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v$  engendré par les deux vecteurs  $u$  et  $v$ .

2) Par définition la dimension d'un sous-espace affine est égale à la dimension de sa direction.

**Définition 1.3.2.** On appelle hyperplan de  $\mathcal{E}$  tout sous espace affine de  $\mathcal{E}$  de dimension égale à  $\dim(E) - 1$ .

**Théorème 1.3.1.** Une partie non vide  $\mathcal{F}$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  si et seulement si tout barycentre de points de  $\mathcal{F}$  appartient à  $\mathcal{F}$ .

*Démonstration.* Si  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ ,  $A$  un point de  $\mathcal{F}$  et  $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$  un système de points pondérés de  $\mathcal{F}$  de poids total non nul, le barycentre  $G$  de ce système vérifie

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{AA_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}.$$

Il en résulte que  $\overrightarrow{AG}$  appartient à  $F$ , puisque  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , et donc que  $G$  appartient à  $\mathcal{F}$ .

Réciproquement, soit  $\mathcal{F}$  une partie non vide de  $\mathcal{E}$  telle que tout barycentre de points de  $\mathcal{F}$  affectés de coefficients quelconques (de somme non nulle) appartient à  $\mathcal{F}$ , et  $A$  un point de  $\mathcal{F}$ . Pour tout couple  $(M, N)$  de points de  $\mathcal{F}$  et tout couple  $(\lambda, \mu)$  de réels, le point  $P$  de  $\mathcal{E}$  défini par

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{AN}$$

est le barycentre du système de points pondérés  $[(A, 1 - \lambda - \mu), (M, \lambda), (N, \mu)]$  qui appartient donc à  $\mathcal{F}$ . Il en résulte que

$$F = \{\overrightarrow{AM} / M \in \mathcal{F}\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $E$  non vide (car  $\overrightarrow{AA} = \vec{0} \in F$ ), et donc que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ .  $\square$

**Définition 1.3.3. (Parallélisme)** Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  de direction respectivement  $F$  et  $G$  alors on dit que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont parallèles, si la direction de l'un est un sous-espace vectoriel de celle de l'autre (i.e  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ ). En particulier, si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  ont même dimension (deux droites, deux plans, etc.) alors on dit qu'ils sont parallèles s'ils ont la même direction (i.e  $F = G$ ).

**Proposition 1.3.1. (Intersection)** L'intersection de toute famille (finie ou infinie) de sous-espaces affines d'un même espace affine est soit vide, soit un sous-espace affine de direction l'intersection des directions de ces sous-espaces affines.

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$ . Si l'intersection  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$  de cette famille est vide, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit  $A$  un point dans cette intersection. Pour tout  $i \in I$ , un point  $M$  de  $\mathcal{E}$  appartient à  $\mathcal{F}_i$  si et seulement si le vecteur  $\overrightarrow{AM}$  appartient à la direction  $F_i$  de  $\mathcal{F}_i$ , puisque  $A$  appartient à  $\mathcal{F}_i$ . Il en résulte que  $M$  appartient à  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$  si et seulement si  $\overrightarrow{AM}$  appartient au sous-espace vectoriel  $\bigcap_{i \in I} F_i$  de  $E$ , ce qui montre que  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  de direction  $\bigcap_{i \in I} F_i$ .  $\square$

## 1.4 Application affine

**Définition 1.4.1.** Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux espaces affines de direction respectivement  $E$  et  $F$ . Une application  $f$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$  est dite affine s'il existe une application linéaire  $L$  de  $E$  dans  $F$  telle que

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = L(\overrightarrow{AB}) \quad (A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$$

**Remarque 1.2.** Cette propriété peut encore s'écrire

$$f(M + u) = f(M) + L(u) \quad \forall M \in \mathcal{E}, \quad \forall u \in E$$

L'application  $L$  est alors uniquement déterminée, puisque pour tout vecteur  $u$  de  $E$  il existe un (en fait une infinité de) couple  $(A, B)$  de points de  $\mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{AB} = u$ . On l'appelle application linéaire associée à  $f$ , ou partie linéaire de  $f$ .

**Exemples 1.4.1.** – toute translation est une application affine d'application linéaire associée l'identité.

– une application  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est affine si et seulement si elle est de la forme  $f(x) = ax + b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels. L'application linéaire associée à  $f$  est alors donnée par  $L(x) = ax$ .

**Théorème 1.4.1.** Toute composée d'applications affines est une application affine, et la partie linéaire de la composée est la composée des parties linéaires.

*Démonstration.* Soient  $f$  et  $g$  deux applications affines, et soient  $L$  et  $G$  leurs applications linéaires associés respectivement. Alors, pour tout couple  $(A, B)$  de points de l'espace de départ de  $f$  on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{g \circ f(A)g \circ f(B)} &= G(\overrightarrow{f(A)f(B)}) \\ &= G(L(\overrightarrow{AB})) \\ &= G \circ L(\overrightarrow{AB}) \end{aligned}$$

et comme  $G \circ L$  est linéaire, alors  $g \circ f$  est une application affine et  $G \circ L$  l'application linéaire associé.  $\square$

**Proposition 1.4.1.** Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux espaces affines de direction respectivement  $E$  et  $F$ . Soit  $f$  une application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$ . On suppose qu'il existe un point  $O$  de  $\mathcal{E}$  tel que l'application  $L_O$  de  $E$  dans  $F$  définie par  $L_O(u) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$  pour tout vecteur  $u \in E$ , où  $M$  est l'unique point de  $\mathcal{E}$  tel que  $u = \overrightarrow{OM}$  soit linéaire. Alors  $f$  est affine et  $L_O$  est l'application linéaire associée à  $f$ . En particulier,  $L_O$  ne dépend alors pas du choix de  $O$ .

*Démonstration.* On a, pour tout couple  $(A, B)$  de points de  $\mathcal{E}$  on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(A)f(B)} &= \overrightarrow{f(O)f(B)} - \overrightarrow{f(O)f(A)} \\ &= L_O(\overrightarrow{OB}) - L_O(\overrightarrow{OA}) \\ &= L_O(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= L_O(\overrightarrow{AB})\end{aligned}$$

ce qui montre que  $f$  est affine de partie linéaire  $L_O$ .  $\square$

**Théorème 1.4.2.** *Une application  $f$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$  dans un espace affine  $\mathcal{F}$  est affine si et seulement si elle conserve les barycentres, i.e. si et seulement si, pour tout système  $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$  de points pondérés de  $\mathcal{E}$  de poids total non nul, l'image  $f(G)$  du barycentre  $G$  de ce système par  $f$  est le barycentre du système de points pondérés  $(f(A_i), \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$*

*Démonstration.* Si  $f$  est affine et si  $G$  est le barycentre du système  $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$  l'égalité

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i L(\overrightarrow{GA_i}) \\ &= L\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i}\right) \\ &= L(0_E) \\ &= 0_F\end{aligned}$$

montre que  $f(G)$  est le barycentre du système  $(f(A_i), \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$

Réciproquement, montrons que si  $f$  conserve les barycentres, l'application  $L_O$  considérée à la proposition 1.4.1 est linéaire pour tout point  $O$  de  $\mathcal{E}$ .

Soient donc  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels, et  $M, N$  les points de  $\mathcal{E}$  définis par

$$\overrightarrow{OM} = u, \quad \overrightarrow{ON} = v.$$

Et soit  $P$  le point de  $\mathcal{E}$  défini par

$$\overrightarrow{OP} = \lambda u + \mu v,$$

le point  $P$  est le barycentre du système pondéré  $[(O, 1 - \lambda - \mu), (M, \lambda), (N, \mu)]$ . Il en résulte que  $f(P)$  est le barycentre du système pondéré  $[(f(O), 1 - \lambda - \mu), (f(M), \lambda), (f(N), \mu)]$ , d'où

$$\begin{aligned}L_O(\lambda u + \mu v) &= \overrightarrow{f(O)f(P)} \\ &= \lambda \overrightarrow{f(O)f(M)} + \mu \overrightarrow{f(O)f(N)} \\ &= \lambda L_O(u) + \mu L_O(v)\end{aligned}$$

ce qui montre que  $L_O$  est linéaire.  $\square$

**Proposition 1.4.2. (Image et image réciproque d'un sous-espace affine)**

*Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux espaces affines de direction respectivement  $E$  et  $F$ , et  $f$  une application affine de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$ . L'image  $f(\mathcal{G})$  par  $f$  d'un sous-espace affine  $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$  de direction  $G$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{F}$ , de direction l'image  $L(G)$  de  $G$  par  $L$ .*

*De même, l'image réciproque  $f^{-1}(\mathcal{H})$  par  $f$  d'un sous-espace affine  $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$  de direction  $H$  est soit vide, soit un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  de direction  $L^{-1}(H)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{G}$  un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  et  $A$  un point de  $\mathcal{G}$ .  
L'égalité

$$\mathcal{G} = \{A + u / u \in G\}$$

implique que

$$\begin{aligned} f(\mathcal{G}) &= \{f(M) / M \in \mathcal{G}\} \\ &= \{f(A + u) / u \in G\} \\ &= \{f(A) + L(u) / u \in G\} \\ &= \{f(A) + v / v \in L(G)\} \end{aligned}$$

ce qui montre que  $f(\mathcal{G})$  est le sous-espace affine de  $\mathcal{F}$  passant par  $f(A)$  de direction  $L(G)$ .

Soit  $\mathcal{H}$  un sous-espace affine de  $\mathcal{F}$ . Si  $f^{-1}(\mathcal{H})$  n'est pas vide, on prend  $A$  un point de  $f^{-1}(\mathcal{H})$ . Alors un point  $M$  de  $\mathcal{E}$  appartient à  $f^{-1}(\mathcal{H})$  si et seulement si  $f(M)$  appartient à  $\mathcal{H}$ , i.e. si et seulement si  $\overrightarrow{f(A)f(M)} = L(\overrightarrow{AM})$  appartient à  $H$ , ou encore si et seulement si  $\overrightarrow{AM}$  appartient au sous-espace vectoriel  $L^{-1}(H)$  de  $E$ , ce qui montre que  $f^{-1}(\mathcal{H})$  est le sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  passant par  $A$  et de direction  $L^{-1}(H)$ .  $\square$

**Théorème 1.4.3.** *Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux espaces affines de direction respectivement  $E$  et  $F$ . Une application affine  $f$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$  est injective (resp. surjective) si et seulement si sa partie linéaire  $L$  est injective (resp. surjective).*

*Démonstration.* Une application affine  $f$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$  dans un espace affine  $\mathcal{F}$  est injective si et seulement si pour tout couple  $(A, B)$  de points de  $\mathcal{E}$ ,  $f(A) = f(B)$  équivaut à  $A = B$ . Mais  $f(A) = f(B)$  équivaut à  $\overrightarrow{f(A)f(B)} = L(\overrightarrow{AB}) = \vec{0}$ , i.e. à  $\overrightarrow{AB} \in \text{Ker}(L)$  et  $A = B$  équivaut à  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ . Il en résulte que  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker}(L) = \{\vec{0}\}$ , i.e. si et seulement si  $L$  est injective.

De même  $f$  est surjective si et seulement si  $f(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$ . Mais  $f(\mathcal{E})$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{F}$  de direction  $L(E) = \text{Im}(L)$ , c'est donc  $\mathcal{F}$  si et seulement si  $\text{Im}(L) = F$ , i.e. si et seulement si  $L$  est surjective.  $\square$

**Corollaire 1.4.1.** *Une application affine  $f$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$  dans un espace affine  $\mathcal{F}$  est bijective si et seulement si sa partie linéaire  $L$  est bijective. En particulier si  $\mathcal{E}$  de dimension finie et  $f$  une application affine de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$ , alors  $f$  est bijective si et seulement si  $L$  est injective (resp. surjective).*

## 1.5 Convexité

**Définition 1.5.1.** *Soient  $A$  et  $B$  deux points d'un espace affine  $\mathcal{E}$ . Le segment  $AB$ , noté  $[A, B]$ , est l'ensemble des barycentres de  $A$  et  $B$  affectés de coefficients tous deux positifs, i.e.*

$$[A, B] = \{tA + (1 - t)B / t \in [0, 1]\}$$

**Définition 1.5.2.** *Une partie  $C$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$  est dite convexe si pour tout couple  $(A, B)$  de points de  $C$  le segment  $[A, B]$  est inclus dans  $C$ .*

**Exemples 1.5.1.** - *Tout sous-espace affine d'un espace affine (en particulier l'espace lui-même) est convexe.*

- Une fonction réelle  $f$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe. (on appelle épigraphe de  $f$  l'ensemble

$$\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} / y \geq f(x)\}$$

des points situés au-dessus du graphe de  $f$ ).

**Proposition 1.5.1.** Une partie  $C$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$  est convexe si et seulement si tout barycentre de points de  $C$  affectés de coefficients tous positifs appartient à  $C$ .

*Démonstration.* Si tout barycentre de points de  $C$  affectés de coefficients tous positifs appartient à  $C$ , pour tout couple  $(A, B)$  de points de  $C$  le segment  $[A, B]$  est inclus dans  $C$  puisque ce segment est l'ensemble des barycentres de  $A$  et  $B$  affectés de coefficients tous deux positifs.  $C$  est donc convexe.

Réciproquement, si  $C$  est convexe, on démontre par récurrence sur  $n$  que tout barycentre de  $n$  points de  $C$  affectés de coefficients tous positifs appartient à  $C$ .

La propriété est vraie pour  $n = 2$  par hypothèse. Maintenant, supposons qu'elle est vraie pour  $n$  et montrons qu'elle est vraie pour  $n + 1$ .

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  un  $n + 1$  uplets de points de  $C$  affectés des coefficients tous positifs  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ . Alors le barycentre  $G$  de ce système de points pondérés est le

barycentre du système  $[(G', \sum_{i=1}^n \alpha_i), (A_{n+1}, \alpha_{n+1})]$  où  $G'$  est le barycentre du système

$$(A_i, \alpha_i)_{i=1, \dots, n}.$$

Comme  $G'$  appartient à  $C$  par l'hypothèse de récurrence et  $G$  appartient au segment  $[G', A_{n+1}]$  qui est inclus dans  $C$  car  $C$  est convexe, alors  $G \in C$ . □

**Proposition 1.5.2.** Toute intersection de convexes est convexe.

*Démonstration.* Soit  $(C_i)_{i \in I}$  une famille de convexes indexée par un ensemble  $I$  quelconque. Notons  $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ , on a

$$\begin{aligned} A, B \in C &\Rightarrow \forall i \in I \quad A, B \in C_i \\ &\Rightarrow \forall i \in I \quad [A, B] \subset C_i \\ &\Rightarrow [A, B] \subset C \end{aligned}$$

d'où  $C$  est convexe. □

## 1.6 Espace affine euclidien

**Définition 1.6.1. (Produit scalaire)** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  - espace vectoriel.

Un produit scalaire est une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant pour tous  $x, y, z \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

- (1)  $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$
- (2)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (3)  $\langle x, x \rangle \geq 0$
- (4)  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

**Remarque 1.3.** Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie et positive.

**Définition 1.6.2. (Espace euclidien)** Un espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien** en particulier si  $E$  de dimension finie alors  $E$  est un **espace euclidien**.

**Définition 1.6.3. (Orthogonal)** Soient  $E$  un espace euclidien, et soit  $A$  une partie non vide de  $E$ .

On définit l'orthogonal de  $A$  par

$$A^\perp := \{u \in E / \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in A\}$$

**Définition 1.6.4. (Distance)** Soit  $E$  un ensemble quelconque, et soit la fonction  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant pour tous  $x, y, z \in E$

- (1)  $d(x, y) \geq 0$
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$
- (3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(x, z)$
- (4)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$

Une telle fonction  $d$  est appelée **distance** sur  $E$ .

**Remarque 1.4.** 1) Si  $E$  étant un espace vectoriel normé alors on définit la distance  $d$  sur  $E$  par

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

2) Si  $E$  étant un espace affine alors on définit la distance  $d$  sur  $E$  par

$$d(A, B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \|B - A\|$$

**Définition 1.6.5. (Espace métrique)** Un ensemble  $E$  muni d'une distance  $d$  est appelé un **espace métrique**.

**Définition 1.6.6. (espace affine euclidien)** Un espace affine euclidien est un espace affine de direction  $E$ , avec  $E$  étant un espace euclidien.

**Définition 1.6.7. (sous-espace affine euclidien)** Un sous-espace affine euclidien est un sous-espace affine de direction  $F$ , avec  $F$  étant un sous-espace euclidien d'un espace euclidien  $E$ .

## 1.7 Projection

**Définition 1.7.1. (Distance d'un point à une partie)** Si  $A$  est une partie non vide d'un espace métrique  $E$ , et si  $x$  est un élément de  $E$ , on définit la distance de  $x$  à  $A$  comme une borne inférieure

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) / a \in A\} = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

**Définition 1.7.2. (Espace de Hilbert)** Soit  $H$  un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qu'on notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Notons  $\|\cdot\|$  la norme associé c.à.d

$$\forall x \in H \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

On dit que  $H$  est un **espace de Hilbert** si  $(H, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach c.à.d  $(H, \|\cdot\|)$  est complet.

### 1.7.1 Théorème général de la projection

**Théorème 1.7.1.** Soit  $H$  un espace de Hilbert, et soit  $C$  un convexe fermé non vide de  $H$ . Alors

(i) Pour tout  $x \in H$  il existe un unique élément de  $C$  appelé projection de  $x$  sur  $C$ , et noté  $p_C(x)$  tel que

$$\|x - p_C(x)\| = d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

(ii) L'unique élément  $p_C(x)$  est caractérisée par les inéquations variationnelles

$$\begin{cases} p_C(x) \in C \\ \langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C \end{cases}$$

*Démonstration.* (i) Existence : Soit  $x \in H$ . Alors d'après la caractérisation de la borne inférieure on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists y_n \in C, \quad \|x - y_n\|^2 < d^2(x, C) + \frac{1}{n+1} \quad (*)$$

Montrons que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. On sait que pour tout  $u, v \in H$  on a

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

pour  $u = x - y_q$  et  $v = x - y_p$  on a

$$\left\| x - \frac{y_p + y_q}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{y_p - y_q}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x - y_q\|^2 + \|x - y_p\|^2) \quad (1.1)$$

et comme  $C$  étant convexe on a

$$\frac{y_p + y_q}{2} \in C \quad \Rightarrow \quad \left\| x - \frac{y_p + y_q}{2} \right\|^2 \geq d^2(x, C) \quad (1.2)$$

et on a d'après (\*)

$$\frac{1}{2}(\|x - y_q\|^2 + \|x - y_p\|^2) < d^2(x, C) + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{q+1} + \frac{1}{p+1} \right]$$

donc on combine ceci avec (\*), (1.1) et (1.2) on obtient

$$d^2(x, C) + \left\| \frac{y_p - y_q}{2} \right\|^2 < d^2(x, C) + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{q+1} + \frac{1}{p+1} \right]$$

d'où

$$\|y_p - y_q\|^2 < 2 \left[ \frac{1}{q+1} + \frac{1}{p+1} \right]$$

donc  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans  $H$  qui est complet. Ainsi  $\exists \bar{y} \in H$  tel que  $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \bar{y}$ . Et comme  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C$  alors  $\bar{y} \in \bar{C} = C$  (car  $C$  est fermé).

En passant à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  dans (\*) puisque  $y \mapsto \|x - y\|^2$  est continue on obtient

$$\begin{aligned} \|x - \bar{y}\|^2 \leq d^2(x, C) \leq \|x - \bar{y}\|^2 &\Rightarrow d(x, C) = \|x - \bar{y}\| \\ &\Rightarrow \bar{y} = p_C(x) \end{aligned}$$

Unicité : Supposons que  $u_1, u_2 \in C$  sont deux projections de  $x$  sur  $C$ , alors

$$\begin{cases} \langle x - u_1, y - u_1 \rangle \leq 0 & \forall y \in C & (1) \\ \langle x - u_2, y - u_2 \rangle \leq 0 & \forall y \in C & (2) \end{cases}$$

On prend  $y = u_2$  dans (1) et  $y = u_1$  dans (2), donc

$$\begin{aligned} \begin{cases} \langle x - u_1, u_2 - u_1 \rangle \leq 0 \\ \langle x - u_2, u_1 - u_2 \rangle \leq 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \langle u_1 - x, u_1 - u_2 \rangle \leq 0 \\ \langle x - u_2, u_1 - u_2 \rangle \leq 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \langle u_1 - x + x - u_2, u_1 - u_2 \rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow \|u_1 - u_2\|^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow \|u_1 - u_2\| = 0 \\ &\Rightarrow u_1 = u_2 \end{aligned}$$

(ii) Caractérisation variationnelle : Soit  $y \in C$  et  $t \in ]0, 1]$ , comme  $C$  est convexe on a

$$(1 - t)p_C(x) + ty \in C$$

donc

$$\|x - p_C(x)\|^2 = d^2(x, C) \leq \|x - (1 - t)p_C(x) - ty\|^2$$

et comme

$$\|x - (1 - t)p_C(x) - ty\|^2 = \|x - p_C(x)\|^2 + t^2\|y - p_C(x)\|^2 - 2t\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle$$

alors

$$\|x - p_C(x)\|^2 \leq \|x - p_C(x)\|^2 + t^2\|y - p_C(x)\|^2 - 2t\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle$$

donc

$$\begin{aligned} 0 \leq t\|y - p_C(x)\|^2 - 2\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle &\stackrel{t \rightarrow 0^+}{\Rightarrow} 0 \leq -2\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \\ &\Rightarrow \langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que  $z \in C$  vérifie

$$\langle x - z, y - z \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C$$

Montrons que  $z = p_C(x)$ .

Soit  $y \in C$  on a

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x - z + z - y\|^2 \\ &= \|x - z\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\langle x - z, z - y \rangle \\ &\geq \|x - z\|^2 \end{aligned}$$

donc

$$\forall y \in C \quad \|x - y\|^2 \geq \|x - z\|^2 \quad \Rightarrow \quad d^2(x, C) \geq \|x - z\|^2$$

Or  $z \in C$ , donc

$$d^2(x, C) \leq \|x - z\|^2$$

d'où

$$d^2(x, C) = \|x - z\|^2$$

et par conséquent  $z = p_C(x)$ . □

**Proposition 1.7.1.** Soient  $H$  un espace de Hilbert, et  $C$  un convexe fermé non vide de  $H$ . Alors pour tous  $x, y \in H$  on a

- (i)  $\langle x - y, p_C(x) - p_C(y) \rangle \geq 0$
- (ii)  $\|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|$

*Démonstration.* Comme  $p_C(x), p_C(y) \in C$  alors

$$\begin{cases} \langle y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y) \rangle \leq 0 \\ \langle p_C(x) - x, p_C(x) - p_C(y) \rangle \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \langle y - x, p_C(x) - p_C(y) \rangle + \|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \leq 0$$

On a d'une part

$$\langle x - y, p_C(x) - p_C(y) \rangle \geq \|p_C(x) - p_C(y)\|^2$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \|p_C(x) - p_C(y)\|^2 &\leq \langle x - y, p_C(x) - p_C(y) \rangle \\ &\leq \|x - y\| \|p_C(x) - p_C(y)\| \end{aligned}$$

d'où (i) et (ii). □

**Proposition 1.7.2.** Soient  $E$  un espace euclidien, et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors la projection de tous  $x$  dans  $E$  sur  $F$  est l'unique élément de  $F$  tel que

$$\|x - p_F(x)\| = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

de plus elle est caractérisée par

$$\begin{cases} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \in F^\perp \end{cases}$$

*Démonstration.* On a  $E$  est un espace de Hilbert et  $F$  un convexe fermé alors d'après le théorème 1.7.1. on a

$$\|x - p_F(x)\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

de plus cette projection est caractérisée par

$$\begin{aligned} \forall y \in F \quad \langle x - p_F(x), y - p_F(x) \rangle \leq 0 &\iff \forall z \in F \quad \langle x - p_F(x), z \rangle \leq 0 \\ &\iff \forall z \in F \quad \langle x - p_F(x), z \rangle = 0 \\ &\iff x - p_F(x) \in F^\perp \end{aligned}$$

□

**Remarque 1.5.** Si  $F$  est un espace vectoriel fermé,  $p_F(x)$  s'appelle **la projection orthogonale** car elle est caractérisée par  $x - p_F(x) \in F^\perp$ .

**Proposition 1.7.3.** Sous les hypothèses de la proposition 1.7.2. on a la projection orthogonale est une application linéaire.

*Démonstration.* Soient  $x_1, x_2 \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on pose

$$z = p_F(x_1) + \alpha p_F(x_2) \in F$$

On a

$$\begin{aligned}
x_1 + \alpha x_2 - z &= x_1 + \alpha x_2 - p_F(x_1) - \alpha p_F(x_2) \\
&= x_1 - p_F(x_1) + \alpha(x_2 - p_F(x_2)) \\
\Rightarrow &\begin{cases} z \in F \\ x_1 + \alpha x_2 - z \in F^\perp \end{cases} \\
\Rightarrow &z = p_F(x_1 + \alpha x_2) \\
\Rightarrow &p_F(x_1 + \alpha x_2) = p_F(x_1) + \alpha p_F(x_2)
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

## 1.7.2 Projection orthogonale d'un point sur un sous-espace affine

**Définition 1.7.3.** Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Soit  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine de  $E$  de direction  $F$ , et  $A$  un point quelconque de  $\mathcal{F}$ . Alors on définit la projection orthogonale d'un point  $M$  de  $E$  sur  $\mathcal{F}$  par

$$\begin{aligned}
p_{\mathcal{F}} : E &\longrightarrow \mathcal{F} \\
M &\longmapsto A + p_F(\overrightarrow{AM})
\end{aligned}$$

où  $p_F$  est la projection orthogonale sur  $F$ .

**Remarque 1.6.** cette définition a bien un sens car  $p_{\mathcal{F}}$  ne dépend pas du choix de  $A$ .

En effet, soit  $B$  un autre point de  $\mathcal{F}$  différent à  $A$ , alors on a

$$\begin{aligned}
B + p_F(\overrightarrow{BM}) &= A + (B - A) + p_F(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \\
&= A + \overrightarrow{AB} + p_F(\overrightarrow{BA}) + p_F(\overrightarrow{AM}) \\
&= A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + p_F(\overrightarrow{AM}) \\
&= A + p_F(\overrightarrow{AM}) \\
&= p_{\mathcal{F}}(M)
\end{aligned}$$

**Proposition 1.7.4.** Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Soit  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine de  $E$  de direction  $F$ , et  $M$  un point quelconque de  $E$ . Alors on a

$$d(M, \mathcal{F}) = \inf_{A \in \mathcal{F}} \|M - A\| = \|M - H\| = \|\overrightarrow{MH}\|$$

où

$$H = p_{\mathcal{F}}(M)$$

Autrement dit,  $H$  réalise la plus courte distance de  $M$  à  $F$ .

*Démonstration.* Soit  $A \in \mathcal{F}$ , alors on a

$$\|M - A\|^2 = \|M - H + H - A\|^2$$

or

$$\begin{cases} H - A = \overrightarrow{AH} \in F \\ M - H = \overrightarrow{AM} - p_F(\overrightarrow{AM}) \in F^\perp \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \|M - A\|^2 &= \|M - H\|^2 + \|H - A\|^2 \\ &\geq \|M - H\|^2 \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

## 1.8 Exemples de calcul

Dans ce paragraphe on travaille dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique.

**Proposition 1.8.1.** *Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine dont l'équation cartésienne est donnée par*

$$ax + by + cz = d$$

*alors la direction de  $\mathcal{P}$  est le plan vectoriel  $P$  donné par*

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = 0\}$$

*Démonstration.* Soit  $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P}$  fixé, alors on a

$$\begin{aligned} M = (x, y, z) \in \mathcal{P} &\iff ax + by + cz = d \\ &\iff ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 \\ &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \end{aligned}$$

Soit  $n = (a, b, c)$  alors

$$\begin{aligned} M = (x, y, z) \in \mathcal{P} &\iff \langle \overrightarrow{M_0M}, n \rangle = 0 \\ &\iff \overrightarrow{M_0M} \in n^\perp \end{aligned}$$

d'où la direction du plan affine  $\mathcal{P}$  est

$$\begin{aligned} P &= n^\perp \\ &= \{u \in \mathbb{R}^3 / \langle u, n \rangle = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = 0\} \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

**Proposition 1.8.2.** (*Distance d'un point à un plan affine*) *Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine de direction  $P$  où les équations cartésiennes de  $\mathcal{P}$  et  $P$  sont données par*

$$\begin{cases} \mathcal{P} : ax + by + cz = d \\ P : ax + by + cz = 0 \end{cases}$$

*et soit  $M(x, y, z)$  un point quelconque de  $\mathbb{R}^3$ . Alors la distance de  $M$  à  $\mathcal{P}$  est donné par*

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

*Démonstration.* On a  $d(M, \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{MH}\|$  avec  $H = p_{\mathcal{P}}(M)$   
et comme  $\vec{n} = (a, b, c)$  est un vecteur normal à  $\mathcal{P}$ , et  $\overrightarrow{MH} \in P^{\perp}$ . Alors  $\overrightarrow{MH}$  est  
colinéaire avec  $\vec{n}$  i.e

$$\overrightarrow{MH} = \lambda \vec{n} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Soit  $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P}$ , on a d'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH}$$

donc on a d'une part

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{MH}, \vec{n} \rangle &= \langle \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH}, \vec{n} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{MA}, \vec{n} \rangle \end{aligned}$$

et d'autre part d'après (1.3)

$$\langle \overrightarrow{MH}, \vec{n} \rangle = \lambda \|\vec{n}\|^2$$

donc

$$\lambda = \frac{\langle \overrightarrow{MA}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}$$

alors on combinaison ceci avec (1.3) on obtient

$$\overrightarrow{MH} = \frac{\langle \overrightarrow{MA}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{P}) &= \frac{|\langle \overrightarrow{MA}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} \\ &= \frac{|a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

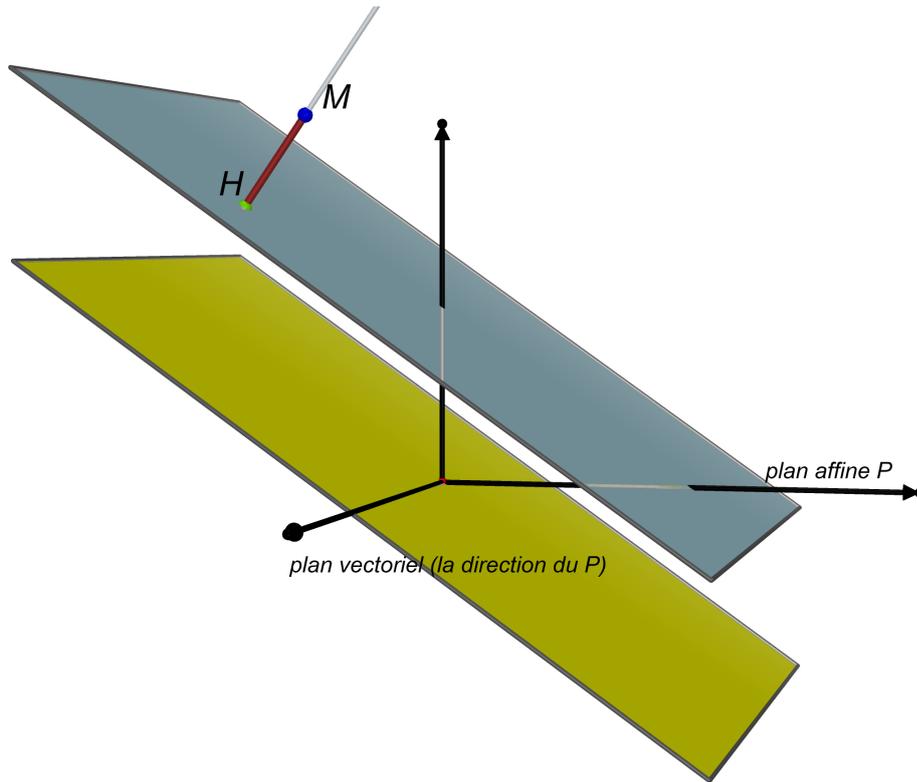


FIGURE 1.1 – Distance d'un point à un plan affine

**Proposition 1.8.3.** (*Distance d'un point à une droite affine*) Soit  $\Delta = D(A, \vec{u})$  une droite affine qui passe par le point  $A$  et de direction la droite vectoriel  $\mathbb{R}\vec{u}$ , et soit  $M(x, y, z)$  un point quelconque de  $\mathbb{R}^3$ . Alors la distance de  $M$  à  $\Delta$  est donné par

$$d(M, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

*Démonstration.* On a  $d(M, \Delta) = \|\overrightarrow{MH}\|$  avec  $H = p_{\Delta}(M)$ .  
On a d'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH}$$

donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u} &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH}) \wedge \vec{u} \\ &= \overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|^2 &= \|\overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{MH}\|^2 \cdot \|\vec{u}\|^2 - (\langle \overrightarrow{MH}, \vec{u} \rangle)^2 \\ &= \|\overrightarrow{MH}\|^2 \cdot \|\vec{u}\|^2\end{aligned}$$

d'où

$$d(M, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

□

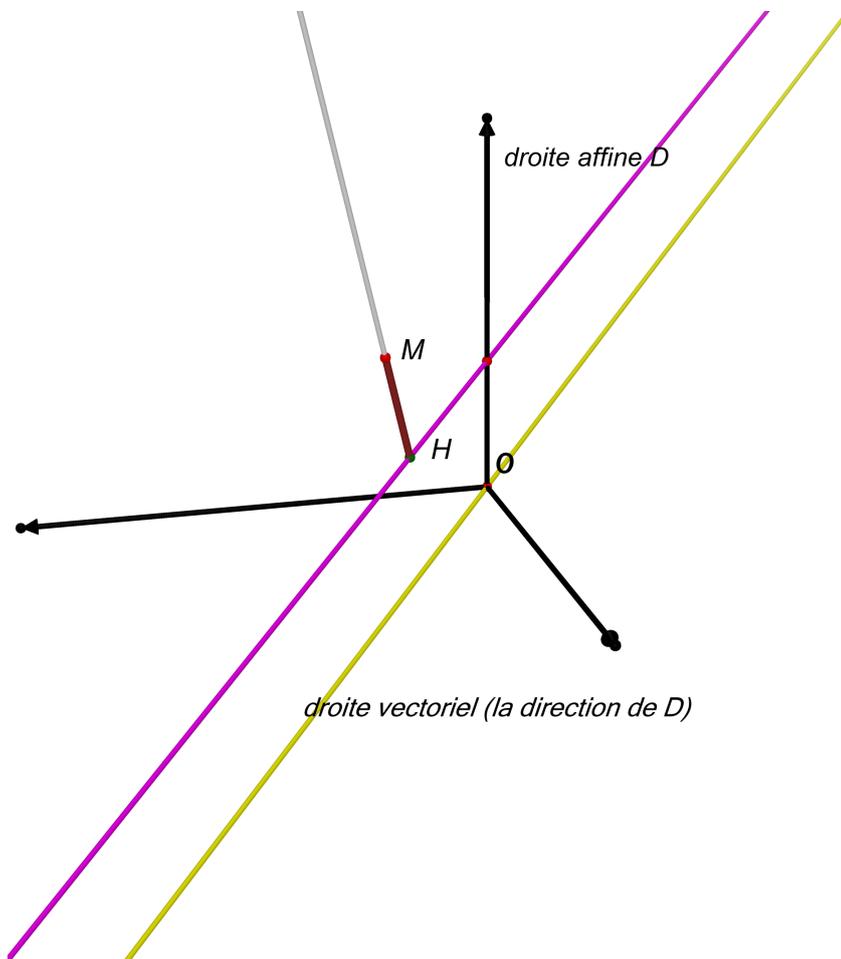


FIGURE 1.2 – Distance d'un point à une droite affine

# Chapitre 2

## Quelques projections sphériques et isométries

Ce chapitre est une introduction à un autre type de la géométrie c'est la géométrie différentielle. On définit d'abord la notion d'une courbe, d'une surface et de la différentiabilité. Ensuite on va voir quelques types des projections sphériques, après on parle un peu aux notions du plan tangent, des formes fondamentales et on termine ce chapitre par la notion d'isométrie entre deux surfaces. Ceci est tout attaché avec quelques illustrations qui sont réalisées par deux logiciels *Cabri 3D* et *Géogébra*.

### 2.1 Rappel sur les courbes et les surfaces

#### Définition 2.1.1. (Courbe)

Une courbe paramétrée de classe  $C^k$  est une application  $\gamma$  définie sur un intervalle  $I$  de classe  $C^k$  est à valeur dans  $\mathbb{R}^3$ .

Le support de  $\gamma$  est le sous-ensemble  $\Gamma$  donné par

$$\Gamma := \{(x(t), y(t), z(t)) / t \in I\}$$

**Remarque 2.1.** On appelle courbe plane toute courbe paramétrée  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  contenu dans un plan affine, i.e

$$\gamma(I) \subset \mathcal{P}$$

Voici quelques exemples des courbes paramétrées

#### Exemples 2.1.1. 1)

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^3, t^2) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(x, y) / \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t = \sqrt[3]{x} \\ y = |x|^{\frac{2}{3}} \end{cases}\} \\ &= C_f \end{aligned}$$

où  $f$  donnée par

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x|^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

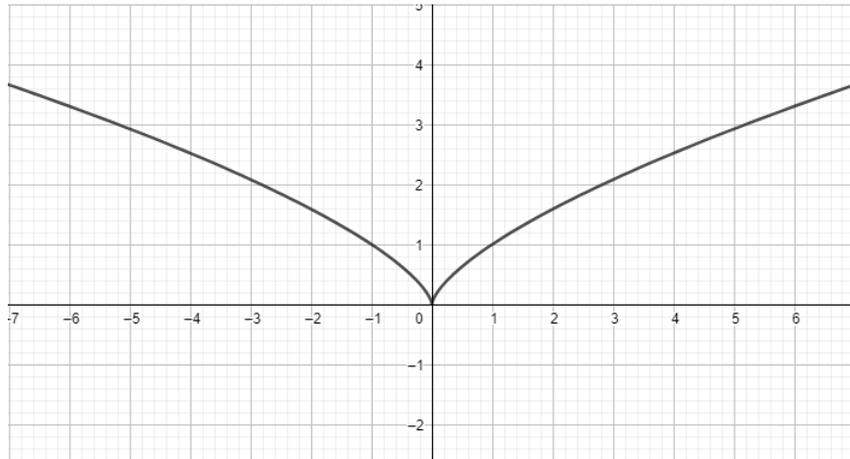


FIGURE 2.1 – Le support de  $\gamma_1$

2) Soient  $a, b > 0$  alors on a

$$\begin{aligned} \gamma_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (a \cos t, b \sin t) \end{aligned}$$

est une courbe paramétrée appelée **ellipse**.

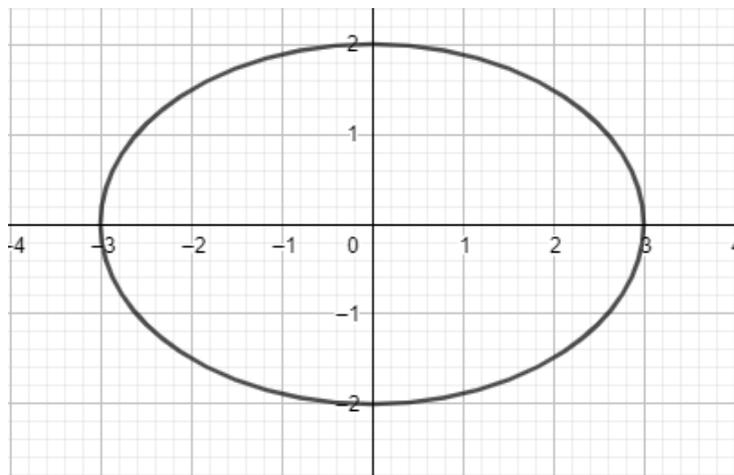


FIGURE 2.2 – Le support de  $\gamma_2$  avec  $a = 3$  et  $b = 2$

3) Soient  $r, R > 0$  alors on a

$$\begin{aligned} \gamma_3 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (r \cos t, r \sin t, Rt) \end{aligned}$$

est une courbe paramétrée appelée **hélice**.

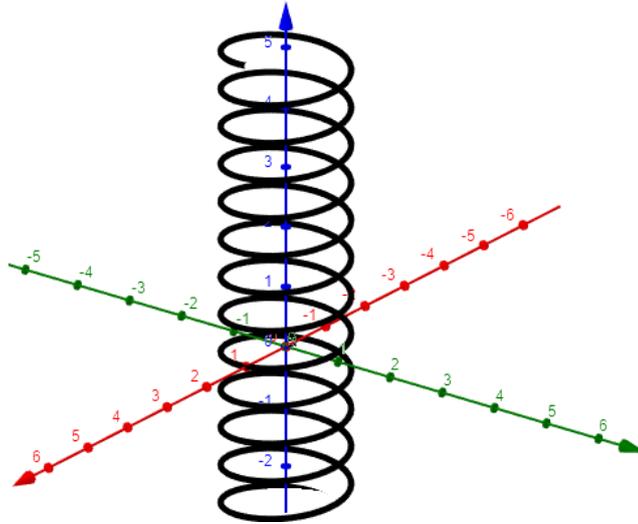


FIGURE 2.3 – Le support de  $\gamma_3$  avec  $r = 1$  et  $R = \frac{1}{10}$

**Définition 2.1.2. (Longueur)**

Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée de classe  $C^1$ . Alors on définit la longueur de  $\gamma$  par

$$L_a^b(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds$$

**Définition 2.1.3. (Surface)**

Un sous-ensemble  $S \subset \mathbb{R}^3$  est dit surface si pour tout point  $p \in S$ , il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^3$  et une application  $\varphi : U \rightarrow S$  de classe  $C^\infty$  telle que

- (i)  $\varphi$  est un homéomorphisme de  $U$  sur  $W \cap S$ .
- (ii) Pour tout  $(s, t) \in U$ , la différentielle  $(d\varphi)_{(s,t)}$  est injective.

**Définition 2.1.4.** Soit  $S$  une surface. Alors le couple  $(U, \varphi)$  est appelé une paramétrisation locale de  $S$  et l'application  $\varphi^{-1} : W \cap S \rightarrow U$  est dite une carte locale de  $S$ .

**Exemples 2.1.2.** 1) Soient  $u, v \in \mathbb{R}^3$  tel que  $u \wedge v \neq \vec{0}$  et  $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  alors le plan affine

$$\mathcal{P} = M_0 + \text{Vect}\{u, v\},$$

est une surface. En effet considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\longmapsto M_0 + su + tv \end{aligned}$$

On a  $\varphi_1$  est de classe  $C^\infty$  et

$$\varphi_1(\mathbb{R}^2) = \mathcal{P} = \mathcal{P} \cap \mathbb{R}^3$$

Puisque pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right)(s, t) = u \wedge v \neq \vec{0}$$

alors  $(d\varphi_1)_{(s,t)}$  est injective. Et comme  $\varphi_1^{-1}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1} : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ M &\longmapsto \frac{1}{\|u \wedge v\|^2} \begin{pmatrix} \|v\|^2 & -\langle u, v \rangle \\ -\langle u, v \rangle & \|u\|^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle M - M_0, u \rangle \\ \langle M - M_0, v \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors  $\varphi$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathcal{P}$ .

2) La sphère  $S_r$  de centre  $O = (0, 0, 0)$  et de rayon  $r > 0$  est une surface. En effet l'application

$$\begin{aligned} \varphi_2 : ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ &\longrightarrow S_r \\ (u, v) &\longmapsto (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u) \end{aligned}$$

est une paramétrisation locale de  $S_r$ .

3) Soient  $a, b > 0$  l'ensemble

$$\Sigma = \{(x, y, z) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

est une surface est appelée un **cylindre elliptique**. En effet l'application

$$\begin{aligned} \varphi_3 : ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} &\longrightarrow S_r \\ (u, v) &\longmapsto (a \cos u, b \sin u, v) \end{aligned}$$

est une paramétrisation locale de  $\Sigma$ .

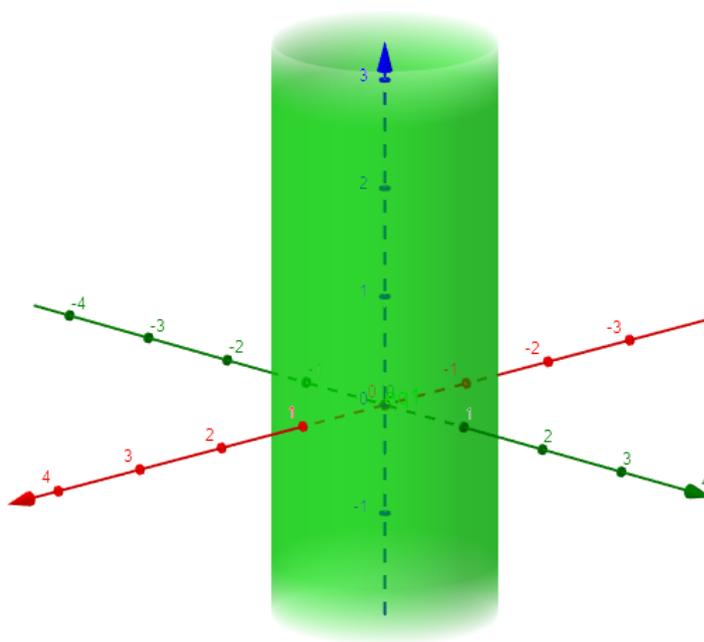


FIGURE 2.4 – La surface  $\Sigma$  avec  $a = 1$  et  $b = 1$

4) Soient  $a, b > 0$  l'ensemble

$$S_1 = \{(x, y, z) / \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z\}$$

est une surface est appelée un **parabolöde hyperbolique**. En effet l'application

$$\begin{aligned} \varphi_4 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S_1 \\ (u, v) &\longmapsto \left( \frac{a(u+v)}{2}, \frac{b(u-v)}{2}, uv \right) \end{aligned}$$

est une paramétrisation locale de  $S_1$ .

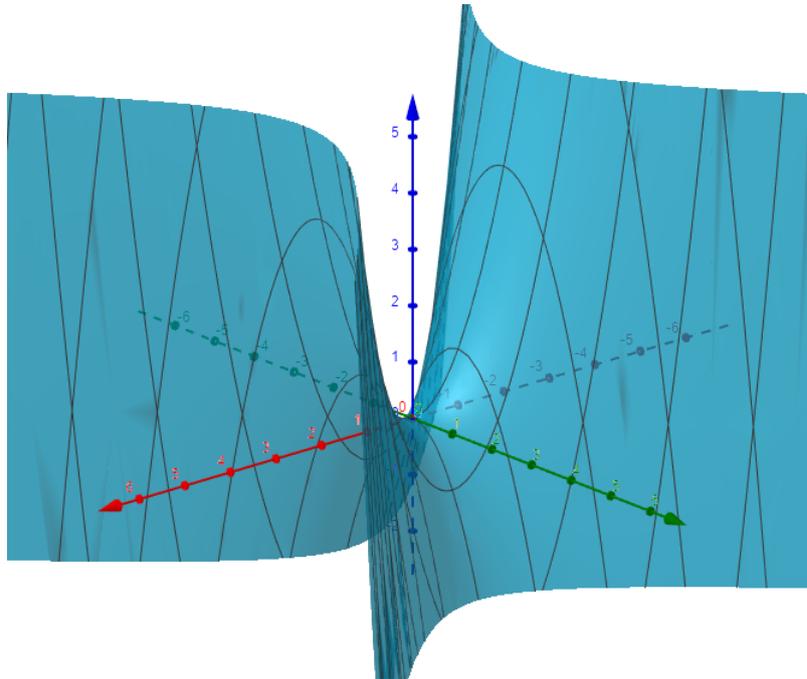


FIGURE 2.5 – La surface  $S_1$  avec  $a = 1$  et  $b = 1$

5) Soient  $a, b, c > 0$  l'ensemble

$$S_2 = \{(x, y, z) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\}$$

est une surface est appelée un **hyperbolöde à deux nappes**. En effet l'application

$$\begin{aligned} \varphi_5 : ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} &\longrightarrow S_2 \\ (u, v) &\longmapsto (a \cos u \sinh v, b \sin u \sinh v, c \cosh v) \end{aligned}$$

est une paramétrisation locale de  $S_2$ .

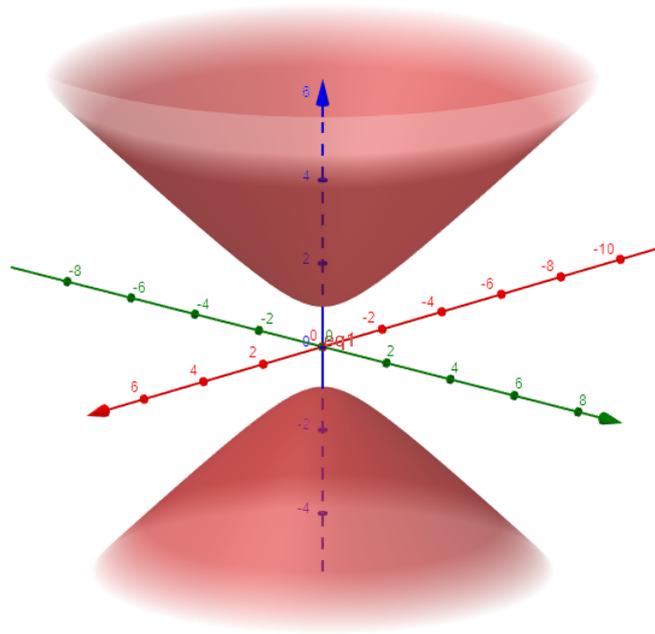


FIGURE 2.6 – La surface  $S_2$  avec  $a = b = c = 1$

6) Soient  $r, R > 0$  l'ensemble

$$\mathbb{T} = \{(x, y, z) / (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$$

est une surface est appelée un **tore**. En effet l'application

$$\begin{aligned} \varphi_5 : ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[ &\longrightarrow S_2 \\ (u, v) &\longmapsto ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u) \end{aligned}$$

est une paramétrisation locale de  $\mathbb{T}$ .

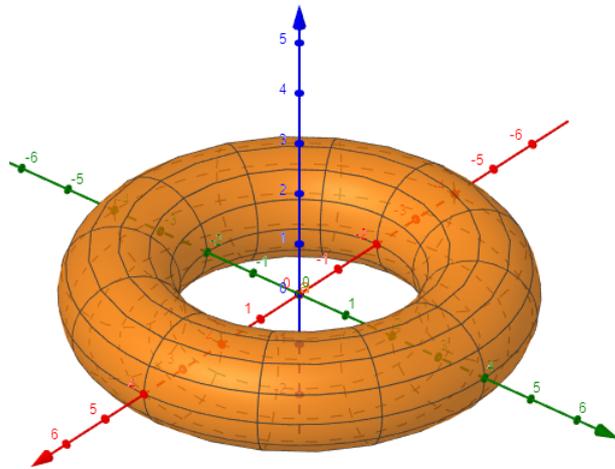


FIGURE 2.7 – La surface  $\mathbb{T}$  avec  $r = 1$  et  $R = 3$

**Définition 2.1.5. (Région)**

On appelle une région  $R$  d'une surface  $S$  toute partie  $R$  compacte telle qu'il existe une paramétrisation locale  $\varphi : U \rightarrow S$  telle que  $R \subset \varphi(U)$

**Lemme 2.1.1.** Soit  $S$  une surface, et  $(\varphi, U)$  une paramétrisation locale. Soit  $F : (s, t) \rightarrow (u(s, t), v(s, t))$  un changement de variable d'un ouvert  $U' \subset \mathbb{R}^2$  sur  $U$ . Donc  $\phi = \varphi \circ F$  est une paramétrisation locale de  $S$  et pour tout  $(s, t) \in U'$  on a

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)(s, t) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)(u, v)$$

*Démonstration.* Il est clair que  $\phi$  est un homéomorphisme de  $U'$  sur  $W$  (un ouvert de  $S$ ), et on a pour tout  $(s, t) \in U'$

$$\begin{aligned} \phi(s, t) &= \varphi \circ F(s, t) \\ &= \varphi(u(s, t), v(s, t)) \end{aligned}$$

donc en dérive on trouve

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial v}{\partial s}(s, t) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial v}{\partial t}(s, t) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \end{cases}$$

donc

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)(s, t) = \left( \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) \frac{\partial v}{\partial t}(s, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) \frac{\partial v}{\partial s}(s, t) \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)(u, v)$$

D'où le résultat. □

**Définition 2.1.6.** L'aire d'une région  $R$  de  $\varphi(U)$  est donné par

$$\mathcal{A}(R) := \iint_{\varphi^{-1}(R)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\| (x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

**Remarque 2.2.** Cette définition a bien un sens, c'est à dire elle ne dépend pas du choix de la paramétrisation. En effet si  $\phi$  une autre paramétrisation on a

$$\iint_{\phi^{-1}(R)} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\| (s, t) ds dt = \iint_{\varphi^{-1}(R)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\| (x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

ceci découle du lemme 2.2.1. et du théorème du changement de variable pour les intégrales multiples.

**Définition 2.1.7.** - Soit  $S$  une surface et  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On dira que  $f$  est de classe  $C^k$  en un point  $p$  de  $S$  s'il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^3$  et une application  $\tilde{f} : W \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  tel que  $\tilde{f} = f$  sur  $W \cap S$ .

- Plus généralement,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^k$  si et seulement si  $f_i$  est de classe  $C^k$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

- Lorsque  $f : S_1 \rightarrow S_2$  est une application entre deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ .  $f$  sera dite de classe  $C^k$  lorsque l'application  $j \circ f : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est de classe  $C^k$  où  $j$  est l'injection canonique.

**Définition 2.1.8. (Difféomorphisme)** Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces et  $f$  une application de  $S_1$  vers  $S_2$ . Alors on dit que  $f$  est un  $C^k$  difféomorphisme si  $f$  est de classe  $C^k$  bijective dont la réciproque est de classe  $C^k$ .

## 2.2 Projection stéréographique

Soit une sphère dans un espace euclidien tridimensionnel. Essayons de représenter cette sphère ou une partie de cette sphère dans un plan n'est pas un problème facile. On inventé de nombreuses méthodes pour essayer de projeter des points de la sphère sur un plan. Nous parlons ici d'une projection particulière, c'est *la projection stéréographique*.

### 2.2.1 Définition de la projection stéréographique

Soit  $\mathbb{S}^2$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  définit par

$$\mathbb{S}^2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 / u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$

et  $N = (0, 0, 1)$  son pôle nord. En identifiant  $\mathbb{C}$  avec le plan équatorial de la sphère unité, c.à.d le plan d'équation  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$  en utilisant l'application  $f$  définit par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ z = x + iy & \longmapsto & (x, y, 0) \end{array}$$

Alors par chaque point  $B' \in \mathbb{C}$  passe une unique droite de  $\mathbb{R}^3$  reliant  $B'$  et  $N$ . Cette

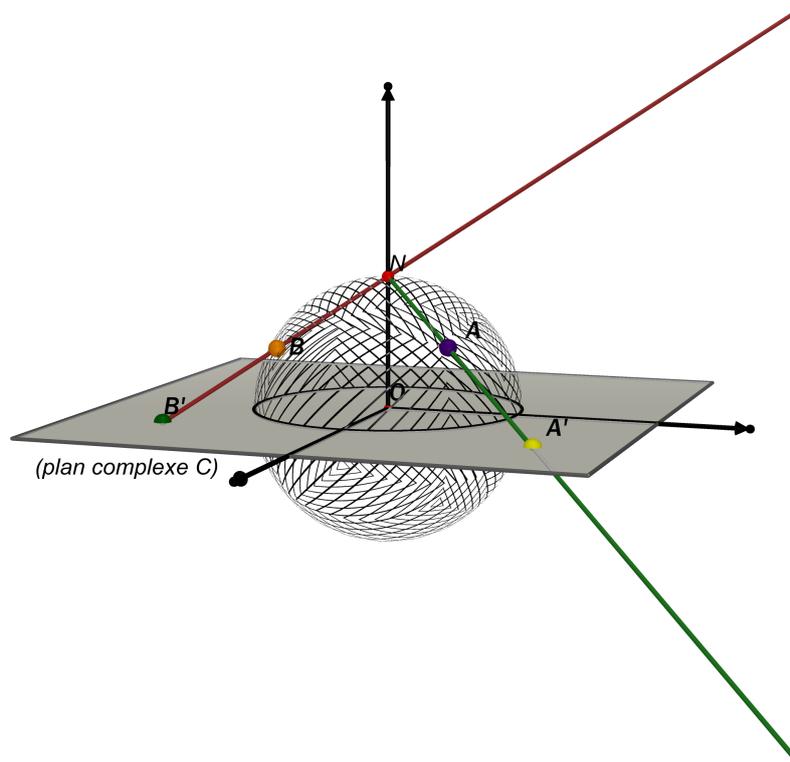


FIGURE 2.8 – Principe de la projection stéréographique

droite intersecte  $\mathbb{S}^2$  en  $N$  ainsi qu'en un unique autre point  $B$ . Réciproquement, tout point  $A$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$  différent à  $N$ , correspond un unique point  $A' \in \mathbb{C}$  d'intersection

de la droite  $(NA)$  avec le plan complexe. Alors on peut définir une application entre  $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  et le plan complexe  $\mathbb{C}$  qui associe à chaque point  $A$  de  $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  un unique point  $A'$  dans  $\mathbb{C}$  et inversement. Cette application est appelée *la projection stéréographique*.

On note que sur l'équateur, les points sont associés à eux-mêmes, alors que le point  $O = (0, 0, 0)$  correspond au pôle sud  $S = (0, 0, -1)$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$ .

**Théorème 2.2.1.** *La projection stéréographique est donnée par*

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v, w) &\longmapsto \frac{u}{1-w} + i \frac{v}{1-w} \end{aligned}$$

de plus  $\pi$  est bijective et sa réciproque est donnée par

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\ z = x + iy &\longmapsto \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

*Démonstration.* En identifiant  $\mathbb{C}$  avec  $P_0$  le plan équatorial de la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  donné par

$$P_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$$

Soit  $A' = (x, y, 0) \in P_0$  et  $A = (u, v, w) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ , avec  $\pi(A) = A'$ . Alors par construction les vecteurs  $\overrightarrow{NA}$  et  $\overrightarrow{NA'}$  sont colinéaires, donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NA} \wedge \overrightarrow{NA'} = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} (1-w)x - u = 0 \\ (w-1)y + v = 0 \\ xv - yu = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{u}{1-w} \\ y = \frac{v}{1-w} \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc bien établi que

$$\pi(u, v, w) = \frac{u}{1-w} + i \frac{v}{1-w}$$

Maintenant montrons que  $\pi$  est bijective et explicitant  $\pi^{-1}$ .

Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  et  $(u, v, w) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ , résolvons le système suivant d'inconnus

$u, v$  et  $w$ . On a

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \frac{u}{1-w} = x \\ \frac{v}{1-w} = y \\ u^2 + v^2 + w^2 = 1 \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} u = x(1-w) \\ v = y(1-w) \\ (x^2 + y^2)(1-w)^2 + w^2 = 1 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} u = x(1-w) \\ v = y(1-w) \\ (x^2 + y^2 - 1) = (x^2 + y^2 + 1)w \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} u = x\left(1 - \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right) \\ v = y\left(1 - \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right) \\ w = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\ v = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \\ w = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

donc le système admet une et une seule solution, et par conséquent  $\pi$  est bijective et sa réciproque est donnée par

$$\begin{aligned}
\pi^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\
x + iy &\longmapsto \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)
\end{aligned}$$

□

**Remarque 2.3.** Il est clair que la projection stéréographique  $\pi$  est un  $C^\infty$  difféomorphisme de  $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  vers  $\mathbb{C}$ .

## 2.2.2 Propriétés de la projection stéréographique

**Définition 2.2.1.** Un cercle de la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  est l'ensemble des points  $(u, v, w)$  qui appartient à  $\mathbb{S}^2$  et qui vérifiant

$$au + bv + cw = d$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des constantes réelles tel que  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  et  $d \in ]-1, 1[$ .

**Exemple 2.2.1.** Soit  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , alors le support de la courbe paramétrée  $\gamma$  définit par

$$\begin{aligned}
\gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
t &\longmapsto (\cos \theta \cos t, \cos \theta \sin t, \sin \theta)
\end{aligned}$$

est un cercle de  $\mathbb{S}^2$  (intersection du plan  $z = \sin \theta$  avec la sphère unité  $\mathbb{S}^2$ ).

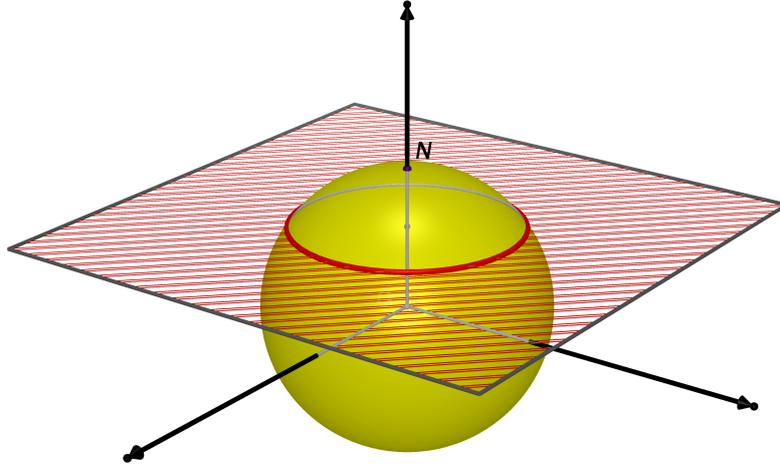


FIGURE 2.9 – Le support de la courbe paramétrée  $\gamma$

**Proposition 2.2.1.** (*Image d'un cercle qui passe par  $(0, 0, 1)$* )

(i) *La projection stéréographique d'un cercle de  $\mathbb{S}^2$  qui passe par  $(0, 0, 1)$  est une droite dans le plan complexe.*

(ii) *Toute droite dans  $\mathbb{C}$  est une image par la projection stéréographique d'un cercle de  $\mathbb{S}^2$  qui passe par  $(0, 0, 1)$ .*

*Démonstration.* (i) Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de  $\mathbb{S}^2$  qui passe par  $(0, 0, 1)$ , alors

$$\mathcal{C} = \{(u, v, w) \in \mathbb{S}^2 / au + bv + cw = c\}$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes réels telles que

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ \text{et } c \in ]-1, 1[ \end{cases}$$

En identifiant  $\mathbb{C}$  avec  $\mathbb{R}^2$ , on a

$$\forall (u, v, w) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}, \quad \pi(u, v, w) = \left( \frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w} \right)$$

Soit  $(u_0, v_0, w_0) \in \mathcal{C}$ , alors on a

$$\begin{aligned} au_0 + bv_0 + cw_0 = c &\iff au_0 + bv_0 = (1-w_0)c \\ &\iff a\left(\frac{u_0}{1-w_0}\right) + b\left(\frac{v_0}{1-w_0}\right) = c \\ &\iff \pi(u_0, v_0, w_0) \in \Delta \end{aligned}$$

où

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = c\}$$

Donc l'image par la projection stéréographique de chaque point appartient au cercle  $\mathcal{C}$  est un point appartient à la droite  $\Delta$ .

D'où

$$\pi(\mathcal{C}) \subset \Delta \quad (*)$$

Réciproquement, soit  $z_0 = (x_0, y_0) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2$ , alors comme  $\pi$  est bijective

$$\exists! (u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}, \quad z_0 = \pi(u_0, v_0, w_0)$$

Or on a d'après le théorème **2.1.1**.

$$u_0 = \frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2 + 1}, \quad v_0 = \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2 + 1} \quad \text{et} \quad w_0 = \frac{x_0^2 + y_0^2 - 1}{x_0^2 + y_0^2 + 1}$$

donc

$$au_0 + bv_0 + cw_0 = \frac{2(ax_0 + by_0) + c(x_0^2 + y_0^2 - 1)}{x_0^2 + y_0^2 + 1}$$

et comme  $z_0 \in \Delta$ , alors on a

$$ax_0 + by_0 = c$$

donc

$$au_0 + bv_0 + cw_0 = c$$

d'où  $(u_0, v_0, w_0) \in \mathcal{C}$ , et par conséquent  $z_0 \in \pi(\mathcal{C})$  et ceci  $\forall z_0 \in \Delta$ .

Donc

$$\Delta \subset \pi(\mathcal{C}) \quad (**)$$

Alors de (\*) et (\*\*), en déduire que  $\pi(\mathcal{C}) = \Delta$ , c.à.d l'image d'un cercle  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{S}^2$  qui passe par  $(0, 0, 1)$  est une droite  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

(ii) En identifiant  $\mathbb{C}$  avec  $\mathbb{R}^2$ , soit

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / px + qy = k\}$$

une droite de  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$p^2 + q^2 = 1,$$

on pose

$$a_0 = \frac{p}{\sqrt{k^2 + 1}}, \quad b_0 = \frac{q}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad \text{et} \quad c_0 = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

Il est clair que  $a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = 1$  et  $c_0 < 1$  alors d'après (i) cette droite est exactement l'image par la projection stéréographique du cercle  $\mathcal{C}_0$  de la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  donné par

$$\mathcal{C}_0 = \{(u, v, w) \in \mathbb{S}^2 / a_0u + b_0v + c_0w = c_0\}$$

D'où le résultat. □

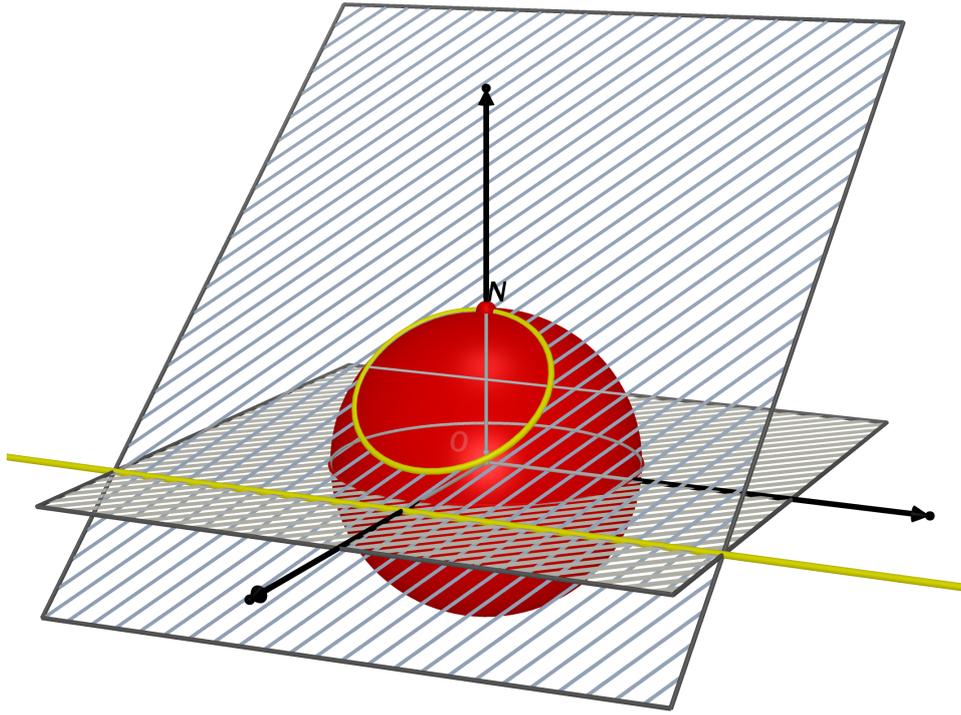


FIGURE 2.10 – L'image par la projection stéréographique d'un cercle de  $\mathbb{S}^2$  qui passe par  $(0, 0, 1)$

**Proposition 2.2.2.** (*Image d'un cercle qui ne passe pas par  $(0, 0, 1)$* )

(i) *La projection stéréographique d'un cercle de  $\mathbb{S}^2$  qui ne passe pas par  $(0, 0, 1)$  est un cercle dans le plan complexe.*

(ii) *Chaque cercle dans  $\mathbb{C}$  est une image d'un cercle de  $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  par la projection stéréographique.*

*Démonstration.* (i) Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de  $\mathbb{S}^2$  qui ne passe pas par  $(0, 0, 1)$ , alors

$$\mathcal{C} = \{(u, v, w) \in \mathbb{S}^2 / \quad au + bv + cw = d\}$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des constantes réels telles que  $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ \text{et } d \in ]-1, 1[ \text{ avec } d \neq c \end{cases}$ .

En identifiant  $\mathbb{C}$  avec  $\mathbb{R}^2$ , on a

$$\forall (u, v, w) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}, \quad \pi(u, v, w) = \left( \frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w} \right)$$

Soit  $(u_0, v_0, w_0) \in \mathcal{C}$ , alors on a

$$\begin{aligned}
au_0 + bv_0 + cw_0 = d &\iff 2(au_0 + bv_0) - d + cw_0 = d - cw_0 \\
&\iff 2(au_0 + bv_0) - d + cw_0 + (c - dw_0) = d - cw_0 + (c - dw_0) \\
&\iff 2(au_0 + bv_0) - (1 + w_0)(d - c) = (1 - w_0)(c + d) \\
&\iff \frac{2(au_0 + bv_0) - (1 + w_0)(d - c)}{1 - w_0} = (c + d) \\
&\iff \frac{(1 + w_0)(d - c)^2 - 2(au_0 + bv_0)(d - c)}{1 - w_0} = c^2 - d^2 \\
&\iff \frac{(1 + w_0)(d - c)^2}{1 - w_0} + 1 - c^2 - \frac{2(au_0 + bv_0)(d - c)}{1 - w_0} = 1 - d^2 \\
&\iff \frac{1 + w_0}{1 - w_0} + \frac{1 - c^2}{(d - c)^2} - \frac{2(au_0 + bv_0)(d - c)}{(1 - w_0)(d - c)} = \frac{1 - d^2}{(d - c)^2} \\
&\iff \frac{u_0^2 + v_0^2}{(1 - w_0)^2} + \frac{a^2 + b^2}{(d - c)^2} - \frac{2(au_0 + bv_0)(d - c)}{(1 - w_0)(d - c)} = \frac{1 - d^2}{(d - c)^2} \\
&\iff \left(\frac{u_0}{1 - w_0} - \frac{a}{d - c}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{1 - w_0} - \frac{b}{d - c}\right)^2 = \frac{1 - d^2}{(d - c)^2}
\end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{C}'$  le cercle de  $\mathbb{R}^2$  donné par

$$\mathcal{C}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2\}$$

avec

$$\alpha = \frac{a}{d - c}, \quad \beta = \frac{b}{d - c} \quad \text{et} \quad r = \frac{\sqrt{1 - d^2}}{d - c}$$

alors on a

$$au_0 + bv_0 + cw_0 = d \iff \pi(u_0, v_0, w_0) \in \mathcal{C}'$$

Donc l'image par la projection stéréographique de chaque point appartient au cercle  $\mathcal{C}'$  est un point appartient au  $\mathcal{C}'$ .

D'où

$$\pi(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}' \quad (*)$$

Réciproquement, soit  $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}' \subset \mathbb{R}^2$ , alors comme  $\pi$  est bijective

$$\exists! (u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}, \quad z_0 = \pi(u_0, v_0, w_0)$$

Or d'après le théorème **2.1.1.** on a

$$u_0 = \frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2 + 1}, \quad v_0 = \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2 + 1} \quad \text{et} \quad w_0 = \frac{x_0^2 + y_0^2 - 1}{x_0^2 + y_0^2 + 1}$$

et comme  $z_0 \in \mathcal{C}'$  alors

$$\begin{aligned}
(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 = r^2 &\iff x_0^2 + y_0^2 - 2(\alpha x_0 + \beta y_0) + \alpha^2 + \beta^2 = r^2 \\
&\iff 2ax_0 + 2by_0 + (x_0^2 + y_0^2 - 1)c = (x_0^2 + y_0^2 + 1)d \\
&\iff au_0 + bv_0 + cw_0 = d
\end{aligned}$$

d'où  $(u_0, v_0, w_0) \in \mathcal{C}$ , et par conséquent  $z_0 \in \pi(\mathcal{C})$  et ceci  $\forall z_0 \in \mathcal{C}'$  donc

$$\mathcal{C}' \subset \pi(\mathcal{C}) \quad (**)$$

Alors de (\*) et (\*\*), en déduire que  $\pi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ , c.à.d l'image d'un cercle  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{S}^2$  qui ne passe pas par  $(0, 0, 1)$  est un cercle  $\mathcal{C}'$  de  $\mathbb{R}^2$ .

(ii) En identifiant  $\mathbb{C}$  avec  $\mathbb{R}^2$ , soit  $\alpha, \beta$  et  $r$  des nombres réels où  $r > 0$ . Nous avons déterminer l'ensemble des points  $(u, v, w) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  tels que l'image par la projection stéréographique de ses points donne le cercle centré sur le point  $z_0 = (\alpha, \beta)$  et de rayon  $r$ . Ces points doivent satisfaire l'équation

$$\left(\frac{u}{1-w} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{v}{1-w} - \beta\right)^2 = r^2$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{u^2 + v^2}{(1-w)^2} - \frac{2(\alpha u + \beta v)}{1-w} = r^2 - (\alpha^2 + \beta^2)$$

donc

$$\frac{1-w^2}{(1-w)^2} - \frac{2(\alpha u + \beta v)}{1-w} = r^2 - \alpha^2 - \beta^2$$

d'où

$$2\alpha u + 2\beta v + (\alpha^2 + \beta^2 - 1 - r^2)w = 1 + \alpha^2 + \beta^2 - r^2. \quad (2.1)$$

On pose

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{(2\alpha)^2 + (2\beta)^2 + (\alpha^2 + \beta^2 - 1 - r^2)^2} \\ &= \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(1 - \alpha^2 - \beta^2)r^2 + r^4} \end{aligned}$$

alors (2.1) devient

$$a_0 u + b_0 v + c_0 w = d_0$$

où

$$a_0 = \frac{2\alpha}{k}, \quad b_0 = \frac{2\beta}{k}, \quad c_0 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1 - r^2}{k} \quad \text{et} \quad d_0 = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2 - r^2}{k}$$

Il est clair que  $a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = 1$ , il suffit de vérifier que  $d_0 \in ]-1, 1[$ .

On a

$$\begin{aligned} k^2 d_0^2 &= (1 + \alpha^2 + \beta^2 - r^2)^2 \\ &= (1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(1 - \alpha^2 - \beta^2)r^2 + r^4 - 4r^2 \\ &= k^2 - 4r^2 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} k^2 d_0^2 - k^2 < 0 &\Rightarrow k^2 d_0^2 < k^2 \\ &\Rightarrow d_0^2 < 1 \\ &\Rightarrow d_0 \in ]-1, 1[. \end{aligned}$$

On a donc  $a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = 1$  et  $d_0 \in ]-1, 1[$ , alors d'après (i) ce cercle est exactement l'image par la projection stéréographique du cercle  $\mathcal{C}_0$  de la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  défini par

$$\mathcal{C}_0 = \{(u, v, w) \in \mathbb{S}^2 / a_0 u + b_0 v + c_0 w = d_0\}$$

D'où le résultat. □

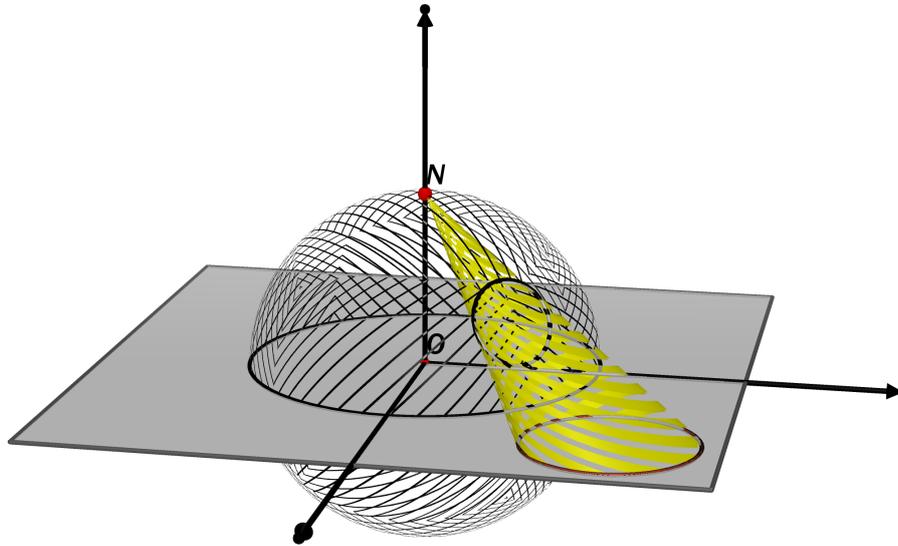


FIGURE 2.11 – L'image par la projection stéréographique d'un cercle de  $\mathbb{S}^2$  qui ne passe pas par  $(0, 0, 1)$

**Définition 2.2.2.** Soit  $f : S_1 \rightarrow S_2$  un difféomorphisme entre deux surface. On dira que  $f$  est conforme si pour tout couple de courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sur  $S_1$  passant par un point  $p$ , l'angle entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  en  $p$  est le même que celui entre  $\tilde{\gamma}_1 = f \circ \gamma_1$  et  $\tilde{\gamma}_2 = f \circ \gamma_2$  en  $f(p)$ .

**Théorème 2.2.2.** La projection stéréographique  $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un difféomorphisme conforme.

*Démonstration.* Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux courbes planes paramétrées par la longueur d'arcs données par

$$\gamma_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \gamma_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (x_1(t), y_1(t)) \quad \text{et} \quad t \longmapsto (x_2(t), y_2(t))$$

et soit  $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  un point d'intersection de  $\gamma_1$  avec  $\gamma_2$ , cela signifie que

$$\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = (a, b).$$

Alors, l'angle entre les deux courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  au point  $A$  est donnée par

$$\theta(A) = \arccos \left( \frac{\langle \gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2) \rangle}{\|\gamma_1'(t_1)\| \cdot \|\gamma_2'(t_2)\|} \right) \quad (2.2)$$

et comme

$$\begin{cases} \|\gamma'_1(t)\| = \sqrt{(x'_1(t))^2 + (y'_1(t))^2} = 1 \\ \|\gamma'_2(t)\| = \sqrt{(x'_2(t))^2 + (y'_2(t))^2} = 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et

$$\langle \gamma'_1(t_1), \gamma'_2(t_2) \rangle = x'_1(t_1)x'_2(t_2) + y'_1(t_1)y'_2(t_2)$$

alors (2.2) devient

$$\begin{aligned} \theta(A) &= \arccos(\langle \gamma'_1(t_1), \gamma'_2(t_2) \rangle) \\ &= \arccos(x'_1(t_1)x'_2(t_2) + y'_1(t_1)y'_2(t_2)) \end{aligned} \quad (*)$$

On utilisant le fait que la projection stéréographique est bijective, et on envoie les deux courbes planes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sur deux courbes gauches  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  respectivement telles que

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\gamma}_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\ t & \longmapsto & \varphi \circ \gamma_1(t) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\gamma}_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\ t & \longmapsto & \varphi \circ \gamma_2(t) \end{array}$$

où  $\varphi$  est l'inverse de la projection stéréographique qui est donnée par

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\ (x, y) & \longmapsto & \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \end{array}$$

Il est clair que  $A' = \varphi(A)$  est un point d'intersection de  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$ , alors l'angle entre  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  au point  $A'$  est donnée par

$$\tilde{\theta}(A') = \arccos\left(\frac{\langle \tilde{\gamma}'_1(t_1), \tilde{\gamma}'_2(t_2) \rangle}{\|\tilde{\gamma}'_1(t_1)\| \cdot \|\tilde{\gamma}'_2(t_2)\|}\right) \quad (2.3)$$

On a

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'_1(t_1) &= d(\varphi \circ \gamma)_{t_1}(1) \\ &= d\varphi_{(\gamma_1(t_1))}(\gamma'_1(t_1)) \\ &= d\varphi_{(A)}(\gamma'_1(t_1)) \\ &= \text{Jac}(\varphi, A) \cdot \gamma'_1(t_1) \end{aligned}$$

Or

$$\text{Jac}(\varphi, A) = \frac{2}{(a^2 + b^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} b^2 + 1 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 + 1 - b^2 \\ 2a & 2b \end{bmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'_1(t_1) &= \frac{2}{(a^2 + b^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} b^2 + 1 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 + 1 - b^2 \\ 2a & 2b \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1(t_1) \\ y'_1(t_1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{(a^2 + b^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} (b^2 + 1 - a^2)x'_1(t_1) - 2aby'_1(t_1) \\ (a^2 + 1 - b^2)y'_1(t_1) - 2abx'_1(t_1) \\ 2ax'_1(t_1) + 2by'_1(t_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors on trouve

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\gamma}'_1(t_1)\| &= \left( \frac{4 \left[ (a^2 + b^2 + 1)^2 ((x'_1(t_1))^2 + (y'_1(t_1))^2) \right]}{(a^2 + b^2 + 1)^4} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2 \|\gamma'_1(t_1)\|}{a^2 + b^2 + 1} \\
&= \frac{2}{a^2 + b^2 + 1}
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}'_2(t_2) &= d\varphi_{(\gamma_2(t_2))}(\gamma'_2(t_2)) \\
&= d\varphi_{(A)}(\gamma'_2(t_2)) \\
&= \text{Jac}(\varphi, A) \cdot \gamma'_2(t_2) \\
&= \frac{2}{(a^2 + b^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} b^2 + 1 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 + 1 - b^2 \\ 2a & 2b \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_2(t_2) \\ y'_2(t_2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{(a^2 + b^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} (b^2 + 1 - a^2)x'_2(t_2) - 2aby'_2(t_2) \\ (a^2 + 1 - b^2)y'_2(t_2) - 2abx'_2(t_2) \\ 2ax'_2(t_2) + 2by'_2(t_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc on trouve

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\gamma}'_2(t_2)\| &= \left( \frac{4 \left[ (a^2 + b^2 + 1)^2 ((x'_2(t_2))^2 + (y'_2(t_2))^2) \right]}{(a^2 + b^2 + 1)^4} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2 \|\gamma'_2(t_2)\|}{a^2 + b^2 + 1} \\
&= \frac{2}{a^2 + b^2 + 1}
\end{aligned}$$

Maintenant calculons le produit scalaire de  $\tilde{\gamma}'_1(t_1)$  avec  $\tilde{\gamma}'_2(t_2)$ .

On a

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\gamma}'_1(t_1), \tilde{\gamma}'_2(t_2) \rangle &= \frac{4 \left\langle \begin{pmatrix} (b^2 + 1 - a^2)x'_1(t_1) - 2aby'_1(t_1) \\ (a^2 + 1 - b^2)y'_1(t_1) - 2abx'_1(t_1) \\ 2ax'_1(t_1) + 2by'_1(t_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (b^2 + 1 - a^2)x'_2(t_2) - 2aby'_2(t_2) \\ (a^2 + 1 - b^2)y'_2(t_2) - 2abx'_2(t_2) \\ 2ax'_2(t_2) + 2by'_2(t_2) \end{pmatrix} \right\rangle}{(a^2 + b^2 + 1)^4} \\
&= \frac{4 \left( (a^2 + b^2 + 1)^2 (x'_1(t_1)x'_2(t_2) + y'_1(t_1)y'_2(t_2)) \right)}{(a^2 + b^2 + 1)^4} \\
&= \frac{4(x'_1(t_1)x'_2(t_2) + y'_1(t_1)y'_2(t_2))}{(a^2 + b^2 + 1)^2}
\end{aligned}$$

donc (2.3) devient

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}(A') &= \arccos \left( \frac{4(x'_1(t_1)x'_2(t_2) + y'_1(t_1)y'_2(t_2))}{(a^2 + b^2 + 1)^2} \cdot \frac{(a^2 + b^2 + 1)^2}{4} \right) \\
&= \arccos (x'_1(t_1)x'_2(t_2) + y'_1(t_1)y'_2(t_2)) \quad (**)
\end{aligned}$$

donc le résultat découle de (\*) et (\*\*). □

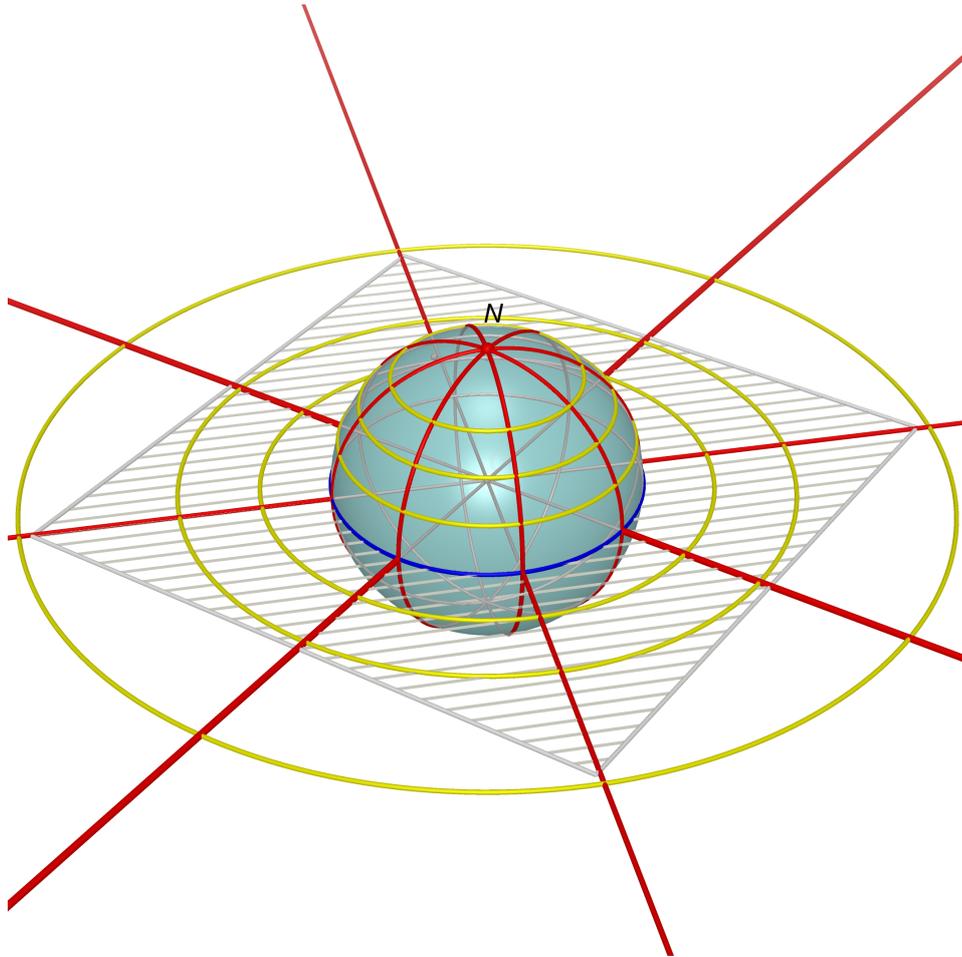


FIGURE 2.12 – Conformité de la projection stéréographique

## 2.3 Projection d'Archimède

Dans le paragraphe précédent on a vu un type de la projection de la sphère qui est conforme mais elle ne conserve pas les aires car la sphère est bornée contrairement au plan. Dans ce paragraphe on va voir un autre type de la projection sphérique. On va essayer de représenter une partie de la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  sur une partie d'un cylindre tangent à la sphère  $\mathbb{S}^2$  suivant l'équateur. On parle donc d'une projection particulière, c'est **la projection d'Archimède**. Notre objectif est de démontrer que cette projection conserve les aires.

### 2.3.1 Définition de la projection d'Archimède

Soit  $\mathbb{S}^2$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  donnée par

$$\mathbb{S}^2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 / u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$

et  $N = (0, 0, 1)$ ,  $S = (0, 0, -1)$  ses pôles nord et sud respectivement. Alors on note la surface  $\mathbb{S}^2$  privé de ses pôles par  $\Sigma_2$  c'est à dire

$$\Sigma_2 := \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$$

Soit  $\mathbb{S}^1$  le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$  donnée par

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$$

Alors on a le produit cartésien du cercle unité  $\mathbb{S}^1$  avec l'intervalle ouvert  $] - 1, 1[$  est une partie du cylindre tangent à  $\mathbb{S}^2$  suivant l'équateur on la note par  $\Sigma_1$  c'est à dire

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &:= \mathbb{S}^1 \times ] - 1, 1[ \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1 \text{ et } -1 < z < 1\} \end{aligned}$$

Alors le principe de la projection d'Archimède est le suivant

Partant d'un point  $A$  de la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  (différent des pôles  $S$  et  $N$  c.à.d  $A \in \Sigma_2$ ), on définit sa projection  $B$  sur  $\Sigma_1$  de la manière suivante :

Notons  $A'$  la projection orthogonale du point  $A$  sur l'axe  $oz$ , et le point  $B$  est le point d'intersection de la demi-droite  $[A'A)$  avec  $\Sigma_1$ . Ce point  $B$  est appelé la **projection d'Archimède** du point  $A$ .

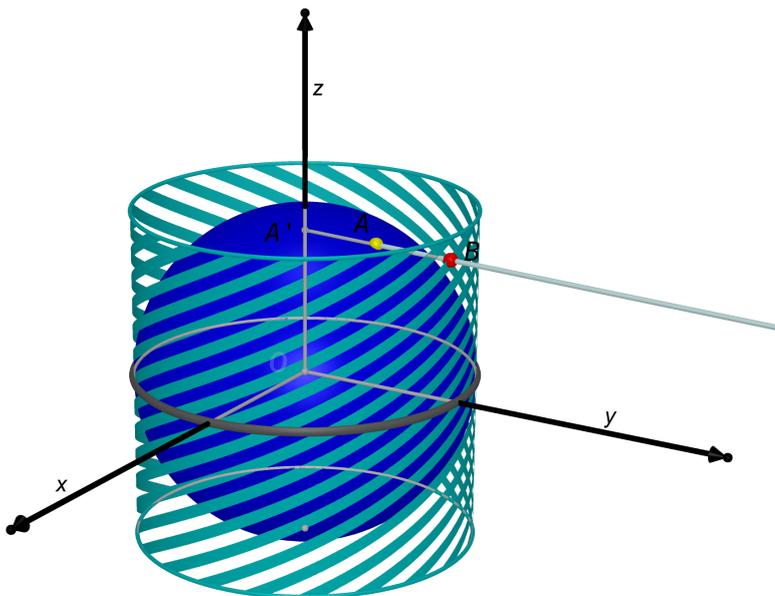


FIGURE 2.13 – Principe de la projection d'Archimède

**Définition 2.3.1.** La *projection d'Archimède* est l'application  $\psi$  donnée par

$$\begin{aligned} \psi : \Sigma_2 &\longrightarrow \Sigma_1 \\ (u, v, w) &\longmapsto \left( \frac{u}{\sqrt{1-w^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-w^2}}, w \right) \end{aligned}$$

De plus elle est bijective et sa réciproque  $\psi^{-1}$  est donné par

$$\begin{aligned} \psi^{-1} : \Sigma_1 &\longrightarrow \Sigma_2 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left( x\sqrt{1-z^2}, y\sqrt{1-z^2}, z \right) \end{aligned}$$

### 2.3.2 Propriété de la projection d'Archimède

**Théorème 2.3.1.** La *projection d'Archimède* est une application qui conserve les aires.

*Démonstration.* Considérons la paramétrisation de  $\Sigma_2$  donnée par

$$\begin{aligned} \varphi : U = ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ &\longrightarrow \Sigma_2 \\ (u, v) &\longmapsto (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \end{aligned}$$

et soit  $R$  une région de  $\Sigma_2$  telle que  $R \subset \varphi(U)$ .

On pose

$$K = \varphi^{-1}(R) \quad \text{et} \quad R' = \psi(R) = \psi \circ \varphi(K)$$

Alors pour montrer que la projection d'Archimède  $\psi$  conserve les aires il suffit de montrer que

$$\mathcal{A}(R') = \mathcal{A}(R)$$

On a d'une part

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)(u, v) = \begin{pmatrix} \sin^2 u \cos v \\ \sin^2 u \sin v \\ \cos u \sin u \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|(u, v) = \sin u$$

et d'autre part, comme  $\psi \circ \varphi$  est donnée par

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi : U &\longrightarrow \Sigma_1 \\ (u, v) &\longmapsto (\cos v, \sin v, \cos u) \end{aligned}$$

alors

$$\frac{\partial(\psi \circ \varphi)}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\psi \circ \varphi)}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\left( \frac{\partial(\psi \circ \varphi)}{\partial u} \wedge \frac{\partial(\psi \circ \varphi)}{\partial v} \right)(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \frac{\partial(\psi \circ \varphi)}{\partial u} \wedge \frac{\partial(\psi \circ \varphi)}{\partial v} \right\|(u, v) = \sin u$$

alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(R') &= \iint_{(\psi \circ \varphi)^{-1}(R')} \left\| \frac{\partial(\psi \circ \varphi)}{\partial u} \wedge \frac{\partial(\psi \circ \varphi)}{\partial v} \right\| (u, v) dudv \\
 &= \iint_K \sin(u) dudv \\
 &= \iint_K \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| (u, v) dudv \\
 &= \iint_{\varphi^{-1}(R)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| (u, v) dudv \\
 &= \mathcal{A}(R)
 \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

## 2.4 Plan tangent et formes fondamentales

### 2.4.1 Plan tangent

Soit  $S$  une surface et  $p$  un point de  $S$ .

On dira que  $v \in \mathbb{R}^3$  est tangent à  $S$  en  $p$  si et seulement si il existe une courbe  $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow S$  telle que  $\alpha(0) = p$  et  $\alpha'(0) = v$ .

**Définition 2.4.1.** On définit l'espace tangent à  $S$  en  $p$  comme étant l'ensemble des vecteurs tangent à  $S$  en  $p$  on le note  $T_p S$ .

$$T_p S := \{v \in \mathbb{R}^3 / \exists \gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow S \text{ tq } \gamma(0) = p \text{ et } \gamma'(0) = v\}$$

**Exemple 2.4.1.** Considérons la surface

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1\}$$

On a la courbe

$$\begin{aligned}
 \gamma &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 t &\longmapsto (\cos t, \sin t, 1)
 \end{aligned}$$

est une courbe tracée sur  $S_1$ .

Pour  $p = (1, 0, 1) \in S_1$  On a

- $\gamma(0) = p$
- $\gamma'(0) = (0, 1, 0) \in T_p S_1$ .

De même on a la courbe

$$\begin{aligned}
 \beta &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 t &\longmapsto (1, 0, t + 1)
 \end{aligned}$$

est une courbe tracée sur  $S_1$ .

Pour  $p = (1, 0, 1) \in S_1$  On a

- $\beta(0) = p$
- $\beta'(0) = (0, 0, 1) \in T_p S_1$ .

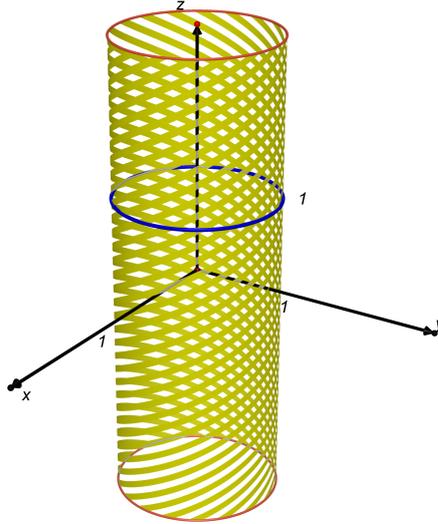


FIGURE 2.14 – La surface  $S_1$  et la courbe  $\gamma$

**Proposition 2.4.1.** *Soit  $S$  une surface.*

*Si  $\varphi : (x^1, x^2) \rightarrow \varphi(x^1, x^2)$  est une paramétrisation locale de  $S$  telle que  $p_0 = \varphi(x_0^1, x_0^2) = \varphi(M_0)$ . Alors on a*

$$d\varphi_{(x_0^1, x_0^2)}(\mathbb{R}^2) = T_{p_0}S$$

*Démonstration.* Soit  $v \in d\varphi_{(x_0^1, x_0^2)}(\mathbb{R}^2)$ , alors il existe  $u \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\begin{aligned} v &= d\varphi_{M_0}(u) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \varphi(M_0 + tu) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

On considère ensuite la courbe

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \varphi(M_0 + tu) \end{aligned}$$

il est clair que  $\gamma$  est une courbe tracée sur  $S$  et comme  $\gamma(0) = \varphi(M_0) = p_0$ , donc  $\gamma'(0) \in T_{p_0}S$ .

Or  $v = \gamma'(0)$  alors  $v \in T_{p_0}S$ . D'où la première inclusion.

Réciproquement, soit  $w \in T_{p_0}S$ . Alors par définition il existe une courbe  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow S$  telle que  $\gamma(0) = p_0$  et  $\gamma'(0) = w$ .

On prend  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t$  dans  $]-\varepsilon, \varepsilon[$  on a  $\gamma(t) \in \varphi(U)$  ceci est possible car  $\gamma$  est continue.

On considère ensuite la courbe

$$\begin{aligned} \alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ &\longrightarrow U \\ t &\longmapsto \varphi^{-1}(\gamma(t)) \end{aligned}$$

On a

$$\alpha(0) = \varphi^{-1}(\gamma(0)) = M_0$$

et

$$\begin{aligned} \gamma(t) = \varphi(\alpha(t)) &\Rightarrow \gamma'(t) = d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \quad \forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \\ &\Rightarrow w = \gamma'(0) = d\varphi_{M_0}(\alpha'(0)) \end{aligned}$$

donc on a trouvé un  $v = \alpha'(0) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $w = d\varphi_{M_0}(v)$ . D'où l'autre inclusion, et par conséquence on a montré l'égalité.  $\square$

**Corollaire 2.4.1.** Soient  $S$  une surface, et  $\varphi : (x^1, x^2) \rightarrow \varphi(x^1, x^2)$  une paramétrisation locale de  $S$  telle que  $p_0 = \varphi(x_0^1, x_0^2)$ . Alors on a

- (1)  $T_{p_0}S$  est un plan vectoriel.
- (2)  $d\varphi_{(x_0^1, x_0^2)}$  est un isomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^2$  sur  $T_{p_0}S$ .
- (3) La famille  $\left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2), \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2) \right\}$  est une base de  $T_{p_0}S$ .

**Définition 2.4.2. (Différentielle)**

Soit  $f : S_1 \rightarrow S_2$  une application  $C^\infty$  entre deux surfaces. Soit  $p \in S_1$  on appelle différentielle de  $f$  en  $p$  où l'application linéaire tangente à  $f$  en  $p$ , l'application linéaire  $T_p f : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$  définit par

$$T_p f(v) := \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \Big|_{t=0}$$

où  $\alpha$  est une courbe tracée sur  $S_1$  telle que  $\alpha(0) = p$  et  $\alpha'(0) = v$ .

## 2.4.2 Première forme fondamentale

Soit  $S$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ . L'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  étant muni de son produit scalaire canonique. Pour tout  $p \in S$  le plan tangent  $T_p S$  étant un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , on peut alors le munir de la restriction du produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 2.4.3.** Soit  $S$  une surface. Pour tout  $p \in S$  on note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  le produit scalaire sur  $T_p S$  induit par le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

La première forme fondamentale  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  est la forme quadratique, définie positive, associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  donnée par

$$I_p(u) = \langle u, u \rangle_p \geq 0$$

pour tout  $u \in T_p S$ .

Une vision quantitative des choses est l'utilisation d'une matrice pour représenter la première forme fondamentale  $I_p$ . Pour cela on utilise une paramétrisation locale de  $S$  notée  $\varphi : U \rightarrow S$ .

On a

$$\forall p \in \varphi(U) \quad \exists! x = (x_1, x_2) \in U, \quad p = \varphi(x)$$

donc

$$T_{\varphi(x)} S = \text{Vect} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}(x), \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}(x) \right\}$$

On note

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}(x) = \partial_1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}(x) = \partial_2 \end{cases}$$

alors

$$\forall u \in T_{\varphi(x)} S \quad \exists! (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad u = u_1 \partial_1 + u_2 \partial_2$$

Il en résulte pour tout  $v, w \in T_{\varphi(x)} S$  on a  $v = v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2$  et  $w = w_1 \partial_1 + w_2 \partial_2$ , et donc

$$\langle v, w \rangle_{\varphi(x)} = v_1 w_1 \langle \partial_1, \partial_1 \rangle_{\varphi(x)} + [v_1 w_2 + v_2 w_1] \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_{\varphi(x)} + v_2 w_2 \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_{\varphi(x)}.$$

Ce qui nous amène à la définition suivante.

**Définition 2.4.4.** Soit  $\varphi : U \rightarrow S$  une paramétrisation locale de la surface  $S$ . Les coefficients métriques de  $S$  relativement à  $(\varphi, U)$  sont les application  $E, F$  et  $G$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  donnés par

$$E(x) = \langle \partial_1, \partial_1 \rangle_{\varphi(x)}, \quad F(x) = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_{\varphi(x)}, \quad G(x) = \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_{\varphi(x)}$$

pour tout  $x \in U$ .

On a ainsi pour tout  $x \in U$  et  $v = v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2 \in T_{\varphi(x)}S$

$$I_{\varphi(x)}(v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} E(x) & F(x) \\ F(x) & G(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

**Exemple 2.4.2.** Soit  $\mathcal{P}$  le plan affine passant par  $M_0 \in \mathbb{R}^3$  et de direction le plan vectoriel  $P = \text{Vect}\{u, v\}$ . L'application  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par  $\varphi(s, t) = M_0 + su + tv$  est une paramétrisation globale de  $\mathcal{P}$ . Pour tout  $M \in \mathcal{P}$ , la base de  $T_M \mathcal{P}$  induite par  $\varphi$  est  $\partial_1 = u$  et  $\partial_2 = v$ , donc les coefficients métriques du plan respectivement à l'application  $\varphi$  sont

$$E = \|u\|^2, \quad F = \langle u, v \rangle, \quad G = \|v\|^2.$$

En particulier Si les vecteurs  $u$  et  $v$  sont orthonormés, on trouve

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

**Proposition 2.4.2.** Soient  $S$  une surface et  $(\varphi, U)$  une paramétrisation de  $S$ .

(i) Si  $\gamma$  est une courbe dans  $\varphi(U)$  donnée par

$$\begin{aligned} \gamma &: I \longrightarrow \varphi(U) \\ t &\longmapsto \varphi(x_1(t), x_2(t)) \end{aligned}$$

alors sa longueur est donnée par

$$L(\gamma) = \int_I \sqrt{(x_1'(t))^2 E(x_1(t), x_2(t)) + 2x_1'(t)x_2'(t)F(x_1(t), x_2(t)) + (x_2'(t))^2 G(x_1(t), x_2(t))} dt$$

(ii) Si  $R$  une région de  $\varphi(U)$  alors l'aire de  $R$  est donné par

$$\mathcal{A}(R) = \iint_{\varphi^{-1}(R)} \sqrt{E(x_1, x_2)G(x_1, x_2) - F^2(x_1, x_2)} dx_1 dx_2$$

*Démonstration.* Pour (i) il suffit de calculer la norme de la dérivée de la courbe  $\gamma$ . Et pour (ii) le résultat découle de l'identité de Lagrange.  $\square$

### 2.4.3 Deuxième forme fondamentale

Soit  $S$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ . L'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  étant muni de son produit scalaire et de son orientation canoniques. On a pour tout  $p \in S$

$$\mathbb{R}^3 = T_p S \oplus (T_p S)^\perp$$

et

$$\dim(T_p S)^\perp = 1$$

**Définition 2.4.5.** On dira que  $S$  est une surface orientable s'il existe une application  $n : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  continue telle que

$$\forall p \in S \quad \|n(p)\| = 1 \quad \text{et} \quad n(p) \in (T_p S)^\perp,$$

donc

$$\forall p \in S \quad (T_p S)^\perp = \text{Vect}\{n(p)\}$$

**Exemple 2.4.3.** 1) Soit  $\varphi : U \rightarrow S$  une paramétrisation globale d'une surface  $S$ .  
On a

$$\forall x = (x_1, x_2) \in U \quad T_{\varphi(x)} S = \text{Vect}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)\right\}$$

donc

$$(T_{\varphi(x)} S)^\perp = \text{Vect}\{n(\varphi(x))\},$$

où

$$n(\varphi(x)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\|}(x) = \frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|}$$

2) Pour la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  on a

$$T_p \mathbb{S}^2 = \{p\}^\perp \quad \text{et} \quad (T_p \mathbb{S}^2)^\perp = \text{Vect}\{p\}$$

et

$$\begin{aligned} n : \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\longmapsto p \end{aligned}$$

**Définition 2.4.6. (Application de Gauss)**

Soit  $S$  une surface orientée par  $n : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . L'application encore notée  $n$  donnée par

$$\begin{aligned} n : S &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ p &\longmapsto n(p) \end{aligned}$$

s'appelle l'**application de Gauss**.

On a

$$\forall p \in S \quad n(p) \in \mathbb{S}^2 \quad \text{et} \quad n(p) \in (T_p S)^\perp$$

**Exemple 2.4.4.** Considérons la surface

$$S_r = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

on a

$$T_p S_r = \{p\}^\perp$$

et

$$\begin{aligned} n : S_r &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ p &\longmapsto \frac{p}{r} \end{aligned}$$

est l'application de Gauss associée à l'orientation par la normale sortante.

**Remarque 2.4.** Soit  $S$  une surface orientée et  $n : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  son application de Gauss. Pour tout  $p \in S$  l'application linéaire tangente à  $n$  en  $p$  est  $T_p n : T_p S \rightarrow T_{n(p)} \mathbb{S}^2$ . Et comme

$$T_{n(p)} \mathbb{S}^2 = \{n(p)\}^\perp = T_p S$$

On obtient que  $T_p n$  est un endomorphisme de  $T_p S$ .

**Proposition 2.4.3.**  $T_p n$  est un endomorphisme symétrique du plan euclidien  $T_p S$ . Cela signifie que

$$\forall u, v \in T_p S \quad \langle T_p n(u), v \rangle = \langle u, T_p n(v) \rangle$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi : U \rightarrow S$  une paramétrisation locale de  $S$  telle que

$$\exists x \in U, \quad p = \varphi(x) \in \varphi(U)$$

On a

$$\begin{aligned} T_{\varphi(x)} S &= \text{Vect} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right\} \\ &= \text{Vect} \{ \partial_1, \partial_2 \}. \end{aligned}$$

Donc le problème devient

$$\langle T_p n(\partial_1), \partial_2 \rangle = \langle \partial_1, T_p n(\partial_2) \rangle$$

ce qui équivaut à

$$\left\langle \frac{\partial(n \circ \varphi)}{\partial x_1}(x), \partial_2 \right\rangle = \left\langle \partial_1, \frac{\partial(n \circ \varphi)}{\partial x_2}(x) \right\rangle$$

et comme on a

$$\forall x \in U \quad \begin{cases} \langle \partial_1, n \circ \varphi(x) \rangle = 0 & (i) \\ \langle \partial_2, n \circ \varphi(x) \rangle = 0 & (ii) \end{cases}$$

alors, on dérive (i) par rapport à la variable  $x_2$  et (ii) par rapport à la variable  $x_1$  on obtient

$$\begin{cases} \left\langle \partial_1, \frac{\partial(n \circ \varphi)}{\partial x_2}(x) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}(x), n \circ \varphi(x) \right\rangle = 0 \\ \left\langle \partial_2, \frac{\partial(n \circ \varphi)}{\partial x_1}(x) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(x), n \circ \varphi(x) \right\rangle = 0 \end{cases}$$

donc d'après Schwarz et la bilinéarité du produit scalaire le résultat en découle.  $\square$

**Corollaire 2.4.2.** Pour tout  $p \in S$ , l'endomorphisme  $T_p n$  est diagonalisable dans une base orthonormée de  $T_p S$ .

**Définition 2.4.7.** Soit  $S$  une surface, et  $p \in S$ .

(1) L'endomorphisme de **Weingarten** est l'endomorphisme du plan euclidien  $T_p S$  noté  $L_p$  donné par

$$\begin{aligned} L_p : T_p S &\longrightarrow T_p S \\ u &\longmapsto -T_p n(u) \end{aligned}$$

(2) La forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} II_p : T_p S \times T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle L_p(u), v \rangle \end{aligned}$$

est dite **la seconde forme fondamentale** de  $S$ .

(3) **La courbure de Gauss** de  $S$  est la fonction

$$\begin{aligned} K &: S \longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \det(L_p) \end{aligned}$$

(4) **La courbure moyenne** de  $S$  est la fonction

$$\begin{aligned} H &: S \longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \frac{1}{2} \text{tr}(L_p) \end{aligned}$$

(5) Les valeurs propres de  $L_p$  sont appelées **les courbures principales**, et on les note par

$$k_1(p) \leq k_2(p)$$

**Proposition 2.4.4.** Soit  $S$  une surface, et  $\varphi : U \rightarrow S$  sa paramétrisation locale.

On note  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  la matrice de  $II_{\varphi(x_1, x_2)}$  dans la base  $\{\partial_1, \partial_2\}$  et  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  la matrice de  $L_{\varphi(x_1, x_2)}$  dans la même base. Alors on a

(i) Pour tout  $i, j \in \{1, 2\}$

$$a_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}, n \circ \varphi \right\rangle(x)$$

(ii)

$$M = G^{-1}A \quad \text{et} \quad K = \frac{\det A}{\det G}$$

où  $G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  est la matrice de la première forme fondamentale donnée par

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle$$

*Démonstration.* (i) On a

$$\begin{aligned} a_{ij} &= II_{\varphi(x_1, x_2)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right) \\ &= \left\langle L_{\varphi(x)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle \\ &= - \left\langle T_{\varphi(x)} n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle \\ &= - \left\langle \frac{\partial (n \circ \varphi)}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle \end{aligned}$$

Or

$$\left\langle n \circ \varphi(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\langle \frac{\partial (n \circ \varphi)}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x), n \circ \varphi(x) \right\rangle$$

donc le résultat en découle.

(ii) On a  $G$  est inversible car

$$\det G = \|\partial_1 \wedge \partial_2\| \neq 0$$

Montrons que

$$A = GM$$

On a

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \left\langle L_{\varphi(x)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\right), \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x), L_{\varphi(x)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x), \sum_{k=1}^2 m_{kj} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x) \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^2 \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x) \right\rangle m_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^2 g_{ik} m_{kj} \\ &= (GM)_{ij} \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

## 2.5 Isométries locales

### 2.5.1 définition et propriétés

**Définition 2.5.1.** *Un difféomorphisme  $f : S_1 \rightarrow S_2$  entre deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  est une isométrie si*

$$\forall p \in S_1, \quad \forall u, v \in T_p S_1, \quad \langle T_p f(u), T_p f(v) \rangle_{f(p)} = \langle u, v \rangle_p$$

*Lorsque un tel  $f$  existe, on dira que  $S_1$  et  $S_2$  sont isométriques.*

**Proposition 2.5.1.** *Soit  $f : S_1 \rightarrow S_2$  un difféomorphisme.  $f$  est une isométrie si et seulement si*

$$\forall p \in S_1, \quad \forall u \in T_p S_1, \quad I_{f(p)}(T_p f(u)) = I_p(u)$$

*Démonstration.* Un sens évident, l'autre découle du fait qu'on a

$$\begin{aligned} \langle T_p f(u), T_p f(v) \rangle_{f(p)} &= \frac{1}{2} \left( I_{f(p)}(T_p f(u+v)) - I_{f(p)}(T_p f(u)) - I_{f(p)}(T_p f(v)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( I_p(u+v) - I_p(u) - I_p(v) \right) \\ &= \langle u, v \rangle_p \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.5.2.** *Soit  $f : S_1 \rightarrow S_2$  un difféomorphisme.  $f$  est une isométrie si et seulement si pour tout courbe  $\gamma$  tracée sur  $S_1$  on a*

$$L(\gamma) = L(f \circ \gamma)$$

*Démonstration.* Supposons que  $f$  est une isométrie, et soit  $\gamma : J \rightarrow S_1$  une courbe tracée sur  $S_1$  on pose  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$  Alors on a

$$\begin{aligned} I_{\tilde{\gamma}(t)}(T_p f(\gamma'(t))) &= I_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \Rightarrow \sqrt{I_{\tilde{\gamma}(t)}(T_p f(\gamma'(t)))} = \sqrt{I_{\gamma(t)}(\gamma'(t))} \\ &\Rightarrow \|\tilde{\gamma}'(t)\| = \|\gamma'(t)\| \\ &\Rightarrow \int_J \|\tilde{\gamma}'(t)\| dt = \int_J \|\gamma'(t)\| dt \\ &\Rightarrow L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma) \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que pour tout courbe  $\gamma$  tracée sur  $S_1$  on a

$$L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$$

Maintenant, soit  $p \in S_1$  et  $u \in T_p S_1$  alors par définition du plan tangent il existe une courbe  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow S_1$  tracée sur  $S_1$  telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma'(0) = u$ . On a par hypothèse

$$\begin{aligned} L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma) &\Rightarrow \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|\gamma'(t)\| dt \\ &\Rightarrow \int_{-\varepsilon}^x \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt = \int_{-\varepsilon}^x \|\gamma'(t)\| dt \quad \forall x \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \end{aligned}$$

On dérive par rapport à  $x$  en  $x = 0$  on obtient

$$\|(f \circ \gamma)'(0)\| = \|\gamma'(0)\| \Rightarrow \|T_p f(u)\| = \|u\|$$

d'où le résultat. □

**Remarque 2.5.** *Intuitivement, le fait que  $f$  soit une isométrie signifie que l'application  $f$  déforme la surface  $S_1$  en  $S_2$  sans étirement ni contraction. Un exemple typique est la déformation d'une feuille de papier (sans la plier). Il est assez clair qu'une courbe tracée sur la feuille ne change pas de longueur quand on déforme cette dernière. Or il est facile de fabriquer un cylindre ou un cône à partir d'une feuille de papier, on peut donc penser qu'il existe une isométrie locale du plan vers chacune de ces surfaces.*

## 2.5.2 Exemples des isométries locales

**Exemple 2.5.1.** *Considérons les deux surfaces*

$$S_1 = \{(\theta, y, 0) / 0 < \theta < 2\pi \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z \neq 1\}$$

et l'application  $f$  donnée par

$$f : \begin{array}{ccc} S_1 & \longrightarrow & S_2 \\ (\theta, y, 0) & \longmapsto & (\cos \theta, \sin \theta, y) \end{array}$$

Alors  $f$  est une isométrie. En effet, pour tout  $p = (\theta, y, 0) \in S_1$  on a

$$T_p S_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect}\{e_1, e_2\}$$

Soit  $u \in T_p S_1$  alors on a d'une part

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 \quad \text{avec} \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}$$

et d'autre part il existe une courbe

$$\begin{aligned} \alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ &\longrightarrow S_1 \\ t &\longmapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0) \end{aligned}$$

tracée sur  $S_1$  telle que

$$\alpha(0) = p \quad \text{et} \quad \alpha'(0) = u$$

ce qui signifie que

$$(\alpha_1(0), \alpha_2(0), 0) = (\theta, y, 0) \quad \text{et} \quad (\alpha'_1(0), \alpha'_2(0), 0) = (u_1, u_2, 0)$$

donc

$$\begin{aligned} T_p f(u) &= \left. \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\cos \alpha_1(t), \sin \alpha_1(t), \alpha_2(t)) \right|_{t=0} \\ &= (-\alpha'_1(0) \sin \alpha_1(0), \alpha'_1(0) \cos \alpha_1(0), \alpha'_2(0)) \\ &= (-u_1 \sin \theta, u_1 \cos \theta, u_2) \end{aligned}$$

alors on déduit que

$$\begin{aligned} \|T_p f(u)\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \\ &= \|u\| \end{aligned}$$

d'où  $f$  est une isométrie.

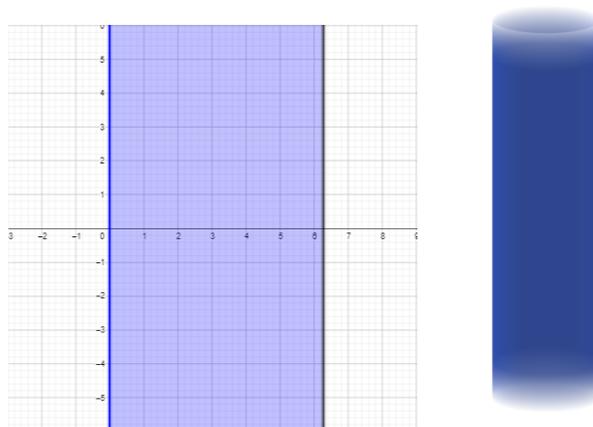


FIGURE 2.15 – Un cylindre privé d'une droite est isométrique à un morceau du plan

**Exemple 2.5.2.** Soit  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  fixé, considérons les deux surfaces

$$S_1 = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, 0) / 0 < \theta < 2\pi \sin \alpha \text{ et } r > 0\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha, z > 0\} \setminus \{(x, 0, z) / x > 0\}$$

et l'application  $f$  définit par

$$\begin{aligned} f : S_1 &\longrightarrow S_2 \\ (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) &\longmapsto \left( r \sin \alpha \cos \left( \frac{\theta}{\sin \alpha} \right), r \sin \alpha \sin \left( \frac{\theta}{\sin \alpha} \right), r \cos \alpha \right) \end{aligned}$$

Alors  $f$  est une isométrie. En effet, pour tout  $p = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \in S_1$  on a

$$T_p S_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \{e'_1, e'_2\}$$

Soit  $u \in T_p S_1$  alors on a d'une part

$$u = u_1 e'_1 + u_2 e'_2 \quad \text{avec } u_1, u_2 \in \mathbb{R}$$

donc

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + r^2 u_2^2}$$

et d'autre part pour

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$$

on a

$$\begin{aligned} T_p f(u) &= u_1 \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial r}(r, \theta) + u_2 \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial \theta}(r, \theta) \\ &= u_1 \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \left( \frac{\theta}{\sin \alpha} \right) \\ \sin \alpha \sin \left( \frac{\theta}{\sin \alpha} \right) \\ \cos \alpha \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -r \sin \left( \frac{\theta}{\sin \alpha} \right) \\ r \cos \left( \frac{\theta}{\sin \alpha} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|T_p f(u)\| &= \sqrt{u_1^2 + r^2 u_2^2} \\ &= \|u\| \end{aligned}$$

d'où  $f$  est une isométrie.

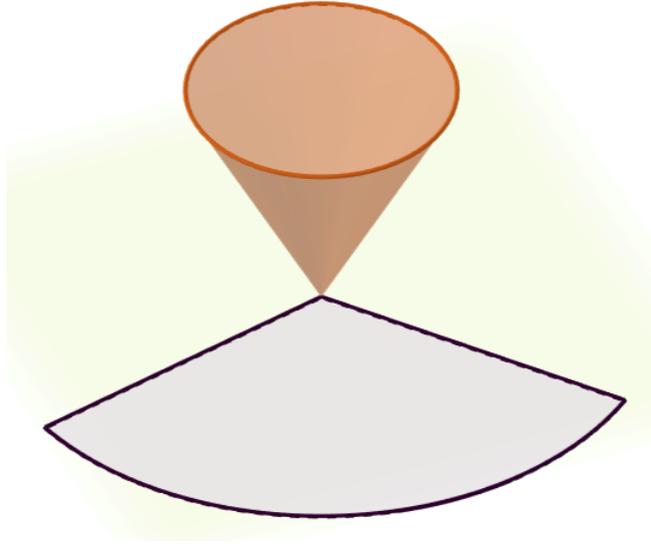


FIGURE 2.16 – Un cône privé d'une droite est isométrique à un morceau du plan

### 2.5.3 Isométrie entre la sphère et le plan

Notre objectif dans ce paragraphe est de montrer qu'il n'existe pas une isométrie entre la sphère et le plan.

**Proposition 2.5.3.** *Soit  $f : S_1 \rightarrow S_2$  un difféomorphisme.*

*$f$  est une isométrie si et seulement si pour toute paramétrisation locale  $\varphi : U \rightarrow S_1$  les coefficients métriques  $E, F$  et  $G$  de  $\varphi$  et  $\tilde{E}, \tilde{F}$  et  $\tilde{G}$  de  $f \circ \varphi$  sont les mêmes.*

*i.e*

$$\tilde{E} = E, \quad \tilde{F} = F, \quad \text{et} \quad \tilde{G} = G$$

*Démonstration.* Supposons que pour toute paramétrisation locale  $\varphi : U \rightarrow S_1$  les coefficients métriques  $E, F$  et  $G$  de  $\varphi$  et  $\tilde{E}, \tilde{F}$  et  $\tilde{G}$  de  $f \circ \varphi$  sont les mêmes. Alors pour toute courbe  $\gamma$  tracée sur  $\varphi(U) \subset S_1$  donnée par

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \varphi(U) \\ t &\longmapsto \varphi(x_1(t), x_2(t)) \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_I \sqrt{(x'_1(t))^2 E(x_1(t), x_2(t)) + 2x'_1(t)x'_2(t)F(x_1(t), x_2(t)) + (x'_2(t))^2 G(x_1(t), x_2(t))} dt \\ &= \int_I \sqrt{(x'_1(t))^2 \tilde{E}(x_1(t), x_2(t)) + 2x'_1(t)x'_2(t)\tilde{F}(x_1(t), x_2(t)) + (x'_2(t))^2 \tilde{G}(x_1(t), x_2(t))} dt \\ &= L(f \circ \gamma) \end{aligned}$$

donc  $f$  est une isométrie.

Réciproquement, Soit  $\varphi : U \rightarrow S_1$  une paramétrisation locale, et  $p \in \varphi(U)$ . Alors il est clair que  $f \circ \varphi$  est une paramétrisation locale de  $S_2$  contenant le point  $f(p)$ . Si on note  $\{\partial_1, \partial_2\}$  la base de  $T_p S_1$  associé à  $\varphi$  et  $\{\tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2\}$  la base de  $T_{f(p)} S_2$  associé à  $f \circ \varphi$ , un calcul des coefficients métriques donne que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_j \rangle_{f(p)} &= \langle T_p f(\partial_i), T_p f(\partial_j) \rangle_{f(p)} \\ &= \langle \partial_i, \partial_j \rangle_p \end{aligned}$$

pour tout  $i, j = 1, 2$ . Et donc  $\tilde{E} = E$ ,  $\tilde{F} = F$ , et  $\tilde{G} = G$ .  
D'où le résultat. □

**Théorème 2.5.1. (*Theorema egregium, Gauss 1827*)**

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces de  $\mathbb{R}^3$ . Si elles sont isométriques alors elles ont même courbure de Gauss.

*Démonstration.* C'est un long calcul qui exprime la courbure de Gauss  $K$  en termes des coefficients métriques  $E, F$  et  $G$  et de leurs dérivées.

Soit  $\varphi : U \rightarrow S_1$  une paramétrisation locale de  $S_1$  et  $E, F, G$  les coefficients métriques associés à  $\varphi$ .

Soit  $p = \varphi(x) \in \varphi(U)$ , on note  $\{\partial_1, \partial_2\}$  la base de  $T_p S_1$  associée à  $\varphi$ .

Alors l'application de Gauss  $n$  est donnée par

$$n \circ \varphi(x) = \frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|}$$

et la courbure de Gauss  $K$  donnée par

$$K(p) = \frac{\det A}{\det G} = \frac{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|^2}$$

où  $G$  et  $A$  sont les matrices de la première et la deuxième forme fondamentale respectivement dans la base  $\{\partial_1, \partial_2\}$ .

On note

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(x) = \partial_{11} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(x) = \partial_{22} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = \partial_{12} \end{cases}$$

donc on a

$$\begin{aligned} a_{11} &= \langle \partial_{11}, n \circ \varphi(x) \rangle \\ &= \frac{1}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|} \langle \partial_{11}, \partial_1 \wedge \partial_2 \rangle \\ a_{22} &= \frac{1}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|} \langle \partial_{22}, \partial_1 \wedge \partial_2 \rangle \\ a_{12} &= \frac{1}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|} \langle \partial_{12}, \partial_1 \wedge \partial_2 \rangle \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} K(p) \|\partial_1 \wedge \partial_2\|^4 &= \langle \partial_{11}, \partial_1 \wedge \partial_2 \rangle \cdot \langle \partial_{22}, \partial_1 \wedge \partial_2 \rangle - (\langle \partial_{12}, \partial_1 \wedge \partial_2 \rangle)^2 \\ &= \det(\partial_{11}, \partial_1, \partial_2) \cdot \det(\partial_{22}, \partial_1, \partial_2) - (\det(\partial_{12}, \partial_1, \partial_2))^2 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\det(X, Y, Z) \cdot \det(X', Y, Z) &= \det({}^t(X, Y, Z)) \cdot \det(X', Y, Z) \\
&= \det({}^t(X, Y, Z) \cdot (X', Y, Z)) \\
&= \begin{vmatrix} \langle X, X' \rangle & \langle X, Y \rangle & \langle X, Z \rangle \\ \langle Y, X' \rangle & \langle Y, Y \rangle & \langle Y, Z \rangle \\ \langle Z, X' \rangle & \langle Z, Y \rangle & \langle Z, Z \rangle \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

donc en remplaçant en trouve

$$\begin{aligned}
K(p) \|\partial_1 \wedge \partial_2\|^4 &= \begin{vmatrix} \langle \partial_{11}, \partial_{22} \rangle & \langle \partial_{11}, \partial_1 \rangle & \langle \partial_{11}, \partial_2 \rangle \\ \langle \partial_1, \partial_{22} \rangle & E(x) & F(x) \\ \langle \partial_2, \partial_{22} \rangle & F(x) & G(x) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle \partial_{12}, \partial_{12} \rangle & \langle \partial_{12}, \partial_1 \rangle & \langle \partial_{12}, \partial_2 \rangle \\ \langle \partial_1, \partial_{12} \rangle & E(x) & F(x) \\ \langle \partial_2, \partial_{12} \rangle & F(x) & G(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \langle \partial_{11}, \partial_{22} \rangle - \langle \partial_{12}, \partial_{12} \rangle & \langle \partial_{11}, \partial_1 \rangle & \langle \partial_{11}, \partial_2 \rangle \\ \langle \partial_1, \partial_{22} \rangle & E(x) & F(x) \\ \langle \partial_2, \partial_{22} \rangle & F(x) & G(x) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \langle \partial_{12}, \partial_1 \rangle & \langle \partial_{12}, \partial_2 \rangle \\ \langle \partial_1, \partial_{12} \rangle & E(x) & F(x) \\ \langle \partial_2, \partial_{12} \rangle & F(x) & G(x) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

En dérivant  $E(x) = \langle \partial_1, \partial_1 \rangle$  par rapport à  $x_1$  on obtient

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}(E(x)) = 2\langle \partial_{11}, \partial_1 \rangle \Rightarrow \langle \partial_{11}, \partial_1 \rangle = \frac{1}{2}E_1$$

de même

$$\begin{cases} \langle \partial_{22}, \partial_2 \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_2}(G(x)) \right) = \frac{1}{2}G_2 \\ \langle \partial_{21}, \partial_1 \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_2}(E(x)) \right) = \frac{1}{2}E_2 \\ \langle \partial_{12}, \partial_2 \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}(G(x)) \right) = \frac{1}{2}G_1 \end{cases}$$

Dérivant maintenant  $F(x) = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle$  on obtient

$$\begin{cases} F_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}(F(x)) = \langle \partial_{11}, \partial_2 \rangle + \langle \partial_1, \partial_{12} \rangle \\ F_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}(F(x)) = \langle \partial_{21}, \partial_2 \rangle + \langle \partial_1, \partial_{22} \rangle \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \langle \partial_{11}, \partial_2 \rangle = F_1 - \frac{1}{2}E_2 \\ \langle \partial_{22}, \partial_1 \rangle = F_2 - \frac{1}{2}G_1 \end{cases}$$

Il reste le terme le plus délicat

$$\langle \partial_{11}, \partial_{22} \rangle - \langle \partial_{12}, \partial_{12} \rangle$$

pour le traiter on va dériver les relations précédentes.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_2}(\langle \partial_{11}, \partial_2 \rangle) &= \langle \partial_{211}, \partial_2 \rangle + \langle \partial_{11}, \partial_{22} \rangle \\
&= \langle \partial_{112}, \partial_2 \rangle + \langle \partial_{11}, \partial_{22} \rangle \\
\frac{\partial}{\partial x_1}(\langle \partial_{22}, \partial_1 \rangle) &= \langle \partial_{122}, \partial_1 \rangle + \langle \partial_{22}, \partial_{11} \rangle \\
&= \langle \partial_{221}, \partial_1 \rangle + \langle \partial_{11}, \partial_{22} \rangle \\
\frac{\partial}{\partial x_2}(\langle \partial_{12}, \partial_1 \rangle) &= \langle \partial_{212}, \partial_1 \rangle + \langle \partial_{12}, \partial_{21} \rangle \\
&= \langle \partial_{221}, \partial_1 \rangle + \langle \partial_{12}, \partial_{12} \rangle \\
\frac{\partial}{\partial x_1}(\langle \partial_{12}, \partial_2 \rangle) &= \langle \partial_{112}, \partial_2 \rangle + \langle \partial_{12}, \partial_{12} \rangle
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\langle \partial_{11}, \partial_{22} \rangle - \langle \partial_{12}, \partial_{12} \rangle &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_2}(\langle \partial_{11}, \partial_2 \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\langle \partial_{22}, \partial_1 \rangle) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\langle \partial_{12}, \partial_1 \rangle) - \frac{\partial}{\partial x_1}(\langle \partial_{12}, \partial_2 \rangle) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( F_{21} - \frac{1}{2}E_{22} + F_{12} - \frac{1}{2}G_{11} - \frac{1}{2}E_{22} - \frac{1}{2}G_{11} \right) \\
&= -\frac{1}{2}E_{22} + F_{12} - \frac{1}{2}G_{11}
\end{aligned}$$

Ainsi  $K$  ne s'exprime qu'en fonction de  $E$ ,  $F$ ,  $G$  et de leurs dérivées premières et secondes.

Et comme on a

$$\|\partial_1 \wedge \partial_2\| = \sqrt{E(x)G(x) - F^2(x)}$$

alors on pose

$$c = \|\partial_1 \wedge \partial_2\|^4 = (E(x)G(x) - F^2(x))^2$$

Au passage nous venons d'établir la formule de **Brioschi**

$$K(p) = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{22} + F_{12} - \frac{1}{2}G_{11} & \frac{1}{2}E_1 & F_1 - \frac{1}{2}E_2 \\ F_2 - \frac{1}{2}G_1 & E(x) & F(x) \\ \frac{1}{2}G_2 & F(x) & G(x) \end{vmatrix} - \frac{1}{c} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_2 & \frac{1}{2}G_1 \\ \frac{1}{2}E_2 & E(x) & F(x) \\ \frac{1}{2}G_1 & F(x) & G(x) \end{vmatrix}$$

□

**Corollaire 2.5.1.** *Il n'existe pas une isométrie entre la sphère et le plan.*

*Démonstration.* Comme la courbure de Gauss du plan est nulle et celle de la sphère non ( $K(p) = 1/r^2 \neq 0$ ), alors en déduit d'après le théorème précédent que le plan et la sphère ne sont pas isométriques. □

# Chapitre 3

## Propriétés des transformations de Möbius

Dans ce chapitre on va parler premièrement sur la sphère de Riemann ensuite on va voir les transformations de Möbius et leurs propriétés algébriques et géométriques. Enfin on terminera ce chapitre par la notion de birapport et quelques applications.

### 3.1 La sphère de Riemann

#### 3.1.1 Définitions et propriétés

**Définition 3.1.1.** *La sphère de Riemann  $\mathbb{C}_\infty$  peut être définie comme l'ensemble  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  obtenu en augmentant l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes avec un point supplémentaire, noté  $\infty$ , où  $\infty$  n'est pas un nombre complexe, mais est un élément supplémentaire ajouté à l'ensemble, avec les conventions supplémentaires*

$$z + \infty = \infty, \quad \infty \times \infty = \infty, \quad \text{et} \quad \frac{z}{\infty} = 0$$

pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , et

$$z \times \infty = \infty, \quad \text{et} \quad \frac{z}{0} = \infty$$

pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ .

**Remarque 3.1.** *Le point  $\infty$  ne peut pas être ajouté à lui-même ou soustrait de lui-même. De plus, 0 et  $\infty$  ne peuvent pas être divisés par eux-mêmes.*

**Définition 3.1.2. (topologie de  $\mathbb{C}_\infty$ )**

*La sphère de Riemann est munie de la topologie suivante. Les voisinages d'un point  $z \in \mathbb{C}$  sont les ouverts de  $\mathbb{C}$  qui contiennent  $z$ , auxquels on peut ajouter ou non  $\infty$ . Les voisinages de  $\infty$  sont les ensembles qui contiennent tous les nombres complexes  $z$  tels que  $|z| > r$  pour un certain réel  $r$ .*

### 3.1.2 Projection stéréographique de la sphère de Riemann

**Définition 3.1.3.** (*projection stéréographique*)

La projection stéréographique de la sphère de Riemann est donnée par

$$\pi : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$$

$$(u, v, w) \longmapsto \begin{cases} \frac{u}{1-w} + i \frac{v}{1-w} & \text{si } (u, v, w) \neq (0, 0, 1) \\ \infty & \text{si } (u, v, w) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

de plus  $\pi$  est bijective et son inverse est donnée par

$$\pi^{-1} : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

$$z \longmapsto \begin{cases} \left( \frac{2\Re[z]}{|z|^2 + 1}, \frac{2\Im[z]}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) & \text{si } z \neq \infty \\ (0, 0, 1) & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Comme la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  est un espace métrique compact, et comme la projection stéréographique  $\pi$  est un homéomorphisme, on en déduit le résultat suivant :

**Proposition 3.1.1.** *La sphère de Riemann  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  est un espace topologique compact. De plus il est métrisable, c'est à dire que sa topologie peut être définie par une distance.*

## 3.2 Transformations de Möbius

### 3.2.1 Définitions et propriétés

**Définition 3.2.1.** Soient  $a, b, c$  et  $d$  des nombres complexes satisfaisant

$$ad - bc \neq 0 \tag{3.1}$$

Alors la **transformation de Möbius** associée est l'application  $\mu_{a,b,c,d}$  définie par

$$\mu_{a,b,c,d} : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$$

$$z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

pour  $cz + d \neq 0$  avec

$$\mu_{a,b,c,d}\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty \quad \text{et} \quad \mu_{a,b,c,d}(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{si } c \neq 0 \\ \infty & \text{si } c = 0 \end{cases}$$

**Remarque 3.2.** Cette définition peut sembler mathématiquement incorrecte pour le lecteur averti. En effet, comment peut-on définir une fonction sur  $\mathbb{C}_\infty$  ? Cela laisse supposer que l'infini est un point au même titre que 0 ou  $1+i$ , et que l'on peut évaluer une transformation de Möbius  $\mu_{a,b,c,d}$  en ce point. Peut-on dire que cette opération revient tout simplement à calculer la limite  $z$  tend vers  $\infty$ , autrement dit, a-t-on l'égalité  $\lim_{z \rightarrow \infty} \mu_{a,b,c,d}(z) = \mu_{a,b,c,d}(\infty)$  ? La variable  $z$  étant complexe, elle peut tendre vers l'infini

dans toutes les directions possibles. Même si le module de  $z$  tend indubitablement vers l'infini dans tous les cas, rien ne garantit a priori l'équivalence de ces deux limites. C'est grâce à la projection stéréographique que l'on peut contourner ces difficultés techniques et identifier l'infini dans le plan complexe à un seul et unique point.

**Notation 3.1.** On a pour tous nombres complexes  $a, b, c$  et  $d$  qui vérifiant (3.1)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$$

Alors on note  $\mu_{a,b,c,d}$  par  $\mu_A$  et on a pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$\mu_A(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } cz+d \neq 0 \\ \infty & \text{si } c \neq 0 \text{ et } z = \frac{-d}{c} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu_A(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{si } c \neq 0 \\ \infty & \text{si } c = 0 \end{cases}$$

**Exemples 3.2.1.** 1) La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  définit l'application  $\mu_A(z) = z + b$ , il s'agit donc simplement de la translation par le vecteur  $b \in \mathbb{C}$ .

2) Si  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ , l'application correspondante est  $\mu_A(z) = \frac{a}{d}z$ , la multiplication par  $\frac{a}{d} \in \mathbb{C}^*$ .

3) La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  induit l'application  $\mu_A(z) = \frac{1}{z}$ .

**Théorème 3.2.1.** Les transformations de Möbius sont des applications injectives.

*Démonstration.* Soit  $\mu_A$  une transformation de Möbius, alors on a

$$\begin{aligned} \mu_A(z_1) = \mu_A(z_2) &\Rightarrow \frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d} \\ &\Rightarrow (az_1+b)(cz_2+d) = (az_2+b)(cz_1+d) \\ &\Rightarrow adz_1 + bcz_2 = adz_2 + bcz_1 \\ &\Rightarrow (ad-bc)z_1 = (ad-bc)z_2 \\ &\Rightarrow z_1 = z_2 \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

**Proposition 3.2.1.** Soient  $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$  et  $\mu_A, \mu_B$  les transformations de Möbius correspondantes (resp.). Alors  $\mu_A \circ \mu_B$  est une transformation de Möbius et on a

$$\mu_{AB} = \mu_A \circ \mu_B$$

où  $\mu_{AB}$  est la transformation de Möbius correspond à  $AB$ .

*Démonstration.* Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $GL(2, \mathbb{C})$  telles que

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

donc on a  $AB \in GL(2, \mathbb{C})$  et

$$AB = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

Soient  $\mu_A, \mu_B$  et  $\mu_{AB}$  les transformations de Möbius associées à  $A, B$  et  $AB$  respectivement, alors on a

$$\mu_A(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{pour } c_1 z + d_1 \neq 0, \quad \mu_B(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \quad \text{pour } c_2 z + d_2 \neq 0$$

et

$$\mu_{AB}(z) = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3} \quad \text{pour } c_3 z + d_3 \neq 0$$

1) Supposons que  $z$  est un nombre complexe (i.e  $z \in \mathbb{C}$ ).

On a

$$\begin{aligned} (a_1 \mu_B(z) + b_1)(c_2 z + d_2) &= a_1(a_2 z + b_2) + b_1(c_2 z + d_2) \\ &= a_3 z + b_3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (c_1 \mu_B(z) + d_1)(c_2 z + d_2) &= c_1(a_2 z + b_2) + d_1(c_2 z + d_2) \\ &= c_3 z + d_3 \end{aligned}$$

Alors on distingue deux cas.

1<sup>er</sup> cas : Si  $c_2 z + d_2 \neq 0$  on a deux sous cas

*i)* Si  $c_1 \mu_B(z) + d_1 \neq 0$  on a

$$\begin{aligned} \mu_A \circ \mu_B(z) &= \mu_A(\mu_B(z)) \\ &= \frac{a_1 \mu_B(z) + b_1}{c_1 \mu_B(z) + d_1} \\ &= \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3} \\ &= \mu_{AB}(z) \end{aligned}$$

*ii)* Si  $c_1 \mu_B(z) + d_1 = 0$  on a

$$\begin{aligned} \mu_A(\mu_B(z)) &= \frac{a_1 \mu_B(z) + b_1}{c_1 \mu_B(z) + d_1} \\ &= \infty \end{aligned}$$

et on a

$$c_3 z + d_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{AB}(z) = \infty$$

donc

$$\begin{aligned} \mu_A \circ \mu_B(z) &= \mu_A(\mu_B(z)) \\ &= \infty \\ &= \mu_{AB}(z) \end{aligned}$$

Alors on a

$$\mu_A \circ \mu_B(z) = \mu_{AB}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad c_2z + d_2 \neq 0 \quad (3.2)$$

2<sup>ème</sup> cas : Si  $c_2z + d_2 = 0$  on a

D'une part, on ne peut pas avoir  $c_2 = d_2 = 0$ , car  $B \in GL(2, \mathbb{C})$ . Donc ou bien  $z = d_2 = 0$  et  $c_2 \neq 0$  ou bien  $c_2 \neq 0$ ,  $d_2 \neq 0$  et  $z = -d_2/c_2$ . Alors dans les deux cas on a  $c_2 \neq 0$  et  $z = -d_2/c_2$ . Et d'autre part, pour la même raison on ne peut pas avoir  $a_2z + b_2 = c_2z + d_2 = 0$ , alors comme  $c_2z + d_2 = 0$  on a  $a_2z + b_2 \neq 0$ .  
donc

$$\mu_B(z) = \infty$$

et puisque  $z = -d_2/c_2$  alors on a

$$\begin{aligned} c_2(a_3z + b_3) &= -d_2a_3 + c_2b_3 \\ &= c_2(a_1b_2 + b_1d_2) - d_2(a_1a_2 + b_1c_2) \\ &= a_1(c_2b_2 - a_2d_2) \\ &= a_1c_2(a_2z + b_2) \end{aligned}$$

de même on trouve

$$c_2(c_3z + d_3) = c_1c_2(a_2z + b_2)$$

et comme  $c_2 \neq 0$  alors

$$(a_3z + b_3) = a_1(a_2z + b_2) \quad \text{et} \quad (c_3z + d_3) = c_1(a_2z + b_2)$$

On distingue deux sous cas

i) Si  $c_1 \neq 0$  alors on a

$$\begin{aligned} \mu_{AB}(z) &= \frac{a_1}{c_1} \\ &= \mu_A(\infty) \\ &= \mu_A(\mu_B(z)) \\ &= \mu_A \circ \mu_B(z) \end{aligned}$$

ii) Si  $c_1 = 0$  alors on a

$$c_3z + d_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{AB}(z) = \infty$$

donc

$$\begin{aligned} \mu_{AB}(z) &= \infty \\ &= \mu_A(\infty) \\ &= \mu_A(\mu_B(z)) \\ &= \mu_A \circ \mu_B(z) \end{aligned}$$

Alors on a

$$\mu_A \circ \mu_B(z) = \mu_{AB}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad c_2z + d_2 = 0 \quad (3.3)$$

Donc de (3.2) et (3.3) on déduit que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \mu_A \circ \mu_B(z) = \mu_{AB}(z) \quad (3.4)$$

2) Maintenant, supposons que  $z$  est égale à l'infini (i.e  $z = \infty$ ).

On a deux cas

1<sup>er</sup> cas : Si  $c_2 \neq 0$  on a

$$\mu_B(\infty) = \frac{a_2}{c_2}$$

alors on distingue deux sous cas

*i)* Si  $c_1\mu_B(\infty) + d_1 \neq 0$  alors on a

$$\begin{aligned} \mu_A \circ \mu_B(\infty) &= \mu_A(\mu_B(\infty)) \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 c_2}{c_1 a_2 + d_1 c_2} \\ &= \frac{a_3}{c_3} \\ &= \mu_{AB}(\infty) \end{aligned}$$

*ii)* Si  $c_1\mu_B(\infty) + d_1 = 0$  on a

$$\frac{c_1 a_2 + d_1 c_2}{c_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 0$$

et

$$\mu_A(\mu_B(\infty)) = \infty$$

donc

$$\begin{aligned} \mu_{AB}(\infty) &= \infty \\ &= \mu_A(\mu_B(\infty)) \\ &= \mu_A \circ \mu_B(\infty) \end{aligned}$$

2<sup>ème</sup> cas : Si  $c_2 = 0$  on a :

$$\mu_B(\infty) = \infty$$

alors on distingue deux sous cas :

*i)* Si  $c_1 \neq 0$  alors on a

$$a_3 = a_1 a_2 \quad \text{et} \quad c_3 = c_1 a_2$$

avec  $a_2 \neq 0$  car  $B \in GL(2, \mathbb{C})$  alors

$$\begin{aligned} \mu_A \circ \mu_B(\infty) &= \mu_A(\mu_B(\infty)) \\ &= \mu_A(\infty) \\ &= \frac{a_1}{c_1} \\ &= \frac{a_3}{c_3} \\ &= \mu_{AB}(\infty) \end{aligned}$$

ii) Si  $c_1 = 0$  alors on a

$$\mu_{AB}(\infty) = \infty \quad (c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow c_3 = 0)$$

et

$$\begin{aligned} \mu_A \circ \mu_B(\infty) &= \mu_A(\mu_B(\infty)) \\ &= \mu_A(\infty) \\ &= \infty \\ &= \mu_{AB}(\infty) \end{aligned}$$

et donc on a

$$\mu_A \circ \mu_B(\infty) = \mu_{AB}(\infty) \quad (3.5)$$

donc le résultat découle de (3.4) et (3.5).  $\square$

**Proposition 3.2.2.** Soit  $A \in GL(2, \mathbb{C})$  et  $\mu_A$  la transformation de Möbius associé. Alors on a pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}^*$

$$\mu_A = \mu_{\alpha A}$$

où  $\mu_{\alpha A}$  est la transformation de Möbius associé à  $\alpha A$

*Démonstration.* Soit  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  et  $A \in GL(2, \mathbb{C})$  telle que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors comme  $A \in GL(2, \mathbb{C})$  et  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  on a

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$$

donc pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $cz + d \neq 0$  on a

$$\begin{aligned} \mu_A(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{\alpha(az + b)}{\alpha(cz + d)} \\ &= \frac{\alpha az + \alpha b}{\alpha cz + \alpha d} \\ &= \mu_{\alpha A}(z) \end{aligned}$$

et on a par définition

$$\begin{aligned} \mu_A\left(\frac{-d}{c}\right) &= \infty \\ &= \mu_{\alpha A}\left(\frac{-d}{c}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mu_A(\infty) &= \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{si } c \neq 0 \\ \infty & \text{si } c = 0 \end{cases} \\ &= \mu_{\alpha A}(\infty) \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

**Proposition 3.2.3.** Soit  $A \in GL(2, \mathbb{C})$  et  $\mu_A$  la transformations de Möbius associé. Alors  $\mu_A$  est bijective et sont inverse  $\mu_A^{-1}$  est donné par

$$\mu_A^{-1} = \mu_{A^{-1}} = \mu^{t_{com}A}$$

où  $\mu_{A^{-1}}$  et  $\mu^{t_{com}A}$  sont les transformations de Möbius associé respectivement à  $A^{-1}$  et  ${}^t_{com}A$ .

*Démonstration.* Soit  $A \in GL(2, \mathbb{C})$  alors on a

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} {}^t_{com}A \\ &= \alpha {}^t_{com}A \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{\det(A)} \neq 0$$

On a d'après la proposition **3.2.1.**

$$\begin{cases} \mu_A \circ \mu_{A^{-1}}(z) = \mu_{I_2}(z) = z \\ \mu_{A^{-1}} \circ \mu_A(z) = \mu_{I_2}(z) = z \end{cases}$$

donc on a

$$\mu_A \circ \mu_{A^{-1}} = \mu_{A^{-1}} \circ \mu_A = id_{\mathbb{C}_\infty}$$

d'où

$$\mu_A^{-1} = \mu_{A^{-1}}$$

et comme

$$A^{-1} = \alpha {}^t_{com}A$$

alors d'après la proposition **3.2.2.** on a

$$\mu_{A^{-1}} = \mu^{t_{com}A}$$

d'où le résultat. □

### 3.2.2 Transformations de Möbius et rotations

**Théorème 3.2.2.** Soient  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$  et  $\mu_A$  sa transformation de Möbius associé définit par

$$\begin{aligned} \mu_A : \mathbb{C}_\infty &\longrightarrow \mathbb{C}_\infty \\ z &\longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

pour  $cz + d \neq 0$  avec

$$\mu_A\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty \quad \text{et} \quad \mu_A(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{si } c \neq 0 \\ \infty & \text{si } c = 0 \end{cases}$$

Alors  $\mu_A$  correspond à une rotation de la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  si et seulement si  $d = \bar{a}$  et  $c = -\bar{b}$ .

*Démonstration.* Supposons que  $d = \bar{a}$  et  $c = -\bar{b}$  alors on a

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

et

$$\mu_A(z) = \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}$$

pour  $-\bar{b}z + \bar{a} \neq 0$  avec

$$\mu_A\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right) = \infty \quad \text{et} \quad \mu_A(\infty) = \begin{cases} -\frac{a}{\bar{b}} & \text{si } \bar{b} \neq 0 \\ \infty & \text{si } \bar{b} = 0 \end{cases}$$

Soit  $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ , on pose

$$z_0 = \pi(u_0, v_0, w_0) = \frac{u_0 + iv_0}{1 - w_0}$$

Soit  $z_1 = \mu_A(z_0)$  alors

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}} \\ &= \frac{a(u_0 + iv_0) + b(1 - w_0)}{-\bar{b}(u_0 + iv_0) + \bar{a}(1 - w_0)} \end{aligned}$$

Comme la projection stéréographique est bijective alors

$$\exists (u_1, v_1, w_1) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}, z_1 = \pi(u_1, v_1, w_1)$$

où

$$u_1 = \frac{2\Re[z_1]}{|z_1|^2 + 1}, \quad v_1 = \frac{2\Im[z_1]}{|z_1|^2 + 1} \quad \text{et} \quad w_1 = \frac{|z_1|^2 - 1}{|z_1|^2 + 1}$$

Maintenant nous cherchons à exprimer les valeurs de  $u_1$ ,  $v_1$  et  $w_1$  en termes de  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$ . On a

$$\begin{aligned} |a(u_0 + iv_0) + b(1 - w_0)|^2 &= (a(u_0 + iv_0) + b(1 - w_0))(\bar{a}(u_0 - iv_0) + \bar{b}(1 - w_0)) \\ &= |a|^2(u_0^2 + v_0^2) + |b|^2(1 - w_0)^2 + 2\Re[a\bar{b}(u_0 + iv_0)(1 - w_0)] \\ &= \left[1 + (|a|^2 - |b|^2)w_0 + 2\Re[a\bar{b}(u_0 + iv_0)]\right](1 - w_0) \end{aligned}$$

de même on trouve

$$|-\bar{b}(u_0 + iv_0) + \bar{a}(1 - w_0)|^2 = \left[1 - (|a|^2 - |b|^2)w_0 - 2\Re[a\bar{b}(u_0 + iv_0)]\right](1 - w_0)$$

donc

$$|z_1|^2 = \frac{1 + (|a|^2 - |b|^2)w_0 + 2\Re[a\bar{b}(u_0 + iv_0)]}{1 - (|a|^2 - |b|^2)w_0 - 2\Re[a\bar{b}(u_0 + iv_0)]}$$

d'où

$$|z_1|^2 + 1 = \frac{2}{1 - (|a|^2 - |b|^2)w_0 - 2\Re[a\bar{b}(u_0 + iv_0)]}.$$

Et comme

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{a(u_0 + iv_0) + b(1 - w_0)}{-\bar{b}(u_0 + iv_0) + \bar{a}(1 - w_0)} \\
&= \frac{[a(u_0 + iv_0) + b(1 - w_0)] [-b(u_0 - iv_0) + a(1 - w_0)]}{|-\bar{b}(u_0 + iv_0) + \bar{a}(1 - w_0)|^2} \\
&= \frac{(a^2 - b^2)u_0 + i(a^2 + b^2)v_0 - 2abw_0}{1 - (|a|^2 - |b|^2)w_0 - 2\Re[a\bar{b}(u_0 + iv_0)]}
\end{aligned}$$

alors

$$u_1 + iv_1 = (a^2 - b^2)u_0 + i(a^2 + b^2)v_0 - 2abw_0$$

et

$$w_1 = (|a|^2 - |b|^2)w_0 + 2\Re[a\bar{b}(u_0 + iv_0)]$$

Supposons que  $b \neq 0$ , alors ceci implique que  $|a| < 1$  et donc

$$\exists \theta \in ]0, 2\pi[, \quad \Re[a] = \cos \frac{\theta}{2}$$

et soit  $l$ ,  $m$  et  $n$  trois nombres réels déterminés de telle sorte que

$$a = \cos \frac{\theta}{2} + in \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad b = (m - il) \sin \frac{\theta}{2}$$

donc ceci implique que

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (\text{car} : |a|^2 + |b|^2 = 1).$$

On a

$$\begin{aligned}
|a|^2 - |b|^2 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} + (n^2 - (m^2 + l^2)) \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \cos \theta + n^2(1 - \cos \theta) \\
a^2 - b^2 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2in \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - n^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - (m^2 - 2ilm - l^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \cos^2 \frac{\theta}{2} + in \sin \theta + (l^2 + 2ilm - (m^2 + n^2)) \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \cos \theta + in \sin \theta + (l^2 + ilm)(1 - \cos \theta) \\
a^2 + b^2 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2in \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - n^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + (m^2 - 2ilm - l^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \cos^2 \frac{\theta}{2} + in \sin \theta + (m^2 - 2ilm - (l^2 + n^2)) \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \cos \theta + in \sin \theta + (m^2 - ilm)(1 - \cos \theta) \\
2a\bar{b} &= 2(\cos \frac{\theta}{2} + in \sin \frac{\theta}{2})(m + il) \sin \frac{\theta}{2} \\
&= (m + il) \sin \theta - n(l - im)(1 - \cos \theta) \\
2ab &= 2(\cos \frac{\theta}{2} + in \sin \frac{\theta}{2})(m - il) \sin \frac{\theta}{2} \\
&= (m - il) \sin \theta + n(l + im)(1 - \cos \theta)
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 \Re[a^2 - b^2] - v_0 \Im[a^2 + b^2] - 2w_0 \Re[ab] \\
&= u_0 \cos \theta - (mw_0 + nv_0) \sin \theta + l(lu_0 + mv_0 - nw_0)(1 - \cos \theta) \\
v_1 &= u_0 \Im[a^2 - b^2] + v_0 \Re[a^2 + b^2] - 2w_0 \Im[ab] \\
&= v_0 \cos \theta + (nu_0 + lw_0) \sin \theta + m(lu_0 + mv_0 - nw_0)(1 - \cos \theta) \\
w_1 &= (|a|^2 - |b|^2)w_0 + 2\Re[a\bar{b}(u_0 + iv_0)] \\
&= w_0 \cos \theta + (mu_0 - lv_0) \sin \theta - n(lu_0 + mv_0 - nw_0)(1 - \cos \theta)
\end{aligned}$$

On pose

$$r_1 = (u_1, v_1, w_1), \quad r_0 = (u_0, v_0, w_0), \quad \text{et} \quad e_1 = (-l, -m, n)$$

Il est clair que les vecteurs  $r_1$ ,  $r_0$  et  $e_1$  sont unitaire de plus on a

$$\begin{aligned}
r_1 &= (1 - \cos \theta) \langle r_0, e_1 \rangle e_1 + \cos \theta r_0 + \sin \theta e_1 \wedge r_0 \\
&= R(\theta, e_1)(r_0)
\end{aligned}$$

où  $R(\theta, e_1)$  est la rotation d'angle  $\theta$  et d'axe orienté par  $e_1$ .

Comme conclusion on a montrer que pour tout nombre complexe  $z_1$  et  $z_2$  et toute matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$  avec  $b \neq 0$  et  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  on a

$$z_1 = \mu_A(z_0) \quad \Rightarrow \quad \pi^{-1}(z_1) = R(\theta, e_1)(\pi^{-1}(z_0))$$

Le résultat reste vrai si  $b = 0$ . En effet, si  $b = 0$  alors on a

$$|a| = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \theta \in ]0, 2\pi[, \quad a = \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}$$

donc

$$a^2 = \cos \theta + i \sin \theta$$

alors

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 \cos \theta - v_0 \sin \theta \\
v_1 &= v_0 \cos \theta + u_0 \sin \theta \\
w_1 &= w_0
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
r_1 &= (1 - \cos \theta) \langle r_0, e_2 \rangle e_2 + \cos \theta r_0 + \sin \theta e_2 \wedge r_0 \\
&= R(\theta, e_2)(r_0)
\end{aligned}$$

où  $e_2 = (0, 0, 1)$  et  $R(\theta, e_2)$  est la rotation d'angle  $\theta$  et d'axe orienté par  $e_2$ .

Réciproquement, pour chaque rotation autour de l'origine dans  $\mathbb{R}^3$  est une rotation autour d'un axe fixé suivant un angle donné. Il en résulte que, pour toute rotation de la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  il existe deux nombres complexe  $a$  et  $b$  tels que la transformation de Möbius dont  $c = -\bar{b}$  et  $d = \bar{a}$  correspond à la rotation donnée. De plus, une transformation de Möbius avec les coefficients  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , et  $d'$  correspond à la même transformation de la sphère comme une transformation de Möbius  $\mu$  si et seulement si  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , et  $d'$  sont égaux respectivement à  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et  $d$  ou à  $-a$ ,  $-b$ ,  $-c$ , et  $-d$ . d'où le résultat.  $\square$

### 3.2.3 Les groupes $SO(3)$ et $SU(2)$

**Définition 3.2.2.** (i) L'ensemble  $SO(3)$  donné par

$$SO(3) := \{A \in M_3(\mathbb{R}) / {}^tAA = I_3, \det A = 1\}$$

est un sous groupe de groupe orthogonal  $O(3)$  appelé **groupe des rotations**.

(ii) L'ensemble  $SU(2)$  donné par

$$SU(2) := \{A \in M_2(\mathbb{C}) / {}^t\bar{A}A = I_2, \det A = 1\}$$

est un sous groupe de groupe unitaire  $U(2)$  appelé **groupe spécial unitaire**.

**Proposition 3.2.4.** On a

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

*Démonstration.* Il est clair que la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$  avec  $a, b \in \mathbb{C}$  et  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  est dans  $SU(2)$ .

Réciproquement, Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  alors  $A \in SU(2)$  si et seulement si on a

$$ad - bc = 1 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ceci équivalent à

$$ad - bc = 1, \quad |a|^2 + |c|^2 = 1, \quad |b|^2 + |d|^2 = 1, \quad \text{et} \quad \bar{a}b + \bar{c}d = 0$$

l'équation  $\bar{a}b + \bar{c}d = 0$  nous dit que le déterminant  $\begin{vmatrix} \bar{a} & d \\ -\bar{c} & b \end{vmatrix} = 0$ . Donc le vecteur  $(a, -\bar{c})$  est colinéaire à  $(d, b)$ . Donc il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que

$$\begin{cases} d = \lambda \bar{a} \\ b = -\lambda \bar{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \lambda \bar{a} \\ c = -\lambda \bar{b} \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} ad - bc &= 1 \\ &= \lambda |a|^2 + \lambda |c|^2 \\ &= \lambda (|a|^2 + |c|^2) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

alors  $\lambda = 1$  est par conséquent

$$\begin{cases} d = \bar{a} \\ c = -\bar{b} \end{cases}$$

d'où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

d'où le résultat. □

**Remarque 3.3.** Le théorème 3.2.2. garantit que pour chaque matrice  $A$  de  $SU(2)$  la transformation de Möbius associé  $\mu_A$  correspond à une rotation de la sphère  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . On obtient de cette façon un homomorphisme de groupe entre le groupe spécial unitaire  $SU(2)$  et le groupe des rotations  $SO(3)$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

D'où la proposition suivante.

**Proposition 3.2.5.** Considérons l'application  $\varphi$  défini par

$$\begin{aligned} \varphi : SU(2) &\longrightarrow SO(3) \\ A &\longmapsto \mathcal{M}\left(R_{\mu_A}(\theta, e_1), \beta_{cano}\right) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{M}\left(R_{\mu_A}(\theta, e_1), \beta_{cano}\right)$  est la matrice de la rotation  $R_{\mu_A}(\theta, e_1)$  correspondante à la transformation de Möbius  $\mu_A$  associé à  $A$  dans la base canonique  $\beta_{cano}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Alors  $\varphi$  est un homomorphisme de groupe surjectif, dont le noyau est  $\text{Ker}\varphi = \{\pm I\}$ .

*Démonstration.* Il est clair que  $\varphi$  est un homomorphisme de groupe. La surjectivité découle de la démonstration du théorème 3.2.2.. Montrons que le noyau de  $\varphi$  est égale à  $\{\pm I\}$ .

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \text{Ker}\varphi$  alors on a

$$\begin{aligned} \varphi(A) = I_3 &\Rightarrow R_{\mu_A}(\theta, e_1) = id_{\mathbb{R}^3} \\ &\Rightarrow \mu_A = id_{\mathbb{C}_\infty} \\ &\Rightarrow \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}_\infty \\ &\Rightarrow \bar{b}z^2 + (a - \bar{a})z + b = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \\ &\Rightarrow b = 0 \quad \text{et} \quad a = \bar{a} \\ &\Rightarrow a = \pm 1 \\ &\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.2.1.** L'application  $\bar{\varphi}$  défini par

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : SU(2)/\{\pm I\} &\longrightarrow SO(3) \\ A &\longmapsto \bar{\varphi}(A) = \varphi(A) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

$\bar{\varphi}$  est un isomorphisme de groupe topologique.

## 3.3 Le birapport

### 3.3.1 Définitions et propriétés

**Définition 3.3.1.** Étant donnés  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$  avec  $z_1 \neq z_4$  et  $z_2 \neq z_3$ , leur **birapport** est le nombre complexe

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} \in \mathbb{C},$$

avec la convention que  $[\infty, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$ , et similairement pour les autres coordonnées.

Notons que cette convention est naturelle, puisque  $\frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$  est la limite du birapport  $[z_1, z_2; z_3, z_4]$  lorsque  $z_1$  tend vers l'infini.

**Remarque 3.4.** 1) Si  $z_1 = z_2 = z$  on obtient

$$[z, z; z_3, z_4] = \frac{(z - z_3)(z - z_4)}{(z - z_3)(z - z_4)} = 1$$

indépendamment de la valeur de  $z_3$  et de  $z_4$ . Similairement,  $[z_1, z_2; z, z] = 1$  pour tous  $z_1, z_2$ .

2) Par définition du birapport  $[z_1, z_2; z_3, z_4]$  on a

$$\begin{aligned} [z_1, z_2; z_3, z_4] &= [z_2, z_1; z_4, z_3] \\ &= [z_3, z_4; z_1, z_2] \\ &= \frac{1}{[z_2, z_1; z_3, z_4]} \\ &= \frac{1}{[z_1, z_2; z_4, z_3]} \\ &= 1 - [z_1, z_3; z_2, z_4] \end{aligned}$$

**Théorème 3.3.1.** Soient  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$  avec  $z_1 \neq z_4$  et  $z_2 \neq z_3$ , et soit  $\mu_A$  une transformation de Möbius. Alors on a

$$[\mu_A(z_1), \mu_A(z_2); \mu_A(z_3), \mu_A(z_4)] = [z_1, z_2; z_3, z_4]$$

*Démonstration.* On a

$$[\mu_A(z_1), \mu_A(z_2); \mu_A(z_3), \mu_A(z_4)] = \frac{(\mu_A(z_1) - \mu_A(z_3))(\mu_A(z_2) - \mu_A(z_4))}{(\mu_A(z_2) - \mu_A(z_3))(\mu_A(z_1) - \mu_A(z_4))}$$

et on a

$$\begin{aligned} \mu_A(z_1) - \mu_A(z_3) &= \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_3 + b}{cz_3 + d} \\ &= \frac{(az_1 + b)(cz_3 + d) - (az_3 + b)(cz_1 + d)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} \\ &= \frac{(ad - bc)(z_1 - z_3)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} \end{aligned}$$

donc, de même on trouve

$$\begin{aligned} \mu_A(z_2) - \mu_A(z_4) &= \frac{(ad - bc)(z_2 - z_4)}{(cz_2 + d)(cz_4 + d)} \\ \mu_A(z_2) - \mu_A(z_3) &= \frac{(ad - bc)(z_2 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)} \\ \mu_A(z_1) - \mu_A(z_4) &= \frac{(ad - bc)(z_1 - z_4)}{(cz_1 + d)(cz_4 + d)} \end{aligned}$$

alors

$$[\mu_A(z_1), \mu_A(z_2); \mu_A(z_3), \mu_A(z_4)] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)}$$

d'où le résultat. □

### 3.3.2 L'action des transformations de Möbius sur la sphère de Riemann

**Théorème 3.3.2.** *Soient  $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\} \in \mathbb{C}_\infty$  distincts et  $\{w_1, w_2, w_3\} \in \mathbb{C}_\infty$  distincts. Alors il existe une unique transformation de Möbius  $\mu : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  telle que  $\mu(\zeta_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ .*

*Démonstration.* Pour l'existence, on construit  $\mu_1$  envoyant  $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$  sur  $\{0, 1, \infty\}$  ainsi que  $\mu_2$  envoyant  $\{w_1, w_2, w_3\}$  sur  $\{0, 1, \infty\}$  auquel cas la transformation  $\mu_2^{-1} \circ \mu_1$  sera la transformation de Möbius recherchée. La construction de  $\mu_1$  ayant les propriétés voulues repose sur l'observation que

$$\mu_1(z) = \lambda \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_3}$$

pour un  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  quelconque satisfait  $\mu_1(\zeta_1) = 0$  et  $\mu_1(\zeta_3) = \infty$ . Alors on posant

$$\mu_1(z) = \frac{\zeta_2 - \zeta_3}{\zeta_2 - \zeta_1} \cdot \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_3} = [\zeta_2, z; \zeta_3, \zeta_1]$$

on obtient également que  $\mu_1(\zeta_2) = 1$ . Notons que nous utilisons de façon cruciale le fait que  $\zeta_1, \zeta_2$  et  $\zeta_3$  sont distincts pour la construction de  $\mu_1$  comme transformation de Möbius. La construction de  $\mu_2$  est exactement pareille, elle est donné par

$$\mu_2(z) = \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \cdot \frac{z - w_1}{z - w_3} = [w_2, z; w_3, w_1]$$

on a donc  $\mu_2(w_1) = 0$ ,  $\mu_2(w_2) = 1$  et  $\mu_2(w_3) = \infty$ . Alors on a construit la transformation de Möbius  $\mu = \mu_2^{-1} \circ \mu_1$  telle que  $\mu(\zeta_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

Pour l'unicité de la transformation de Möbius construite ci-dessus, on utilise le fait suivant :

il existe une unique transformation de Möbius  $N : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  telle que  $N(0) = 0$ ,  $N(1) = 1$  et  $N(\infty) = \infty$ . En effet, si on pose

$$N(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

alors  $N(0) = 0$  donne  $b = 0$ , alors que  $N(1) = 1$  donne  $c = 0$ , si bien que  $N(1) = 1$  implique que  $a = d$ . On en conclut que  $N = id_{\mathbb{C}_\infty}$ . Revenons alors à la preuve de l'unicité de  $\mu$  : Si  $\mu'$  est aussi transformation de Möbius telle que  $\mu'(\zeta_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ . On a alors que  $\mu_2 \circ \mu \circ \mu_1^{-1}$  et  $\mu_2 \circ \mu' \circ \mu_1^{-1}$  sont deux transformations de Möbius envoyant  $\{0, 1, \infty\}$  sur  $\{0, 1, \infty\}$ , si bien que  $\mu_2 \circ \mu \circ \mu_1^{-1} = \mu_2 \circ \mu' \circ \mu_1^{-1}$  et donc  $\mu = \mu'$ . D'où le résultat.  $\square$

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $\rho : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  la transformation de Möbius définie par*

$$\rho(z) = \frac{1}{z}$$

pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ . Alors on a

- (i)  $\rho$  est une application conforme.
- (ii)  $\rho$  envoie les droites et les cercles de  $\mathbb{C}_\infty$  sur des droites et des cercles de  $\mathbb{C}_\infty$ .

*Démonstration.* (i) En identifiant  $\mathbb{C}$  avec  $\mathbb{R}^2$  on a

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (x, y) &\longmapsto \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

Maintenant prenons deux courbes planes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  paramétrées par la longueur d'arcs telles que

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \text{et} & \quad \gamma_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ t &\longmapsto (u_1(t), v_1(t)) & & \quad t \longmapsto (u_2(t), v_2(t)) \end{aligned}$$

Et soit  $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  un point d'intersection de  $\gamma_1$  avec  $\gamma_2$  c'est-à-dire

$$\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = (a, b)$$

Alors, l'angle entre les deux courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  au point  $A$  est donnée par

$$\begin{aligned} \theta(A) &= \arccos \left( \frac{\langle \gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2) \rangle}{\|\gamma_1'(t_1)\| \cdot \|\gamma_2'(t_2)\|} \right) \\ &= \arccos \left( u_1'(t_1)u_2'(t_2) + v_1'(t_1)v_2'(t_2) \right) \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \text{et} & \quad \tilde{\gamma}_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ t &\longmapsto \rho \circ \gamma_1(t) & & \quad t \longmapsto \rho \circ \gamma_2(t) \end{aligned}$$

Il est clair que  $A' = \rho(A)$  est un point d'intersection de  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$ , alors l'angle entre  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  au point  $A'$  est donnée par

$$\tilde{\theta}(A') = \arccos \left( \frac{\langle \tilde{\gamma}_1'(t_1), \tilde{\gamma}_2'(t_2) \rangle}{\|\tilde{\gamma}_1'(t_1)\| \cdot \|\tilde{\gamma}_2'(t_2)\|} \right)$$

On a d'une part

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1'(t_1) &= \text{Jac}(\rho, A) \cdot \gamma_1'(t_1) \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} \begin{bmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ 2ab & b^2 - a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1'(t_1) \\ v_1'(t_1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} \begin{pmatrix} (b^2 - a^2)u_1'(t_1) - 2ab v_1'(t_1) \\ 2ab u_1'(t_1) + (b^2 - a^2)v_1'(t_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|\tilde{\gamma}_1'(t_1)\| &= \left( \frac{\left[ (a^2 + b^2)^2 ((u_1'(t_1))^2 + (v_1'(t_1))^2) \right]}{(a^2 + b^2)^4} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\|\gamma_1'(t_1)\|}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

de même on trouve

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'_2(t_2) &= \text{Jac}(\rho, A) \cdot \gamma'_2(t_2) \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} \begin{pmatrix} (b^2 - a^2)u'_2(t_2) - 2abv'_2(t_2) \\ 2ab u'_2(t_2) + (b^2 - a^2)v'_2(t_2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et

$$\|\tilde{\gamma}'_2(t_2)\| = \frac{\|\gamma'_2(t_2)\|}{a^2 + b^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}$$

et d'autre part on a

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\gamma}'_1(t_1), \tilde{\gamma}'_2(t_2) \rangle &= \frac{(a^2 + b^2)^2 (u'_1(t_1)u'_2(t_2) + v'_1(t_1)v'_2(t_2))}{(a^2 + b^2)^4} \\ &= \frac{u'_1(t_1)u'_2(t_2) + v'_1(t_1)v'_2(t_2)}{(a^2 + b^2)^2}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(A') &= \arccos \left( \frac{u'_1(t_1)u'_2(t_2) + v'_1(t_1)v'_2(t_2)}{(a^2 + b^2)^2} \cdot (a^2 + b^2)^2 \right) \\ &= \arccos (u'_1(t_1)u'_2(t_2) + v'_1(t_1)v'_2(t_2)) \\ &= \theta(A)\end{aligned}$$

(ii) On va distingué deux cas, dans le premier cas on va montrer que  $\rho$  envoie les droites sur des droites ou des cercles et dans le deuxième cas on va montrer que  $\rho$  envoie les cercles sur des droites ou des cercles.

1<sup>er</sup> cas : Soit  $\Delta$  une droite dont l'équation est donnée par

$$\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z} = 2c \quad \text{où } c \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

donc pour  $\omega = \rho(z)$ , avec  $z \neq 0$  on a  $z = 1/\omega$ . On remplace  $z$  par  $1/\omega$  dans (3.6) on obtient

$$\bar{z}_0 \bar{\omega} + z_0 \omega = 2c|\omega|^2 \quad (*)$$

alors on a deux sous cas :

1) Si  $c = 0$ , alors (\*) devient

$$\bar{z}_0 \bar{\omega} + z_0 \omega = 0$$

qui est une équation d'une droite.

2) Si  $c \neq 0$ , alors (\*) devient

$$\begin{aligned}\omega \bar{\omega} - \frac{z_0 \omega}{2c} - \frac{\bar{z}_0 \bar{\omega}}{2c} = 0 &\Rightarrow \left(\omega - \frac{\bar{z}_0}{2c}\right) \left(\bar{\omega} - \frac{z_0}{2c}\right) - \frac{|z_0|^2}{4c^2} = 0 \\ &\Rightarrow \left|\omega - \frac{\bar{z}_0}{2c}\right| = \frac{|z_0|}{2c}\end{aligned}$$

qui est une équation d'un cercle.

2<sup>ème</sup> cas : Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $r$ , alors son équation est donné par

$$\begin{aligned}|z - z_0| = r &\Rightarrow |z - z_0|^2 = r^2 \\ &\Rightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \\ &\Rightarrow |z|^2 - \bar{z}z_0 - z\bar{z}_0 + |z_0|^2 - r^2 = 0 \quad (**)\end{aligned}$$

Maintenant soit  $\omega = \rho(z)$ , avec  $z \neq 0$  alors on a  $z = 1/\omega$ . On remplace donc  $z$  par  $1/\omega$  dans (\*\*) on trouve

$$1 - z_0\omega - \bar{z}_0\bar{\omega} + |\omega|^2(|z_0|^2 - r^2) = 0 \quad (3.7)$$

donc on distingue deux sous cas :

1) Si  $r = |z_0|$ , alors (3.7) devient

$$z_0\omega + \bar{z}_0\bar{\omega} = 1$$

on pose  $\alpha = \bar{z}_0$  alors on a

$$\bar{\alpha}\omega + \alpha\bar{\omega} = 1$$

c'est une équation d'une droite.

2) Si  $r \neq |z_0|$ , alors (3.7) devient

$$|\omega|^2 - \frac{z_0\omega}{|z_0|^2 - r^2} - \frac{\bar{z}_0\bar{\omega}}{|z_0|^2 - r^2} + \frac{1}{|z_0|^2 - r^2} = 0$$

on pose

$$\omega_0 = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2} \quad \text{et} \quad s^2 = |\omega_0|^2 - \frac{1}{|z_0|^2 - r^2} = \frac{r^2}{(|z_0|^2 - r^2)^2}$$

alors on a

$$\begin{aligned} \omega\bar{\omega} - \omega_0\bar{\omega} - \bar{\omega}_0\omega + \omega_0\bar{\omega}_0 &= s^2 \Rightarrow (\omega - \omega_0)\overline{(\omega - \omega_0)} = s^2 \\ &\Rightarrow |\omega - \omega_0| = s \end{aligned}$$

donc c'est une équation d'un cercle.

On en déduit que la transformation Möbius qui envoie  $z$  à  $1/z$  pour tous les nombres complexes non nuls transforme les droites et les cercles en droites ou cercles.  $\square$

**Théorème 3.3.3.** *Toute transformation de Möbius envoie les droites et les cercles de  $\mathbb{C}_\infty$  sur des droites et des cercles de  $\mathbb{C}_\infty$ . De plus elle est conforme.*

*Démonstration.* Soit  $\mu$  une transformation de Möbius donnée par

$$\mu(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

pour tout  $z$  tel que  $cz + d \neq 0$ . Alors on distingue deux cas :

1<sup>er</sup> cas : Si  $c = 0$  on a

$$\mu(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

alors on pose

$$f_1(z) = \frac{a}{d}z \quad \text{et} \quad f_2(z) = z + \frac{b}{d}$$

on a

$$\mu = f_2 \circ f_1$$

et comme  $f_1$  et  $f_2$  sont deux applications conformes et elles conservent les cercles et les droites (homothétie et translation), d'où le résultat.

2<sup>ème</sup> cas : Si  $c \neq 0$  on a

$$\begin{aligned}\mu(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2z + cd} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{1}{\left(\frac{c^2}{bc - ad}\right)z + \frac{dc}{bc - ad}}\end{aligned}$$

alors on pose

$$f_1(z) = \left(\frac{c^2}{bc - ad}\right)z, \quad f_2(z) = z + \frac{dc}{bc - ad}, \quad f_3(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{et} \quad f_4(z) = z + \frac{a}{c}$$

on a

$$\mu = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

et comme  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  sont des applications conformes et elles conservent les cercles et les droites, alors on obtient le résultat.

Donc d'après les deux cas le résultat en découle.  $\square$

Concluons ce paragraphe par une jolie application de la notion de birapport.

**Proposition 3.3.2.** *Quatre point distincts  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$  sont sur un cercle dans  $\mathbb{C}_\infty$  si et seulement si leur birapport est réel.*

*Démonstration.* Il est clair que l'application

$$\mu(z) = \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z - z_4)(z_2 - z_3)} = [z, z_2; z_3, z_4]$$

est une transformations de Möbius qui satisfait

$$\mu(z_1) = [z_1, z_2; z_3, z_4], \quad \mu(z_2) = 1, \quad \mu(z_3) = 0, \quad \text{et} \quad \mu(z_4) = \infty$$

alors, comme  $\mu$  préserve les cercles dans  $\mathbb{C}_\infty$ ,  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4 \in \mathbb{C}_\infty$  sont sur un cercle si et seulement si  $\mu(z_1), \mu(z_2), \mu(z_3)$  et  $\mu(z_4)$  sont sur un cercle, i.e. si  $[z_1, z_2; z_3, z_4], 1, 0$  et  $\infty$  son sur un cercle de  $\mathbb{C}_\infty$ . Or les cercles passant par  $\infty$  sont les droites dans  $\mathbb{C}$ , c'est le cas si et seulement si  $[z_1, z_2; z_3, z_4]$  est sur la droite passant par 0 et 1, c'est exactement l'axe réel dans  $\mathbb{C}$  auquel on a ajouté le point  $\infty$ .

d'où le résultat.  $\square$

**Exemple 3.3.1.** *Les nombres complexes  $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$  et  $z_4 = -i$  sont sur le cercle unité du plan complexe, et on a*

$$\begin{aligned}[z_1, z_2; z_3, z_4] &= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \\ &= \frac{(1 + 1)(i + i)}{(1 + i)(i + 1)} \\ &= \frac{4i}{(1 + i)^2} \\ &= 2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

# Bibliographie

- [1] Jean-Marc Decauwert, *Géométrie affine*, 2011.  
<https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ga/ga.pdf>
- [2] Olivier Collin, *MAT2400 Géométries*.  
<http://bergeron.math.uqam.ca/wp-content/uploads/2016/08/MAT2400.pdf>
- [3] David Cimasoni, *Cours de Géométrie I*, 2014.  
<http://www.unige.ch/math/folks/cimasoni/GeometrieI.pdf>
- [4] David R. Wilkins, *Möbius transformations and Steriographic Projection*.  
<https://www.maths.tcd.ie/dwilkins/Courses/MA232A/MA232AMich2017/StWrapper.pdf>
- [5] VOGEL Pierre. *Fonctions analytiques : cours et exercices avec solutions* ;[licence ; cours]. Dunod, 1999.
- [6] Abouqateb Abdelhak, *Cours des Courbes et Surfaces*, LST MIASI 2019.
- [7] Vincent Borrelli, *Courbures*.  
<http://math.univ-lyon1.fr/borrelli/Oran/Cours3.pdf>
- [8] James.Hammer, *Möbius transformations*, 2008.  
<https://pdfs.semanticscholar.org/073d/c7d4e07f006caf4bcc48ef49bacc680b43c5.pdf>