Algèbres de Lie Symplectiques

Seminar Inter-Universities of Geometry (SIG)

Table des matières

1 Généralités sur les Algèbres de Lie Symplectiques

1.1 Espaces vectoriels symplectiques

Définition 1.

Un espace vectoriel symplectique (E, ω) est la donnée d'un espace vectoriel réel E de dimension finie et d'une forme bilinéaire, anti-symétrique et non-dégénérée ω sur E.

La 2-forme ω est non dégénérée si l'application linéaire associée :

$$\widetilde{\omega} : E \longrightarrow E^*, \qquad x \longmapsto \omega(x, .)$$

est un isomorphisme.
Soit $F \subseteq E$ un sous-espace. On appelle orthogonal symplectique (ou, lorsqu'il n'y a pas de confusion, orthogonal) de F, le sous-espace vectoriel de E :

$$F^{\perp} = \{x \in E / \omega(x, y) = 0 \quad \forall y \in F\}.$$

Soient (E, ω) un espace vectoriel symplectique, F, F_1 F_2 des sous-espaces vectoriels de E. On a les propriétés élémentaires suivantes :

1. $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$
2. $(F^{\perp})^{\perp} = F$
3. $F_1 \subset F_2$ si et seulement si $F_2^{\perp} \subset F_1^{\perp}$.

Définition 2.

Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique. Un sous-espace vectoriel F de E est dit :

- isotrope si $F \subset F^{\perp}$
- coisotrope si $F^{\perp} \subset F$
- Lagrangien si $F = F^{\perp}$
- symplectique si $F^{\perp} \cap F = \{0\}$.

Une caractérisation possible des sous-espaces isotropes est donnée par :

$$\text{F est isotrope} \Leftrightarrow \omega(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in F.$$

Remarque 1. *1. Une droite vectorielle est toujours isotrope. On peut montrer que si F est isotrope alors $2 \dim F \leq \dim E$.*

2. *Un sous-espace vectoriel F, est coisotrope si et seulement si ω induit une deux forme symplectique sur l'espace quotient $F/F^{\perp}$. On peut montrer que $2\dim F \geq \dim E$. En particulier tout sous-espace vectoriel de codimension 1 est coisotrope.*
3. *Un sous-espace vectoriel F est lagrangien si et seulement s'il est isotrope et de dimension la moitié de celle de E.*
4. *Un sous-espace vectoriel F, est symplectique si $\omega_{|_F}$ est une forme symplectique sur F.*

Définition 3.

Soient (E, ω) un espace vectoriel symplectique et F un sous-espace vectoriel isotrope. L'espace vectoriel symplectique $(F^{\perp}/F, \overline{\omega})$ est appelée réduction symplectique par rapport au sous-espace F.

Adjoint symplectique

Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E. On définit l'adjoint symplectique de u, noté u^*, comme l'endomorphisme $u^* : E \longrightarrow E$ vérifiant

$$\omega(u(x), y) = \omega(x, u^*(y)) \qquad \forall x, y \in E.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$u^* = \widetilde{\omega}^{-1} \circ u^t \circ \widetilde{\omega},$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "\widetilde{\omega}"'] & E \arrow[d, "\widetilde{\omega}"] \\ E^* \arrow[r, "u^t"'] & E^* \end{tikzcd}$$

avec u^t est donné par $u^t(\alpha) = \alpha(u(x))$, pour $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ et $x \in \mathfrak{g}$.

Proposition 4.

L'adjoint symplectique a les propriétés suivantes :

1. $u^{**} = u$.
2. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
3. L'application $u \longmapsto u^*$ est linéaire.
4. $\ker(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^{\perp}$.
5. $\det(u^*) = \det(u)$ et $\mathrm{tr}(u^*) = \mathrm{tr}(u)$.

Définition 5.

Un projecteur ($p^2 = p$) est dit un projecteur canonique si :

1. $p + p^* = Id$;
2. $p^* \circ p = 0$.

Il est immédiat que l'adjoint p^* d'un projecteur canonique p est encore un projecteur canonique et qu'il est supplémentaire de p :

$$E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p) = \mathrm{Im}(p^*) \oplus \ker(p^*),$$

$$\mathrm{Im}(p) = \ker(p^*), \quad \mathrm{Im}(p^*) = \ker(p).$$

Remarque 2. *Deux endomorphismes p et r d'un même espace vectoriel sont des projecteurs de même image si et seulement si $p \circ r = r$ et $r \circ p = p$.*

On a le résultat intéressant suivant (Souriau) :

Proposition 6.

Un sous-espace vectoriel L d'un espace symplectique E est lagrangien si et seulement s'il est l'image d'un projecteur canonique.

Démonstration. Soit $p : E \longrightarrow E$ un projecteur canonique. Alors :

$$\mathrm{Im}(p)^\perp = \ker(p^*) = \mathrm{Im}(p)$$

donc l'image est lagrangienne.
Inversement, soit L un sous-espace lagrangien de E, il existe $q : E \longrightarrow E$ un projecteur tel que $\mathrm{Im}(q) = L$, comme L est isotrope on a

$$\omega(q(x), q(y)) = 0 \qquad \forall x, y \in E$$

d'où $q^* \circ q = 0$. D'autre part, on a

$$\omega(x - q^*(x), q(y)) = 0 \qquad \forall x, y \in E$$

D'où, pour tout $x \in E$, $x - q^*(x) \in L^\perp = L = \mathrm{Im}(q)$.
Posons $p := q - \frac{1}{2} q \circ q^*$. On montre aisément que l'endomorphisme $p : E \longrightarrow E$ vérifie les conditions suivantes :

$$p \circ p = p, \quad p + p^* = Id, \quad \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q) = L, \quad p^* \circ p = 0.$$

□

Corollaire 7.

Un espace vectoriel symplectique est nécessairement de dimension paire.

Démonstration. Soit p un projecteur canonique de E. Alors

$$p + p^* = Id \Longrightarrow \dim(E) = 2\mathrm{tr}(p).$$

□

1.2 Algèbres de Lie symplectiques

Définition 8.

Une algèbre de Lie symplectique $(\mathfrak{g}, \omega)$ est la donnée d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et une 2-forme non dégénérée qui vérifie la condition de cocycle suivante :

$$\oint \omega([x,y],z) = \omega([x,y],z) + \omega([y,z],x) + \omega([z,x],y) = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}. \quad (^*)$$

Notons qu'il ne faut pas confondre une algèbre de Lie symplectique définie ci-dessus et l'algèbre de Lie symplectique $sp(n)$.

Définition 9.

Deux algèbres de Lie symplectiques $(\mathfrak{g}_1, \omega_1)$ et $(\mathfrak{g}_2, \omega_2)$ sont dites symplectoisomorphes s'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $\varphi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ tel que $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. C'est-à-dire $\omega_1(x,y) = \omega_2(\varphi(x), \varphi(y))$ pour tous x, $y \in \mathfrak{g}_1$.

L'algèbre de Frobenius

Un sous cas intéressant des algèbres de Lie symplectiques, est le cas où ω est un 2-cobord, l'algèbre symplectique est dite de Frobenius.

Définition 10.

Une algèbre de Frobenius $(\mathfrak{g}, \nu)$ est la donnée d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et d'une forme linéaire $\nu \in \mathfrak{g}^*$ tel que la 2-forme

$$\omega : (x, y) \longmapsto \nu([x, y])$$

est non-dégénérée.

Proposition 11.

Une algèbre de Lie nilpotente, ne peut pas être une algèbre de Frobenius. Plus généralement une algèbre de Lie de centre non nul ne peut pas être une algèbre de Lie Frobenius.

Démonstration. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, il existe $e_1 \in \mathfrak{g}$ tel que $[e_1, x] = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, complétant e_1 en une base $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ de $\mathfrak{g}$, notons par $\{e^1, ..., e^{2n}\}$ sa base duale.
Soit $\alpha = \sum_{i=1}^{2n} a_i e^i \in \mathfrak{g}^*$ avec $a_i \in \mathbb{R}$. Il est clair que $(d\alpha)^n = (\sum_{2 \leq i < j \leq 2n} a_{ij} e^i \wedge e^j)^n = 0$ donc $d\alpha$ est dégénérée. $\square$

Commentaire 1. *Dans la littérature il y a de nombreuses caractérisations des algèbres de Lie de Frobenius. Citons les équivalences suivantes :*

1. *$\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie Frobenius.*
2. *Il existe une orbite, relative à le représentation co-adjointe, ouverte.*
3. *L'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ est primitive.*
4. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est d'indice nul.*

Indice d'une algèbre de Lie

Soient $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ et Φ_α la forme bilinéaire antisymétrique (forme de Kirillov) définie par

$$\begin{array}{rccc} \Phi_\alpha : & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & \alpha([x, y]). \end{array}$$

On note le noyau de l'application Φ_α par

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \alpha([x, y]) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Définition 12.

On appelle indice de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ l'entier $\mathcal{X}(\mathfrak{g})$ défini par :

$$\mathcal{X}(\mathfrak{g}) = \min\{\dim \mathfrak{g}_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{g}^*\}.$$

Il est facile de voir que

Proposition 13.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Alors $\mathcal{X}(\mathfrak{g}) = 0$ si et seulement si $\mathfrak{g}$ admet une forme symplectique exacte.

Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$. On peut exprimer l'indice en utilisant la matrice $M_\mathfrak{g} = ([e_i, e_j])_{1\leq i<j\leq n}$ voir [8]. Nous avons la caractérisation algébrique suivante :

Proposition 14.

L'indice d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension n est l'entier

$$\mathcal{X}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} - rang(M_\mathfrak{g}).$$

Remarque 3. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie tel que $H^2(\mathfrak{g}) = 0$ et $\mathcal{X}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Alors $\mathfrak{g}$ ne supporte pas de structure symplectique. Par exemple, l'algèbre d'oscillateur de dimension quatre :*

$$[e_1, e_4] = -e_2,\ [e_2, e_4] = e_1,\ [e_1, e_2] = e_3.$$

ne supporte pas de structure symplectique car $H^2(\mathfrak{g}) = 0$ et $\det(M_\mathfrak{g}) = 0$.

Exemple 1. *Notons par $\mathrm{P}(n, m)$ le m-ième sous-algèbre parabolique maximal de $\mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$:*

$$\mathrm{P}(n, m) = \{X = (x_{ij}) \in \mathrm{sl}(n, \mathbb{R}) \mid x_{ij} = 0 \quad pour \quad i \geq m + 1 \ et\ j \leq m\}$$

Un théorème d'Elashvili [9] affirme, en particulier, que l'algèbre $P(n, m)$ est de Frobenius si et seulement si n et m sont premiers entre eux.
On a par exemple $\mathrm{P}(n, n-1) = \mathrm{aff}(n, \mathbb{R})$.

Structure symplectique sur l'algèbre affine $\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})$

Soit $\mathrm{aff}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{gl}(2,\mathbb{R})$ l'algèbre de Lie associée au groupe des transformations affines inversibles du plan noté $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^2)$. L'algèbre de Lie $\mathrm{aff}(2,\mathbb{R})$ s'identifie à

$$\mathrm{aff}(2,\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{gl}(2,\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^2\}.$$

En remarquant que $\mathrm{gl}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \{\mathbb{I}\}$, on peut considérer sur $\mathrm{aff}(2,\mathbb{R})$, la base $\mathcal{B} = \{(v_i)_{1\leq i\leq 6}\}$ donnée par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les crochets

$$\begin{array}{lll} [v_1,v_3] = -v_1 & [v_2,v_3] = -v_2 & [v_4,v_5] = 2v_5 \\ [v_1,v_4] = -v_1 & [v_2,v_4] = v_2 & [v_4,v_6] = -2v_6 \\ [v_1,v_6] = -v_2 & [v_2,v_5] = -v_1 & [v_5,v_6] = v_4 \end{array}$$

Soit $\mathrm{aff}(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$ l'algèbre de Lie affine de $\mathbb{R}^n$ avec :

$$[(x,A),(y,B)] = (Ax - By, [A,B]).$$

L'algèbre affine $\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})$ a les propriétés suivantes

1. L'algèbre de Lie $\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})$ a la décomposition de Levi-Malcev suivante

$$\mathrm{aff}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{sl}(n,\mathbb{R}) \rtimes \tau$$

   Le radical résoluble τ est le produit semi-direct : $\tau = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^n$, où $\mathbb{R}$ agit par homothéties sur $\mathbb{R}^n$.
2. $H^2(\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})) = 0$ et $\mathcal{X}(\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})) = 0$ (voir [13])
3. L'algèbre de Lie $\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})$ est une algèbre de Lie complète (son centre est trivial et toute dérivation est intérieur) (voir [5]).
4. L'algèbre de Lie $\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})$ admet une unique structure symplectique (voir [3] et [1]).

Pour tous $\nu \in \mathrm{aff}(2,\mathbb{R})^*$ il existe une application linéaire $\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $M \in End(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\nu(x,A) = \lambda(x) + \mathrm{tr}(MA).$$

Pour (x, A), $(y, B) \in \mathrm{aff}(n, \mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} \omega((x,A),(y,B)) &= \mathrm{d}\nu((x,A),(y,B)) \\ &= \nu([(x,A),(y,B)]) \\ &= \nu(Ax - By, [A,B]) \\ &= \lambda(Ay - Bx) + \mathrm{tr}(M.[A,B]). \end{aligned}$$

On a le résultat principal suivant ([3]).

Théorème 15.

Le 2-cobord $\mathrm{d}\nu$ est non dégénéré si $\{\lambda, \lambda \circ M, ..., \lambda \circ M^{n-1}\}$ forme une base de $(\mathbb{R}^n)^*$.

Donnons une autre approche qui consiste à fixer une base sur $\mathrm{aff}(n, \mathbb{R})$ et expliciter une forme symplectique sur $\mathrm{aff}(n, \mathbb{R})$.
Sur $\mathrm{aff}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \oplus gl(\mathbb{R}^n)$ on peut considérer la base $\mathcal{B}_0 = \{e_i, E_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$, avec

- $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$
- $\{E_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathrm{gl}(\mathbb{R}^n)$, ici $E_{i,j}$ est la matrice telle que le (i, j)-composante vaut 1 et les autres composants sont tous nuls.

On obtient

$$[E_{i,j}, e_j] = e_i, \ [E_{i,j}, E_{j,i}] = E_{i,i} - E_{j,j}, \quad [E_{i,j}, E_{j,k}] = E_{i,k} \quad i \neq k,$$

Soit $\mathcal{B}_0^* = \{e_i^*, E_{ij}^*\}_{1 \leq i,j \leq n}$ la base duale de $\mathcal{B}_0$. Les équations de Maurer-Cartan sont données par :

$$\mathrm{d}e_j^* = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge E_{j,i}^* \quad \mathrm{d}E_{j,j}^* = \sum_{i=1}^{n} E_{i,j}^* \wedge E_{j,i}^* \quad \mathrm{d}E_{j,k}^* = \sum_{i=1}^{n} E_{i,k}^* \wedge E_{j,i}^* \quad j \neq k.$$

Proposition 16.

Soit $\alpha = e_n^* + \sum_{p=1}^{n-1} E_{p,p+1}^*$ une 1-forme sur $\mathrm{aff}(n, \mathbb{R})$. Alors la 2-forme

$$\mathrm{d}\alpha \;=\; \sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge E_{n,i}^* + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} E_{i,p+1}^* \wedge E_{p,i}^*$$

est une forme symplectique sur $\mathrm{aff}(n, \mathbb{R})$.

1.3 Propriétés des algèbres de Lie symplectiques

Même si le problème d'existence d'une structure symplectique sur une algèbre de Lie donnée reste un problème ouvert. Néanmoins, il existe des propriétés et des obstructions à l'existence d'une structure symplectique sur une algèbre de Lie donnée.
Commençons par le résultat suivant :

Théorème 17.

Une algèbre de Lie une algèbre parfaite (i.e. si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$), en particulier semi-simple, ne supporte pas de structure symplectique.

Démonstration. Un résultat de Helmstetter montre qu'une algèbre de Lie qui vérifie $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, ne supporte pas un produit symétrique à gauche donc non symplectique. $\square$

Corollaire 18.

Soit $\mathfrak{g} = \mathrm{S} \oplus \mathrm{R}$ la somme directe d'une algèbre semi-simple S et d'une algèbre résoluble R. Si $\mathfrak{g}$ est symplectique alors $\mathrm{S} = \{0\}$.

Démonstration. Supposons que $(\mathfrak{g} = \mathrm{S} \oplus \mathrm{R}, \omega)$ est une algèbre de Lie symplectique, la condition de cocycle (*) entraîne que $\omega(\mathrm{S}, \mathrm{R}) = 0$, en effet si $s \in \mathrm{S}$ et $r \in \mathrm{R}$ il existe s_1 et $s_2 \in \mathrm{S}$ tel que $s = [s_1, s_2]$ d'où

$$\begin{aligned} \omega(s, r) &= \omega([s_1, s_2], r) \\ &= -\omega([s_2, r], s_1) - \omega([r, s_1], s_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_{2n}\}$ une base de $\mathfrak{g}$ tel que, $\{e_1, ..., e_p\}$ est une base de S et $\{e_{p+1}, ..., e_{2n}\}$ est une base de R, dans la base $\mathcal{B}$ on a :

$$\det(\omega(e_i, e_j)_{1 \leq i,j \leq 2n}) = \det(\omega(e_i, e_j)_{1 \leq i,j \leq p}) \cdot \det(\omega(e_i, e_j)_{p+1 \leq i,j \leq 2n})$$

or $(\omega(e_i, e_j)_{1 \leq i,j \leq p})$ qui est la restriction de la matrice $(\omega(e_i, e_j)_{1 \leq i,j \leq 2n})$ sur S ne peut être de rang maximal. $\square$

Remarque 4. *Le corollaire précédent reste juste si on remplace l'algèbre semi-simple S par une algèbre parfaite.*

Hano démontre dans [11] le

Théorème 19.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie symplectique. Si le groupe de cohomologie maximal n'est pas trivial, alors $\mathfrak{g}$ est résoluble.

Rappelons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est unimodulaire si $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Une algèbre de dimension n est unimodulaire si et seulement si $\dim H^n(\mathfrak{g}) = 1$.

Corollaire 20.

Une algèbre de Lie symplectique unimodulaire est nécessairement résoluble.

En général, une algèbres de Lie est soit semi-simple, soit résoluble ou encore un produit semi-direct d'une algèbre résoluble et d'une algèbre semi-simple non nulles. Le Théorème précédent implique particulièrement qu'une algèbre de Lie symplectique est soit résoluble soit elle admet une décomposition de Levi-Malcev non triviale.

Corollaire 21.

La somme semi-directe, d'une algèbre semi-simple non nulle et d'une algèbre nilpotente, ne peut pas être symplectique.

En dimension 4 on a le

Corollaire 22.

Une algèbre de Lie symplectique de dimension 4 est résoluble.

1.4 Algèbres de Lie symplectiques en basse dimension

1.4.1 Algèbres de Lie symplectiques de dimension 2

En dimension 2, à isomorphisme près, il y a deux algèbres de Lie. Ces deux algèbres de Lie supportent des structures symplectiques :

- Sur l'algèbre abélienne, toute 2-forme alternée est un 2-cocycle non-dégénéré, mais elle n'est pas un 2-cobord, si elle est non nulle.
- Sur l'algèbre affine de la droite $\mathrm{aff}(\mathbb{R}) = \{e_1, e_2 / [e_1, e_2] = e_2\}$, tout 2-cocycle non nul ω est un 2-cobord non-dégénéré et on a : $\omega(x, y) = -e^2([x, y])$, $\forall x, y \in A_1$.

1.4.2 Algèbres de Lie symplectiques de dimension 4

Une algèbre de Lie symplectique de dimension quatre est nécessairement résoluble. Dans [15], Ovando a donné une classification complète, à isomorphisme prés, des algèbres de Lie symplectiques de dimension 4.

Case	No vanishing brackets	ω
$\mathfrak{rh}_3$	$[e_1, e_2] = e_3$	$e^{14} + e^{23}$
$\mathfrak{rr}_{3,0}$	$[e_1, e_2] = e_2$	$e^{12} + e^{34}$
$\mathfrak{rr}_{3,-1}$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = -e_3$	$e^{14} + e^{23}$
$\mathfrak{rr}'_{3,0}$	$[e_1, e_2] = -e_3,\ [e_1, e_3] = e_2$	$e^{14} + e^{23}$
$\mathfrak{r}_2\tau_2$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_4$	$e^{12} + \mu e^{13} + e^{34}$
$\mathfrak{r}'_2$	$[e_1, e_3] = e_3,\ [e_1, e_4] = e_4,$ $[e_2, e_3] = e_4,\ [e_2, e_4] = -e_3$	$e^{14} + e^{23}$
$\mathfrak{n}_4$	$[e_4, e_1] = e_2,\ [e_4, e_2] = e_3$	$e^{12} + e^{34}$
$\mathfrak{r}_{4,0}$	$[e_4, e_1] = e_1,\ [e_4, e_3] = e_2$	$e^{14} \mp e^{23}$
$\mathfrak{r}_{4,-1}$	$[e_4, e_1] = e_1,\ [e_4, e_2] = -e_2,\ [e_4, e_3] = e_2 - e_3$	$e^{13} + e^{24}$
$\mathfrak{r}_{4,-1,\beta}$	$[e_4, e_1] = e_1,\ [e_4, e_2] = -e_2,\ [e_4, e_3] = \beta e_3$	$e^{12} + e^{34}$
$\mathfrak{r}_{4,\alpha,-\alpha}$	$[e_4, e_1] = e_1,\ [e_4, e_2] = \alpha e_2,\ [e_4, e_3] = -\alpha e_3$	$e^{14} + e^{23}$
$\mathfrak{r}'_{4,0,\delta}$	$[e_4, e_1] = e_1,\ [e_4, e_2] = -\delta e_3,\ [e_4, e_3] = \delta e_2$	$e^{14} \mp e^{23}$
$\mathfrak{d}_{4,1}$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_4, e_3] = e_3,$ $[e_4, e_1] = e_1$	$e^{12} - e^{34}$ $e^{12} - e^{34} + e^{24}$
$\mathfrak{d}_{4,2}$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_4, e_3] = e_3,$ $[e_4, e_1] = 2e_1,\ [e_4, e_2] = -e_2$	$e^{12} - e^{34}$ $e^{14} \mp e^{23}$
$\mathfrak{d}_{4,\lambda}$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_4, e_3] = e_3,$ $[e_4, e_1] = \lambda e_1,\ [e_4, e_2] = (1-\lambda)e_2$	$e^{12} - e^{34}$
$\mathfrak{d}'_{4,\delta}$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_4, e_1] = \frac{\delta}{2}e_1 - e_2,$ $[e_4, e_3] = \delta e_3,\ [e_4, e_2] = e_1 + \frac{\delta}{2}e_2$	$\mp(e^{12} - \delta e^{34})$
$\mathfrak{h}_4$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_4, e_3] = e_3,$ $[e_4, e_1] = \frac{1}{2}e_1,\ [e_4, e_2] = e_1 + \frac{1}{2}e_2$	$\mp(e^{12} - e^{34})$

TABLE 1: Algèbres de Lie symplectiques de dimension 4 ($\mu \geq 0,\ -1 \leq \beta < 1,\ -1 < \alpha < 0,\ \delta > 0$ and $\lambda \geq \frac{1}{2}$, $\lambda \neq 1, 2$).

1.4.3 Algèbres de Lie symplectiques de dimension 6

Le cas nilpotent : La classification des algèbres de Lie symplectiques nilpotentes en dimension six est donnée dans [12], voir aussi [10] pour une liste plus récente.

Le cas résoluble non nilpotent : Une classification d'une large sous famille des algèbres, de Lie résolubles non nilpotentes de dimension 6, a été faite par Stursberg

(voir [16]). Plus précisément il décrit les structures symplectiques sur les algèbres de Lie qui se décomposent en somme directe de deux idéaux et les algèbres de Lie indécomposables avec un nilradical de dimension quatre. Cette classification couvre tous les cas sauf les algèbres de Lie indécomposables avec un nilradical de dimension cinq.
Le cas non résoluble : Les algèbres de dimension six, ayant une décomposition non triviale de Levi-Malcev, sont classées par Turkowski [17], à isomorphisme prés, en quatre algèbre de Lie.

$$\mathrm{sl}(2,\mathbb{R}) \rtimes \tau_3, \quad \mathrm{sl}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{sl}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{H}^3 \quad et \quad \mathrm{so}(3,\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^3.$$

La première algèbre de Lie $sl(2,\mathbb{R}) \rtimes \tau_3$ est l'algèbre de Lie de transformation affine du plan qui admet une unique structure symplectique (voir). Les trois dernières algèbres de Lie ne supportent pas de structures symplectiques (par exemple elles vérifient $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$).

1.4.4 Algèbres de Lie symplectiques de dimension 8

Le cas résoluble : A notre connaissance aucun travail général n'a été effectué.
Le cas non résoluble : D'après la liste de Turkowski [17], il existe 22 algèbres de Lie avec une sous-algèbre de Levi non nulle.

Lemme 23.

Les algèbres de Lie suivantes

$$L^p_{8,1},\ L_{8,2},\ L^0_{8,4},\ L_{8,5},\ L_{8,6},\ L_{8,7},\ L^p_{8,8},\ ,\ L^p_{8,9},\ L_{8,10},\ L_{8,11},\ L_{8,12}$$

$$L_{8,13},\ L_{8,14},\ L_{8,15},\ L^{-1}_{8,17},\ L^p_{8,18},\ L^0_{8,18},\ L^p_{8,19},\ ,\ L^p_{8,20},\ L_{8,21},\ L_{8,22}$$

ne supportent pas de structures symplectiques (avec $p \neq 0$).

Démonstration. On distingue entre deux types d'algèbres de Lie :

1. Le premier type :

   $$L_{8,2},\ L^p_{8,4},\ L_{8,5},\ L^p_{8,6},\ L^p_{8,7},\ L_{8,13},\ L_{8,14},\ L_{8,15},\ L_{8,17},\ L_{8,18},\ L_{8,19},\ L_{8,22},\ L_{8,21},$$

   qui ont le groupe de cohomologie maximal, non trivial ($H^8(\mathfrak{g}) \neq 0$). En utilisant le Théorème 15 précèdent ce type d'algèbres de Lie ne peuvent être symplectiques.

2. Le deuxième type :

   $$L^p_{8,1},\ L^p_{8,8},\ L^0_{8,9},\ L_{8,10},\ L_{8,11},\ L_{8,12},\ L^1_{8,18},\ L_{8,20},$$

qui ont le deuxième groupe de cohomologie trivial ($H^2(\mathfrak{g}) = 0$), si ce type d'algèbres de Lie supportent des structures symplectiques elle seront exactes. Le problème de non existence de la structure symplectique se résume donc au calcul de l'indice.
En effet pour $L^p_{8,1}$

$$M_{L^p_{8,1}} = \begin{pmatrix} 0 & e_3 & -e_2 & 0 & e_6 & -e_5 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & e_1 & -e_6 & 0 & e_4 & 0 & 0 \\ e_2 & -e_1 & 0 & e_5 & -e_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_6 & -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ -e_6 & 0 & e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 \\ e_5 & -e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & pe_7 \\ 0 & 0 & 0 & -e_4 & -e_5 & -e_6 & -pe_7 & 0 \end{pmatrix}.$$

on a $H^2(L^p_{8,1}) = 0$ et $\det(M_{L^p_{8,1}}) = 0$ donc l'indice de l'algèbre de Lie est non nul $L^p_{8,1}$ (plus précisément le rang de $M_{L^p_{8,1}}$ est 6 et $\mathcal{X}(L^p_{8,1}) = 2$).

$\square$

Proposition 24.

En dimension 8, une algèbre de Lie symplectique est isomorphe à l'une des algèbres de Lie suivantes

$$L_{8,3},\ L^{p\neq 0}_{8,4},\ L^{p\neq q}_{8,7},\ L^0_{8,8},\ L^0_{8,9},\ L_{8,16},\ L^{p=0}_{8,17},,\ L^{p\in]-1,1]/\{0\}}_{8,17},\ L_{8,18},\ L_{8,20}.$$

En plus les algèbres de Lie

$$L^0_{8,8},\ L^0_{8,9},\ L^0_{8,17}$$

ne supportent que des structures symplectiques non exactes.

Démonstration. Pour les algèbres

$$L_{8,3}, \quad L^p_{8,4}(p \neq 0), \quad L_{8,16}, \quad L^p_{8,17}(p \neq -1 \ et \ 0),$$

D'une part le deuxième groupe de cohomologie est nul, donc toute structures symplectique est exacte et autre part leurs indice est nul.
Pour les algèbres

$$L^0_{8,8},\ L^0_{8,9},\ L^0_{8,17}$$

en développe au cas par cas et en trouve leurs structures symplectiques. En plus remarque que leur indice est non nul, ces structures symplectiques son donc non exactes. $\square$

Case	$\dim H^2(\mathfrak{g})$	$\dim H^8(\mathfrak{g})$	Symplectique
$L^p_{8,1}$	0	0	No
$L_{8,2}$	2	1	No
$L_{8,3}$	0	0	Yes
$L^p_{8,4}, p \neq 0$	0	0	Yes
$L^0_{8,4}$	1	1	No
$L_{8,5}$	0	1	No
$L_{8,6}$	1	1	No
$L^{p=-q}_{8,7},$	1	1	Yes
$L^p_{8,8}, p \neq 0$	0	0	No
$L^{p\neq -q}_{8,7}$	1	1	No
$L^p_{8,8}, p \neq 0$	0	0	No
$L^0_{8,8}$	2	0	Yes
$L^0_{8,9}$	1	0	Yes
$L^p_{8,9}, p \neq 0$	0	0	No
$L_{8,10}$	0	0	No
$L_{8,11}$	0	0	No
$L_{8,12}$	0	0	No
$L_{8,13}$	2	1	No
$L_{8,14}$	1	1	No
$L_{8,15}$	0	1	No
$L_{8,16}$	0	0	Yes
$L^0_{8,17}$	1	0	Yes
$L^{-1}_{8,17}$	1	1	No
$L^p_{8,17}, p \in]-1,1] \setminus \{0\}$	0	0	Yes
$L^p_{8,18}, p \neq 0$	0	0	No
$L^0_{8,18}$	1	1	No
$L_{8,19}$	0	1	No
$L_{8,20}$	0	0	No
$L_{8,21}$	0	1	No
$L_{8,22}$	1	1	No

1.5 Produit (S.G) associé à une structure symplectique

Rappelons qu'une algèbre symétrique à gauche est un espace vectoriel muni d'un produit bilineaire $x.y = L_x y = R_y x$, dit produit symétrique à gauche (S.G), qui satisfait l'identité

$$ass(x, y, z) = ass(y, x, z)$$

avec $ass(x, y, z) = (x.y).z - x.(y.z)$. Dans ce cas, le commutateur $[x, y] = x.y - y.x$ définit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}$.

Remarque 5. *Définir une structure (S.G) sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ correspond à donner une connexion affine plate et sans torsion invariante à gauche sur un groupe de Lie connexe G d'algèbre de Lie associée $\mathfrak{g}$.*

Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique, la non-dégénérescence de ω définit un produit par la formule

$$\omega(x.y, z) = -\omega(y, [x, z]) \qquad \forall x,\ y,\ z \in \mathfrak{g}. \tag{1.1}$$

Notons $L_x y = x.y$, alors :

$$L_x = -\widetilde{\omega}^{-1} \circ \mathrm{ad}_x^t \circ \widetilde{\omega},$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "-L_x"] \arrow[d, "\widetilde{\omega}"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\widetilde{\omega}"] \\
\mathfrak{g}^* \arrow[r, "ad_x^t"'] & \mathfrak{g}^*
\end{tikzcd}$$

Proposition 25.

Le produit définie par (1.1) est un produit symétrique à gauche compatible avec la structure d'algèbre de Lie (i.e. $[x, y] = x.y - y.x$).

Démonstration. On a d'une part

$$\begin{aligned}
\omega(x.y, z) - \omega(y.x, z) &= \omega(y, [z, x]) + \omega(x, [y, z]) \\
&= \omega([x, y], z).
\end{aligned}$$

Donc le produit (S.G) est compatible avec la structure d'algèbre de Lie.

D'autre par en n'a pour x, y, z et $t \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}\omega(ass(x,y,z) - ass(y,x,z),t) &= \omega((x.y).z - x.(y.z) - (y.x).z - y.(x.z),t)) \\ &= \omega([x,y].z,t) - \omega(x.(y.z) + y.(x.z),t) \\ &= -\omega(z,[[x,y],t]) - \omega(z,[[t,x],y]) - \omega(z,[[y,t],x])) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Proposition 26.

Une 2-forme non dégénérée sur une algèbre de Lie, qui provient d'une structure (S.G), est symplectique si elle vérifie

1. $\omega(x.y,z) + \omega(z.y,x) = 0$
2. $\omega(x.y,z) + \omega(y.z,x) + \omega(z.x,y) = 0$.

Démonstration. En effet si l'on retranche l'identité 1. de l'identité 2. on obtient

$$\omega([z,y],x) + \omega(z.x,y) = 0.$$

Donc l'identité 2. entraîne que ω est un 2-cocycle. □

Proposition 27.

Soit $(\mathfrak{g},\omega)$ une algèbre symplectique, le 2-cocycle ω est un 2-cobord ssi l'algèbre S.G possède un élément neutre à droite.

Démonstration. En effet si $\omega = \mathrm{d}\alpha$ est un 2-cobord, avec $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, la non-dégénérescence de ω implique l'existence d'un élément $e \in \mathfrak{g}$ tel que $\alpha = \omega(e,.)$. On a alors pour tous x, $y \in \mathfrak{g}$

$$\omega(x.e,y) = -\omega(e,[x,y]) = -\alpha([x,y]) = \omega(x,y).$$

Le résultat découle immédiatement de cette formule. □

Définition 28.

Une algèbre (S.G) est complet si la forme $x \longmapsto \mathrm{tr}(\mathrm{R}_x)$ est nul.

Proposition 29.

Le produit (S.G) associé a une algèbre de Lie symplectique $(\mathfrak{g},\omega)$ est complet si et seulement si $\mathfrak{g}$ est unimodulaire.

2 Décompositions des algèbres de Lie symplectiques

2.1 Idéaux isotropes

Définition 30.

Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique.

- Un idéal J est dit idéal isotrope si J est isotrope ($\mathrm{J} \subset \mathrm{J}^{\perp}$).
- Un idéal J est dit idéal isotrope normal si J est un idéal isotrope dont l'orthogonal $\mathrm{J}^{\perp}$ est un idéal.
- Un idéal J est dit idéal lagrangien si J est un isotrope maximal.

Lemme 31.

Soit J un idéal isotrope de $\mathfrak{g}$. alors

1. J est abélien.
2. $\mathrm{J}^{\perp}$ est un idéal à gauche (relativement au produit S.G).
3. L'orthogonal $\mathrm{J}^{\perp}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.
4. L'orthogonal $\mathrm{J}^{\perp}$ est un idéal si et seulement si $[\mathrm{J}^{\perp}, \mathrm{J}] = 0$. Dans ce cas $J^{\perp}$ est un idéal bilatère (relativement au produit S.G).

Démonstration. Le lemme est une conséquence immédiate du fait que ω est un 2-cocycle d'algèbre de Lie. en effet

1. Soit a, $b \in \mathrm{J}$ et $x \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned} \omega([a,b],x) &= -\omega(\underbrace{[b,x]}_{\in \mathrm{J}}, \underbrace{a}_{\in \mathrm{J}}) - \omega(\underbrace{[x,a]}_{\in \mathrm{J}}, \underbrace{b}_{\in \mathrm{J}}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Soit $a \in \mathrm{J}$, $b \in \mathrm{J}^{\perp}$ et $x \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned} \omega(x.b,a) &= -\omega(\underbrace{b}_{\in \mathrm{J}^{\perp}}, \underbrace{[x,a]}_{\in \mathrm{J}}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. Un idéal à gauche est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

4. Soit $b \in \mathrm{J}^{\perp}$, $a \in \mathrm{J}$ et $x \in \mathfrak{g}$. Le résultat découle de la formule suivante

$$\begin{aligned}\omega([b,x],a) &= -\omega([x,a],b) - \omega([a,b],x) \\ &= -\omega([a,b],x).\end{aligned}$$

□

Le résultat suivant est fondamental pour décrire les algèbres de Lie symplectiques.

Proposition 32.

Une algèbre de Lie symplectique contient un idéal abélien non trivial I qui est symplectique ou isotrope. Dans les deux cas $I^{\perp}$ est un idéal à gauche de $\mathfrak{g}$ (relativement au produit symétrique à gauche).

Démonstration. L'algèbre de Lie est symplectique donc admet une décomposition de Levi $\mathfrak{g} = \mathrm{S} \rtimes \mathrm{R}$ avec $\mathrm{R} \neq 0$.
Considérons le dernier terme non nul de la suite dérivée du radical résoluble R de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il s'agit d'un idéal abélien A de $\mathfrak{g}$. La condition de 2-cocycle (*) entraîne que $A \cap A^{\perp}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.
En effet, soient $x \in A \cap A^{\perp}$ et $y \in \mathfrak{g}$ alors $[x,y] \in A$ et pour tout $z \in A$ on a

$$\begin{aligned}\omega([x,y],z) &= -\omega([y,z],x) - \omega([z,x],y) \\ &= 0,\end{aligned}$$

car $[z,x] = 0$ et $[y,z] \in A$. Deux cas se présentent :

1. $A \cap A^{\perp} = \{0\}$, alors $I = A$ qui est symplectique.
2. $A \cap A^{\perp} \neq \{0\}$, alors $I = A \cap A^{\perp}$ qui est isotrope ($A \cap A^{\perp} \subset (A \cap A^{\perp})^{\perp} = A^{\perp} + A$).

□

Proposition 33.

Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique. Si $\mathfrak{g}$ contient un idéal abélien symplectique I. Alors, $\mathfrak{g}$ est un produit semi-direct

$$\mathfrak{g} = I^{\perp} \ltimes I$$

L'action de $I^{\perp}$ sur I se fait par des endomorphismes antisymétriques.

Démonstration. On a $I^{\perp}$ est une sous-algebre de Lie de $\mathfrak{g}$.
Soit $a \in I$, $b \in I^{\perp}$ et $x \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned} \omega(\mathrm{ad}_b a, x) &= -\underbrace{\omega([a,x],b)}_{=0} - \omega([x,b],a) \\ &= -\omega(a, ad_b x). \end{aligned}$$

D'où $I^{\perp}$ agit sur I par des endomorphismes antisymetriques. □

Exemple 2. *Soit* $(\mathfrak{g}, \omega)$ *une algèbre de Lie symplectique de centre non dégénéré* $Z(\mathfrak{g})$*. Alors*

$$\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})^{\perp} \ltimes Z(\mathfrak{g})$$

avec $(Z(\mathfrak{g}), \omega_{|Z(\mathfrak{g})})$ *est une algèbre de Lie symplectique abélienne et* $(Z(\mathfrak{g})^{\perp}, \omega_{|Z^{\perp}(\mathfrak{g})})$ *est une algèbre de Lie symplectique à centre trivial (* $Z(\mathfrak{g})^{\perp}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$*).*
Par conséquent : La classification des algèbres de Lie symplectiques à centre non dégénéré se réduit à la classification des algèbres de Lie symplectiques à centre trivial.

2.2 Algèbres de Lie symplectiquement irréductibles

Le problème de classification des algèbres de Lie symplectiques irréductibles se pose comme une question importante. Dans [7] Dardié et Medina donnent une description des algèbres de Lie qui supporte une structure symplectique irréductible. La cratérisation de sec algèbres a été donnée par Baues et Cortés dans [2]. La plus petite dimension pour une algèbre de Lie symplectique irréductible est 6.

Définition 34.

Une algèbre symplectique $(\mathfrak{g}, \omega)$ est dite symplectiquement irréductible, si elle n'a pas d'idéal isotrope non trivial.

Commençons par le résultat de Dardié et Medina [7] :

Théorème 35.

Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique irréductible. Alors $\mathfrak{g}$ est un produit semi-direct de son idéal dérivé $\mathfrak{a} = D(\mathfrak{g})$ (qui est abélien) par $D(\mathfrak{g})^{\perp}$ qui est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$. L'action étant fidèle et se fait par des endomorphismes antisymétriques. De plus $\mathfrak{a}$ est la somme directe orthogonale d'idéaux de dimension 2.

Lemme 36.

Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique irréductible. Alors $\mathfrak{g}$ est un produit semi-direct d'un idéal minimal J_1 par $\mathrm{J}_1^{\perp}$ et l'action de $\mathrm{J}_1^{\perp}$ sur J_1 étant irréductible

Démonstration. Soit J_1 un idéal minimal de $\mathfrak{g}$. D'après l'hypothèse J_1 est symplectique (car $\mathrm{J}_1 \cap \mathrm{J}_1^{\perp}$ est un idéal). Comme J_1 est minimal ou bien $\mathrm{J}_1 \subset D(\mathfrak{g})$ ou bien $\mathrm{J}_1 \cap D(\mathfrak{g}) = \{0\}$. La seconde possibilité est à exclure car J_1 serait central dans $\mathfrak{g}$ (car pour $a \in \mathrm{J}_1$ et $x \in \mathfrak{g}$ on a $[a, x] \in \mathrm{J}_1 \cap D(\mathfrak{g}) = \{0\}$) et donc de dimension 1 ce qui est absurde. Ainsi $\mathfrak{g}$ est produit semi-direct de J_1 par $\mathrm{J}_1^{\perp}$ l'action de $\mathrm{J}_1^{\perp}$ sur J_1 étant irréductible (puisque J_1 est minimal).

□

Plus précisément on a le résultat suivant (Baues et Cortés dans [2]).

Théorème 37.

Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie réelle symplectique. Alors $(\mathfrak{g}, \omega)$ est irréductible si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. L'idéal dérivé $D(\mathfrak{g})$ est un idéal abélien maximal non dégénéré.
2. L'algèbre de Lie symplectique $(\mathfrak{g}, \omega)$ est une somme semi-directe orthogonale d'une sous-algèbre symplectique abélienne $(\mathfrak{h}, \omega_{|\mathfrak{h}})$ et de l'idéal $(D(\mathfrak{g}), \omega_{|D(\mathfrak{g})})$.
3. L'idéal abélien $D(\mathfrak{g})$ se décompose en somme directe orthogonale deux à deux non isomorphes en m sous-modules irréductibles purement imaginaires de dimension 2 de $\mathfrak{h}$, .

Soit $\dim \mathfrak{h} = 2k$ et $\mathfrak{a} = D(\mathfrak{g})$, soit $\mathfrak{a} = \oplus_{i=1}^{m} \mathfrak{a}_i$ une décomposition de $\mathfrak{a}$ en sous-espaces $\mathfrak{h}$-invariants. Puisque les sous-espaces irréductibles $\mathfrak{a}_i$ sont de dimension deux, il existe une structure complexe J sur l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{h}$ agit de manière complexe et linéairement sur $\mathfrak{a}$. Les sous-espaces irréductibles $\mathfrak{a}_i$ sont des sous-espaces complexes de $\mathfrak{a}$ et la restriction de J à $\mathfrak{a}_i$ est unique à signe prés.
Puisque $\mathfrak{h}$ agit par des transformations purement imaginaires sur $\mathfrak{a}_i$ il existe des applications linéaires non nulles $\lambda_i : \ h \longrightarrow \mathbb{R}$, pour $i = 1, ..., m$, tel que, pour tout $v = \sum_{i=1}^{m} v_i$, $v_i \in \mathfrak{a}_i$ et, pour tout $x \in \mathfrak{h}$, on a

$$[x, v] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) J v_i$$

Corollaire 38.

Soit $(\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \rtimes \mathfrak{h}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique irréductible. Alors il existe une base $\mathcal{B} = \{f_1, ..., f_{2h}, e_1^1, e_2^1, ..., e_1^m, e_2^m\}$ telle que :

$$\mathfrak{h} = \langle f_1, ..., f_{2h}\rangle \text{ et } \mathfrak{a} = \langle e_1^1, e_2^1\rangle \oplus ... \oplus \langle e_1^m, e_2^m\rangle, \quad m \geq 2h$$

dont le crochet dans la base $\mathcal{B}$ est donné par

$$[f_i, e_1^k] = -\lambda_k(f_i)e_2^k \quad \text{et} \quad [f_i, e_2^k] = \lambda_k(f_i)e_1^k \qquad \lambda_k \in \mathfrak{h}^*.$$

avec $\{\lambda_k\}_k$ engendre $\mathfrak{h}^*$.
Les structures symplectiques sur $\mathfrak{g}$ sont données par

$$\omega = \omega_{\mathfrak{h}} + \sum_{k=1}^{m} a_k e_1^{*k} \wedge e_2^{*k}, \qquad a, a_1, ..., a_m \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Il est facile de montrer que c'est seulement au-delà de la dimension six que l'on trouve des exemples d'algèbres de Lie symplectiques irréductible. En fait, en dimension 6 et à isomorphisme près, il n'y a qu'une seule algèbre de Lie qui vérifie les conditions du Corollaire 38.

Proposition 39.

Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique irréductible de dimension six. Alors

- $\mathfrak{g}$ est somme semi-directe de l'algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{h} = \langle e_5, e_6\rangle$ et de l'idéal abélien $a = \langle e_1, ..., e_4\rangle$ avec :

$$[e_5, e_2] = e_1, \quad [e_5, e_1] = -e_2, \quad [e_6, e_4] = e_3, \quad [e_6, e_3] = -e_4.$$

- La forme symplectique ω est symplectomorphisme a

$$\omega_a = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 + ae^5 \wedge e^6 \qquad a \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

En plus si $a \neq b$ alors $\omega_a \nsim \omega_b$.

Démonstration. En dimension six, les algèbres de Lie, qui supportent une structure symplectique irréductible, sont de la forme

$$\mathfrak{g}_{(a,b,c,d)} = \langle e_5, e_6\rangle \oplus \langle e_1, e_2\rangle \oplus \langle e_3, e_4\rangle$$

avec

$$[e_5, e_1] = -ae_2,\ [e_5, e_2] = ae_1,\ [e_6, e_1] = -be_2,\ [e_6, e_2] = be_1$$
$$[e_5, e_3] = -ce_4,\ [e_5, e_4] = ce_3,\ [e_6, e_3] = -de_4,\ [e_6, e_4] = de_3$$

Soit $\delta = ad - bc \neq 0$. L'isomorphisme d'algèbre de Lie

$$f(e_1) = e_1,\ f(e_2) = e_2,\ f(e_3) = -e_3,\ f(e_4) = e_4$$

$$f(e_5) = \frac{d}{\delta}e_5 - \frac{c}{\delta}e_6,\ f(e_6) = \frac{b}{\delta}e_5 - \frac{a}{\delta}e_6$$

vérifie : $f(\mathfrak{g}_{(a,b,c,d)}) = \mathfrak{g}_{(1,0,0,1)}$
Les équations de Maurer-Cartan sont données par :

$$\mathrm{d}e^1 = e^{25},\ \mathrm{d}e^2 = -e^{15},\ \mathrm{d}e^3 = e^{46},\ \mathrm{d}e^4 = -e^{36},$$

alors les 2-cocycles non dégénérés sont donnés par

$$\omega = a_{12}e^{12} + a_{15}e^{15} + a_{25}e^{25} + a_{34}e^{34} + a_{36}e^{36} + +a_{46}e^{46} + a_{56}e^{56}$$

avec $a_{56}a_{34}a_{12} \neq 0$
L'automorphisme T défini par

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= \frac{1}{\sqrt{a_{34}}}e_3\\
T(e_2) &= -\frac{1}{\sqrt{a_{34}}}e_4\\
T(e_3) &= \frac{1}{\sqrt{a_{12}}}e_1\\
T(e_4) &= -\frac{1}{\sqrt{a_{12}}}e_2\\
T(e_5) &= -\frac{a_{46}}{a_{34}}e_3 + \frac{a_{36}}{a_{34}}e_4 - e_6\\
T(e_6) &= -\frac{a_{25}}{a_{12}}e_1 + \frac{a_{15}}{a_{12}}e_2 - e_5
\end{aligned}$$

vérifie

$$^tT \circ \omega \circ T = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 + a_{56}e^5 \wedge e^6$$

Les algèbres de Lie symplectique $(\mathfrak{g}, \omega_a)$ sont deux à deux non sympléctomorphes car les valeurs propres de l'endomorphisme de Ricci associées à la connexion symplectique

$$\nabla_x y = \frac{1}{3}([x, y] + x.y)$$

sont données par $\{i\frac{2}{9}a, 0, -i\frac{2}{9}a\}$. □

2.3 La réduction symplectique

Soit $(\mathfrak{g},\omega)$ une algèbre de Lie symplectique et $\mathrm{J}\subset\mathfrak{g}$ un idéal isotrope. L'orthogonal $\mathrm{J}^{\perp}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ qui contient J, la forme symplectique ω passe au quotient et définit une structure symplectique sur l'algèbre de Lie quotient $\overline{\mathfrak{g}}=\mathrm{J}^{\perp}/\mathrm{J}$ notée $\overline{\omega}$ donnée x, $y\in\mathrm{J}^{\perp}$ par

$$\overline{\omega}(\overline{x},\overline{y})=\omega(x,y)$$

En effet $\omega(x+j_1,y+j_2)=\omega(x,y)+\omega(x,j_2)+\omega(j_1,j_2)+\omega(j_1,y)=\omega(x,y)$

Définition 40.

L'algèbre de Lie symplectique $(\overline{\mathfrak{g}},\overline{\omega})$ est appelée la réduction symplectique de $(\mathfrak{g},\omega)$ par rapport à l'idéal isotrope J.
Si en plus J est un idéal isotrope normal, la réduction symplectique est dite normale.

Exemple 3. *Toute algèbre de Lie symplectique qui admet un idéal de dimension un se réduit symplectiquement, en particulier toute structure symplectique sur une algèbre de Lie complètement résoluble se réduit symplectiquement.*

Réduction de l'algèbre de Lie affine $\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})$

Soit $\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})=\mathbb{R}^n\rtimes gl(n,\mathbb{R})$ l'algèbre de Lie affine de $\mathbb{R}^n$ avec :

$$[(x,A),(y,B)]=(Ax-By,[A,B]).$$

L'algèbre de Lie $\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})$ à pour décomposition de Levi

$$\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})=\mathrm{sl}(n,\mathbb{R})\rtimes\mathcal{R}$$

dont le radical résoluble $\mathcal{R}$ est le produit semi-direct $\mathcal{R}=\mathbb{R}\rtimes\mathbb{R}^n$ où $\mathbb{R}$ agit par homothéties sur $\mathbb{R}^n$.
Une forme symplectique sur $\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})$ est donnée par

$$\omega((x,A),(y,B))=\lambda(Ay-Bx)+Tr(M.[A,B]),$$

où $\lambda:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ est une application linéaire et M est une matrice diagonale admettant des valeurs propres distinctes deux à deux.
L'idéal des translations

$$T=\{(x,0)\in\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})/x\in\mathbb{R}^n\}$$

est un idéal isotrope dans l'algèbre symplectique $(\mathrm{aff}(n,\mathbb{R}),\omega)$. Or

$$T^{\perp} = T \oplus \{A \in gl(n,\mathbb{R})/\mathrm{Im}(A) \subset \ker\lambda\}.$$

En effet

$$\omega((x,0),(y,A)) = -\lambda(A(x)).$$

Donc

$$T^{\perp}/T = \{A \in gl(n,\mathbb{R})/\mathrm{Im}(A) \subset \ker\lambda\}$$

qui est isomorphe à $\mathrm{aff}(n-1,\mathbb{R})$).

Proposition 41.

L'algèbre de Lie symplectique $\mathrm{aff}(n-1,\mathbb{R})$) est la réduction symplectique $\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})$ par rapport à l'idéal des translations.

Exemple 4. *Soi l'algèbre de Lie symplectique nilpotente (L,ω), avec*

$$[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_4]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_3]=-e_6$$

et

$$\omega = e^{13}+e^{26}-e^{45}$$

Considérons les idéaux isotropes suivants

$$\mathrm{J}_1 = \langle e_6\rangle,\ \mathrm{J}_2 = \langle e_3,e_6\rangle \textit{ et } \mathrm{J}_3 = \langle e_3,e_5,e_6\rangle$$

Notons $\overline{\mathfrak{g}}_i = \mathrm{J}_1^{\perp}/\mathrm{J}_1$ la réduction symplectique de $\mathfrak{g}$ par rapport à l'idéal isotrope J_i.

- $\mathrm{J}_1^{\perp} = \langle e_1,e_3,e_4,e_5,e_6\rangle$ *et* $\overline{\mathfrak{g}}_1 = \langle \overline{e}_1,\overline{e}_3,\overline{e}_4,\overline{e}_5\rangle$ *avec*

$$[\overline{e}_1,\overline{e}_4] = \overline{e}_5 \quad \textit{et} \quad \overline{\omega} = \overline{e}^{13}-\overline{e}^{45}.$$

  Remarquons que $(\overline{\mathfrak{g}}_1,\overline{\omega})$ se réduit à l'algèbre symplectique abélienne $\langle\overline{e}_4,\overline{e}_5\rangle$ par rapport a l'idéal $\langle e_3\rangle$.
- $\mathrm{J}_2^{\perp} = \langle e_3,e_4,e_5,e_6\rangle$ *et* $\overline{\mathfrak{g}}_2 = \langle\overline{e}_4,\overline{e}_5\rangle$ *avec* $\overline{\mathfrak{g}}_2$ *est abélienne et* $\overline{\omega} = \overline{e}^{45}$.
- $\mathrm{J}_3^{\perp} = \mathrm{J}_3 = \langle e_3,e_5,e_6\rangle$ *et* $\overline{\mathfrak{g}}_3 = \{0\}$.

Définition 42.

Nous disons qu'une algèbre symplectique $(\mathfrak{g},\omega)$ peut être réduite symplectiquement en l étapes à une algèbre de Lie symplectique $(\overline{\mathfrak{g}},\overline{\omega})$ s'il existe une suite de réductions symplectiques

$$(\mathfrak{g},\omega),(\mathfrak{g}_1,\omega_1),\dots,(\mathfrak{g}_l,\omega_l) = (\overline{\mathfrak{g}},\overline{\omega})$$

Le nombre l est appelé la longueur de la suite de réduction et l'algèbre symplectique $(\overline{\mathfrak{g}},\overline{\omega})$ est appelée sa base.

Nous considérons une classe importante d'algèbres symplectiques, qui admettent l'algèbre symplectique triviale comme base.

Définition 43.

Une algèbre symplectique $(\mathfrak{g}, \omega)$ est dite une algèbre complètement réductible si elle peut être symplectiquement réduite (en plusieurs étapes) à l'algèbre symplectique triviale.

- Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre symplectique complètement résoluble. Alors elle est complètement réductible
- Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre symplectique nilpotente. Il existe alors une série finie de réductions centrales à l'algèbre symplectique triviale. (En particulier, une algèbre symplectique nilpotente est symplectiquement irréductible si et seulement si elle est triviale.)
- Toute algèbre symplectique de dimension quatre est complètement réductible.

2.4 Réduction normale

Rappelons qu'une réduction symplectique par rapport à un idéal isotrope J est dite normale, si l'orthogonal $\mathrm{J}^{\perp}$ est un idéal.
Nous distinguons plusieurs cas particuliers importants de la réduction normale :

- La réduction normale est dite réduction lagrangienne, si l'idéal J est lagrangien. Dans ce cas, $\mathrm{J}^{\perp} = \mathrm{J}$ et $\overline{\mathfrak{g}} = \{0\}$.
- La réduction normale est dite réduction centrale, si J est central. Dans ce cas, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathrm{J}^{\perp}$.
- La réduction normale est dite réduction de codimension un, si $\dim(\mathrm{J}) = 1$.

Nous allons maintenant analyser le processus de réduction normale. Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique qui se réduit normalement par rapport à l'idéal isotrope J. Considérons les deux extensions qui s'imposent naturellement dans le processus de réduction :

$$0 \longrightarrow \mathrm{J}^{\perp} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h} \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{J} \longrightarrow J^{\perp} \longrightarrow \overline{\mathfrak{g}} \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

avec $(\overline{\mathfrak{g}} = J^{\perp}/J, \overline{\omega})$ est la réduction symplectique normale et $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/J^{\perp}$, puisque $\mathrm{J}^{\perp}$ est un idéal. Nous allons montrer que la réduction normale induite sur les algèbres quotients $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ des structures supplémentaires. Plus précisément

0. $J^{\perp}$ est un idéal bilatéral relativement au produit S.G induit par ω.
1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/J^{\perp}$ supporte une connexion plate induite sans torsion telle que l'application de projection $(\mathfrak{g}, \nabla) \longrightarrow (\mathfrak{h}, \overline{\nabla})$ est une application affine d'algèbres de Lie plates.

2. L'algèbre de Lie symplectique $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ est munie d'une sous-algèbre $\widehat{q} \subset Der(\overline{\mathfrak{g}})$ des dérivations de $\overline{\mathfrak{g}}$, qui satisfait une condition de compatibilité par rapport à $\overline{\omega}$.

2.4.1 La connexion induite sur $\mathfrak{h}$

Nous allons montrer que la réduction normale induit une connexion plate sans torsion sur algèbre quotient $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/J^{\perp}$. Notons par :

$$\begin{array}{rccl} \omega_{\mathfrak{h}} : & \mathfrak{h} \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\overline{u}, x) & \longmapsto & \omega_{\mathfrak{h}}(\overline{u}, x) = \omega(u, x). \end{array}$$

Proposition 44.

Soit J un idéal normal dans $(\mathfrak{g}, \omega)$. Alors on a

1. La représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ induit une représentation

$$ad_{|J} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{J}$$

2. L'homomorphisme $\omega_{\mathfrak{h}} \in Hom(\mathfrak{h}, J^*)$ donné par $\overline{u} \longmapsto \omega(u, .)$, est un isomorphisme. De plus, il définit un 1-cocycle relativement à la représentation $ad^*_{|\mathrm{J}}$, donnée par $ad^*_{|J}\overline{u}(\alpha) = \alpha(ad_{|J}\overline{u})$ avec $\overline{u} \in \mathfrak{h}$ et $\alpha \in J^*$.
3. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/J^{\perp}$ supporte une connexion plate sans torsion notée $\overline{\nabla}$, donnée par :

$$\omega_h(\overline{\nabla}_{\overline{u}}\overline{v}, x) = -\omega(v, [u, x]), \quad \forall \overline{u}, \overline{v} \in \mathfrak{h} \; et \; x \in J. \tag{2.3}$$

Démonstration. Pour $a \in \mathrm{J}$ la représentation adjointe $\mathrm{ad}_a : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{J}$, passe au quotient (car $[\mathrm{J}, \mathrm{J}^{\perp}] = 0$ donc $\mathrm{ad}_a(u + \mathrm{J}^{\perp}) = \mathrm{ad}_a u$) et induit une représentation $ad_{|J} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{J}$, don 1. est vérifiée.
D'une part $\omega_{\mathfrak{h}}$ est injective. En effet on a :

$$\begin{aligned} \ker(\omega_{\mathfrak{h}}) &= \{\overline{u} \in \mathfrak{h} \,|\, \omega_{\mathfrak{h}}(\overline{u}, a) = 0 \quad \forall a \in \mathrm{J}\} \\ &= \{\overline{u} \in \mathfrak{h} \,|\, \omega(u, a) = 0 \quad \forall a \in \mathrm{J}\} \\ &= \{\overline{u} \in \mathfrak{h} \,|\, u \in \mathrm{J}^{\perp}\} = \{0\}. \end{aligned}$$

Et autre part $\dim(\mathfrak{h}) = \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathrm{J}^{\perp}) = \dim(\mathrm{J}) = \dim(\mathrm{J}^*)$. Par conséquent, ω_h est un isomorphisme.
La condition de 1-cocycle de $\omega_{\mathfrak{h}}$ relativemement à la représentation coadjointe $\rho = \mathrm{ad}^*_{|\mathrm{J}}$ sur J^* s'écrit :

$$\omega_{\mathfrak{h}}([\overline{u}, \overline{v}]) = \rho(\overline{u})\omega_{\mathfrak{h}}(\overline{v}) - \rho(\overline{v})\omega_{\mathfrak{h}}(\overline{u})$$

Soit $a \in \mathrm{J}$, u et $v \in \mathfrak{g}$, rappelons que $ad^*_{|_J}\overline{u}(\alpha) = \alpha(ad_{|_J}\overline{u})$ avec $\alpha \in \mathrm{J}^*$. On a

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathfrak{h}}([\overline{u},\overline{v})])(a) &= \rho(\overline{u})\omega_{\mathfrak{h}}(\overline{v})(a) - \rho(\overline{v})\omega_{\mathfrak{h}}(\overline{u})(a)\\
&= \mathrm{ad}^*_a(\overline{u})\omega_{\mathfrak{h}}(\overline{v}) - \mathrm{ad}^*_a(\overline{v})\omega_{\mathfrak{h}}(\overline{u})\\
&= \omega_{\mathfrak{h}}(\overline{v})(\mathrm{ad}_a(\overline{u})) - \omega_{\mathfrak{h}}(\overline{u})(\mathrm{ad}_a(\overline{v}))\\
&= \omega_{\mathfrak{h}}(\overline{v}, \mathrm{ad}_a(\overline{u})) - \omega_{\mathfrak{h}}(\overline{u}, \mathrm{ad}_a(\overline{v}))\\
&= \omega(v,[a,u]) - \omega(u,[a,v])\\
\omega([u,v],a) &= -\omega([a,u],v) - \omega([v,a],u).
\end{aligned}$$

Cela montre 2.
Enfin, 3. est une conséquence de 1. et 2 □

Proposition 45.

Si J est central alors l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/\mathrm{J}^{\perp}$ est abélien et la connexion induite est triviale.

Démonstration. En effet, si J est central alors

$$\omega_h(\overline{\nabla}_{\overline{u}}\overline{v}, x) = -\omega(v,[u,x]), \quad \forall \overline{u}, \overline{v} \in \mathfrak{h} \textit{ et } x \in \mathrm{J}. \tag{2.4}$$

entraîne que $\overline{\nabla}_{\overline{u}}\overline{v} = 0$ et que $\mathfrak{h}$ est abélien. □

2.4.2 Algèbre de dérivation induite sur $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$

Soit J un idéal isotrope normal de $(\mathfrak{g}, \omega)$. En divisant l'idéal J la suite exacte donne une extension des algèbres de Lie.

3 Constructions des algèbres de Lie symplectiques

Commençons par un exemple de construction d'algèbres de Lie symplectiques sur une algèbre de Lie symplectique donnée.

Proposition 46.

Soient $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique et $\theta \in Z^2(\mathfrak{g})$ un 2-cocycle. Alors $\omega_t = \omega + t\theta$ est une structure symplectique sur $\mathfrak{g}$ sauf pour un nombre fini de valeurs de $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Il est clair que ω_t est une 2-forme fermée, il suffit de montrer qu'elle est non dégénérée. Soit $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et soit $\{e^1, ..., e^{2n}\}$ sa base duale. Puisque ω est non dégénérée, il existe $a_0 \neq 0$ tel que $\omega^n = a_0 e^1 \wedge ... \wedge e^{2n}$ et on a pour chaque $k \in \{1, ..., n\}$,

$$\omega^{n-k} \wedge \theta^k = a_k e^1 \wedge ... \wedge e^{2n}$$

avec $a_k \in \mathbb{R}$. Donc,

$$\begin{aligned}(\omega + t\theta)^n &= \sum_{k=1}^{n} t^k C_n^k \omega^{n-k} \wedge \theta^k \\ &= (a_0 + \sum_{k=1}^{n} t^k C_n^k a_k) e^1 \wedge ... \wedge e^{2n} \\ &= P(t) e^1 \wedge ... \wedge e^{2n}.\end{aligned}$$

Puisque P a, au plus, n racines, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $P(t) \neq 0$. Par conséquent, pour certaines valeurs de t, on a $(\omega + t\theta)^n \neq 0$. □

Exemple 5. *On considère l'algèbre de Lie symplectique* $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$ *avec*

$$[e_1, e_2] = e_2, \ [e_3, e_4] = e_4, \ \omega = e^{12} + e^{34}$$

la construction précédente affirme que les structures

$$\omega_\mu = e^{12} + e^{34} + \mu e^{13}, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

sont symplectiques (on trouve $P(\mu) = 2$). En plus on peut montrer qu'ils sont deux à deux non symplectomorphes.

3.1 Produit semi-direct symplectique

Dans [13] Medina et Revoy fournissent une méthode de construction d'algèbres symplectiques assez générale. Soient (A_1, ω_1), (A_2, ω_2) deux algèbres symplectiques et $r : A_2 \longrightarrow \mathrm{Der}(A_1)$ une représentation de A_2 par des dérivations symplectiques de A_1, c'est-a-dire vérifiant la condition

$$\omega_1(r(x)y, z) + \omega_1(y, r(x)z) = 0, \qquad x \in A_2, \ y, z \in A_1.$$

Proposition 47.

La 2-forme $\omega = \omega_1 + \omega_2$ munit l'algèbre produit semi-direct $A = A_1 \ltimes_r A_2$ d'une structure symplectique.

Démonstration. En effet, soient $x \in A_2$, y_1 et $y_2 \in A_1$, on a $[x, y_i] = r(x)y_i$, $i = \{1, 2\}$ donc

$$\begin{aligned} \oint \omega([x, y_1], y_2) &= \omega([x, y_1], y_2) + \omega([y_1, y_2], x) + \omega([y_2, x], y_1] \\ &= \omega_1(r(x)y_1, y_2) + \omega_1(y_1, r(x)y_2), \end{aligned}$$

donc $r : A_2 \longrightarrow \mathrm{Der}(A_1)$ une représentation de A_2 par des dérivations symplectiques de A_1. Les autres conditions de cocycle sont vérifiées immédiatement. $\square$

Définition 48.

L'algèbre de Lie symplectique $(A_1 \ltimes_r A_2, \omega_1 + \omega_2)$ est dite Produit semi-direct symplectique des algèbres de Lie symplectiques (A_1, ω_1) et (A_2, ω_2) relativement à r.

Remarque 6. *Il est clair que A_1 est un idéal orthogonal à A_2.*

Exemple 6. *Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique tel que $D(\mathfrak{g})^{\perp} \not\subset D(\mathfrak{g})$. Soit A un supplémentaire de $D(\mathfrak{g}) \cap D(\mathfrak{g})^{\perp}$ dans $D(\mathfrak{g})^{\perp}$.*

$$D(\mathfrak{g})^{\perp} = A \oplus D(\mathfrak{g}) \cap D(\mathfrak{g})^{\perp}$$

Alors $\omega_{A\times A}$ est non-dégénérée. En effet soit $a \in A \subset D(\mathfrak{g})^{\perp}$ donc $\omega(a, x) = 0$ pour tout $x \in D(\mathfrak{g}) \cap D(\mathfrak{g})^{\perp} \subset D(\mathfrak{g})$ si $\omega(a, y) = 0$ pour tout $y \in A$ alors $\omega(a, x) = 0$ pour tout $x \in D(\mathfrak{g})^{\perp}$ d'ou $a \in D(\mathfrak{g})$ donc $a = 0$. On obtient donc

$$\mathfrak{g} = A \oplus A^{\perp}.$$

En plus $A^{\perp}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ car il contient $D(\mathfrak{g})$ et A est une sous-algèbre abélienne de A. En effet soit a_1, a_2 $a_3 \in A$ et $x \in A^{\perp}$ d'une part

$$\begin{aligned} \omega([a_1, a_2], x) &= -\omega([x, a_1], a_2) - \omega([a_2, x], a_1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et d'autre part $\omega([a_1, a_2], a_3) = 0$ car $[a_1, a_2] \in D(\mathfrak{g})$ et $A \subset D(\mathfrak{g})^{\perp}$.
Autrement dit, $(\mathfrak{g}, \omega)$ est un produit semi-derect symplectique.

3.2 Extension lagrangienne

Soit $(\mathfrak{h}, \nabla)$ une algèbre de Lie plate, (une algèbre de Lie munie d'une connexion ∇ de courbure et torsion nulles). Nous expliquons comment construire des algèbres de Lie symplectiques $(\mathfrak{g}, \omega)$, qui ont $\mathfrak{h}$ comme algèbre de quotient plate (résultant d'une

réduction lagrangienne). Ces algèbres de Lie seront appelées Extensions lagrangiennes de $(\mathfrak{h}, \nabla)$.
Puisque ∇ est une connexion plate, elle définit une représentation d'algèbre de Lie $x \longmapsto \nabla_x$. On note par ρ la représentation duale, donnée par

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathfrak{h}^*) \\ x & \longmapsto & \rho(x) : \xi \longmapsto -\xi \circ \nabla_x. \end{array}$$

A chaque cocycle $\alpha \in Z^2_\rho(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^*)$ est associé une extension d'algèbre de Lie

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^\nabla_\alpha \longrightarrow \mathfrak{h} \longrightarrow 0$$

avec $\mathfrak{g}^\nabla_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$ et les crochets de Lie non nuls sont définis par

$$\begin{array}{rcll} [x, y]_{\mathfrak{g}^\nabla_\alpha} & = & [x, y] + \alpha(x, y) & \quad x, y \in \mathfrak{h} \\ {[x, \xi]_{\mathfrak{g}^\nabla_\alpha}} & = & \rho(x)\xi & \quad x \in \mathfrak{h} \;\; et \;\; \xi \in \mathfrak{h}^*. \end{array}$$

Avec $[x, y] = \nabla_x y - \nabla_y x$ pour $x,\ y \in \mathfrak{h}$.
Soit ω la 2-forme canonique "non dégénérée" sur $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$, donnée par

$$\omega(x_1, x_2) = \omega(\xi_1, \xi_2) = 0, \quad \omega(\xi, x) = \xi(x),$$

pour tous x,x_1, $x_2 \in \mathfrak{h}$ et ξ,ξ_1, $\xi_2 \in \mathfrak{h}^*$.

Proposition 49.

La forme ω est symplectique pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^\nabla_\alpha$ si et seulement si

$$\alpha(x, y)(z) + \alpha(y, z)(x) + \alpha(z, x)(y) = 0,$$

pour tous $x,\ y,\ z \in \mathfrak{h}$.

Remarquons que $\mathfrak{h}^*$ est un idéal lagrangien.

Démonstration. Il suffit de vérifier que ω est un 2-cocycle. Pour $x,\ y,\ z \in \mathfrak{h}$ on a

$$\begin{array}{rcl} \oint \omega([x, y]_{\mathfrak{g}^\nabla_\alpha}, z) & = & \omega([x, y]_{\mathfrak{g}^\nabla_\alpha}, z) + \omega([y, z]_{\mathfrak{g}^\nabla_\alpha}, x) + \omega([z, x]_{\mathfrak{g}^\nabla_\alpha}, y) \\ & = & \alpha(x, y)(z) + \alpha(y, z)(x) + \alpha(z, x)(y). \end{array}$$

Pour x, $y \in \mathfrak{h}$ et $\xi \in \mathfrak{h}^*$ on obtient

$$\begin{aligned}\oint \omega([x,y]_{\mathfrak{g}_\alpha^\nabla},\xi) &= \omega([x,y]_{\mathfrak{g}_\alpha^\nabla},\xi)+\omega([y,\xi]_{\mathfrak{g}_\alpha^\nabla},x)+\omega([\xi,x]_{\mathfrak{g}_\alpha^\nabla},y)\\ &= \xi([x,y])-\xi(\nabla_x y)+\xi(\nabla_y x)\\ &= \xi([x,y]-\nabla_x y+\nabla_y x)\end{aligned}$$

ce dernier terme s'annule, puisque ∇ est sans torsion.
Pour le cas où $x \in \mathfrak{h}$, ξ_1 et $\xi_2 \in \mathfrak{h}^*$, $\oint \omega([\xi_1,x]_{\mathfrak{g}_\alpha^\nabla},\xi_2)=0$ en utilisant le fait que $\mathfrak{h}^*$ est un idéal abélien., □

Définition 50.

L'algèbre de Lie symplectique $(\mathfrak{g}_\alpha^\nabla,\omega)$ est dite l'extension lagrangienne de l'algèbre de Lie plate $(\mathfrak{h},\nabla)$ par rapport à α.

Remarque 7. *L'algèbre de Lie symplectique $(\mathfrak{g}_\alpha^\nabla,\omega)$ et aussi appelé (par Boyoume) algèbre de Lie cotangente tordue, si $\alpha=0$ on obtient l'algèbre de Lie cotangente.*

Exemple 7. *Soit $(\mathfrak{h},.)$ une algèbre S.G, $\alpha \in Z^2_\rho(\mathfrak{h},\mathfrak{h}^*)$ un 2-cocycle, (A,ω_A) une algèbre symplectique et $r : A \longrightarrow Der(\mathfrak{h})$ une représentation par des dérivations d'algèbre S.G tel que*

$$\alpha(r(a)x,y)+\alpha(x,r(a)y)=0 \ \text{ et } \ r(a)\circ\rho=\rho\circ r(a)$$

pour $a \in A$ et x, $y \in \mathfrak{h}$.
Notons par $\rho : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{h}^*)$ est la représentation dual du produit S.G et $r^* : A \longrightarrow End(\mathfrak{h}^*)$ est la représentation dual de r.
Soit la structure d'algèbre de Lie sur

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus A\oplus\mathfrak{h}^*$$

donnée par

$$\begin{array}{rcll}[x,y] &=& [x,y]_{\mathfrak{h}}+\alpha(x,y) & x,y\in\mathfrak{h}\\ [x,\xi] &=& \rho(x)\xi & x\in\mathfrak{h},\ \xi\in\mathfrak{h}^*\\ [a,x] &=& r(a)x & a\in A,\ x\in\mathfrak{h}\\ [a,\xi] &=& r^*(a)\xi & a\in A,\ \xi\in\mathfrak{h}^*\\ [a,b] &=& [a,b]_A & a\in A,\ b\in A\end{array}$$

Supposons que α vérifie :

$$\alpha(x,y)(z)+\alpha(y,z)(x)+\alpha(z,x)(y) \quad = \quad 0$$

Proposition 51.

Soit la 2-forme définie sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus A\oplus\mathfrak{h}^*$ par

$$\begin{array}{rcll} \omega(x,\xi) & = & \xi(x) & x\in\mathfrak{h},\ \xi\in\mathfrak{h}^* \\ \omega(a,b) & = & \omega_A(a,b) & a\in A,\ b\in A \\ \omega(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^*,A) & = & 0. & \end{array}$$

Alors ω est symplectique.

Démonstration. il suffit de vérifier que $r+r^*$ est une dérivation symplectique. En effet pour $a\in A$, x, $y\in\mathfrak{h}$ et μ, $\nu\in\mathfrak{h}^*$ on a

$$\omega(r(a)x+r^*(a)\mu,y+\nu) \quad = \quad \langle\nu,r(a)x\rangle-\langle r^*(a)\mu,y\rangle$$

et

$$\omega(x+\mu,r(a)y+r^*(a)\nu) \quad = \quad \langle r^*(a)\nu,x\rangle-\langle\mu,r^*(a)y\rangle$$

□

3.3 Doubles extensions symplectiques

Le processus de double extension est apparaît pour la première fois sous forme d'exercices dans le livre V. Kac. Quelques années plus tard, presque simultanément, A. Medina et P. Revoy et G. Favre et JL Santharoubane ont utilisé la double extension sur les algèbre de Lie quadratiques. En 1991, A. Medina et P. Revoy ont fourni un résultat analogue concernant les algèbres de Lie symplectiques nilpotentes.
Ce processus permet de construire des familles d'algèbres de Lie symplectiques et, dans certains cas, il permet également de récupérer l'algèbre de Lie symplectique par applications successives du processus de double extension.
Soit $(\overline{\mathfrak{g}},\overline{\omega})$ une algèbre de Lie symplectique, on veut construire une algèbre de Lie symplectique $(\mathfrak{g},\omega)$ à travers $(\overline{\mathfrak{g}},\overline{\omega})$ de dimension $\dim(\overline{\mathfrak{g}})+2$. Dans ce contexte, nous parlons de doubles extensions symplectiques.

Double extension des algèbres de Lie

Soit $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{[.,.]})$ une algèbre de Lie et $\theta \in Z^2(\overline{\mathfrak{g}})$ un 2-cocycle. On note par $\langle e\rangle = Span\{e\}$ l'algèbre de Lie triviale de dimension 1. L'extension centrale de $\overline{\mathfrak{g}}$ par le 2-cocycle θ est l'algèbre de Lie

$$\overline{\mathfrak{g}}(\theta, e) = (\overline{\mathfrak{g}} \oplus \langle e\rangle, [.,.]_\theta)$$

avec

$$[x, y]_\theta \quad = \quad \overline{[x, y]} + \theta(x, y)e.$$

Notons par $\ker(\theta) := \{z \in \overline{\mathfrak{g}} \mid \theta(z, x) = 0 \quad \forall x \in \overline{\mathfrak{g}}\}$, il est facile de vérifier le lemme suivant :

Lemme 52.

Soit $\overline{\mathfrak{g}}(\theta, e)$ une extension centrale de l'algèbre de Lie réelle $\overline{\mathfrak{g}}$ par une 2-forme fermée θ. Alors le centre de $\overline{\mathfrak{g}}(\theta, e)$ est donné par :

$$Z(\overline{\mathfrak{g}}(\theta, e)) = Z(\overline{\mathfrak{g}}) \cap \ker(\theta) \oplus \langle e\rangle$$

Sur l'espace vectoriel

$$\mathfrak{g} = \langle d\rangle \oplus \overline{\mathfrak{g}} \oplus \langle e\rangle$$

on définit une application bilinéaire alternée : $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ par

$$\begin{array}{rcll} [x, y] & = & \overline{[x, y]} + \theta(x, y)e & \qquad x, y \in \overline{\mathfrak{g}} \\ [d, x] & = & \varphi(x) + \lambda(x)e & \qquad x \in \overline{\mathfrak{g}} \\ [d, e] & = & v + te. & \end{array}$$

avec, $D = (\varphi, \lambda, v, t) \in End(\overline{\mathfrak{g}}) \times \overline{\mathfrak{g}}^* \times \overline{\mathfrak{g}} \times \mathbb{R}$.
Notons par

$$\begin{array}{rcl} \partial\varphi(x, y) & = & \varphi(\overline{[x, y]}) - \overline{[\varphi(x), y]} - \overline{[x, \varphi(y)]} \\ \mathrm{d}\lambda(x, y) & = & -\lambda(\overline{[x, y]}) \\ \theta_\varphi(x, y) & = & \theta(\varphi(x), y) + \theta(x, \varphi(y)). \end{array}$$

Remarque 8. *Si φ est une dérivation et θ un 2-cocycle alors θ_φ est un 2-cocycle. En effet*

$$\begin{aligned}\oint \omega_\varphi([x,y],z) &= \oint \omega(\varphi[x,y],z) + \oint \omega([x,y],\varphi z)\\ &= \oint \omega([\varphi x,y],z) + \oint \omega([x,\varphi y],z) + \oint \omega([x,y],\varphi z)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Proposition 53.

La paire $(\mathfrak{g},[.,.])$ est une algèbre de Lie si et seulement si

1. $\partial\varphi = \theta v$
2. $t\theta - \theta_\varphi = \mathrm{d}\lambda$
3. $v \in Z(\overline{\mathfrak{g}}) \cap \ker(\theta)$

Définition 54.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{g}}(D,\theta)$ est dite double extension de $(\overline{g},\overline{[.,.]})$ par rapport à (D,θ).

Rappelons que $D = (\varphi,\lambda,v,t) \in End(\overline{\mathfrak{g}}) \times \overline{\mathfrak{g}}^* \times \overline{\mathfrak{g}} \times \mathbb{R}$.

Remarque 9.

1. *φ est une dérivation de l'algèbre de Lie $\overline{\mathfrak{g}}$ si et seulement si $v = 0$. En particulier, cela est valable lorsque $Z(\overline{\mathfrak{g}}) \cap \ker(\theta) = \{0\}$.*
2. *L'algèbre de Lie $\overline{\mathfrak{g}}(D,\theta)$ est un produit semi-direct $\mathfrak{g}(D,\theta) = \langle d\rangle \ltimes (\overline{\mathfrak{g}} \oplus \langle e\rangle)$ de l' algèbre de Lie abélien $\langle d\rangle$ avec extension centrale $\overline{\mathfrak{g}} \oplus \langle e\rangle$ relativement à la dérivation $D \in Der(\overline{\mathfrak{g}} \oplus \langle e\rangle)$ donnée par*

$$\begin{aligned}D(x) &= \varphi(x) + \lambda(x)e \qquad\qquad x \in \overline{\mathfrak{g}}\\ D(e) &= v + te.\end{aligned}$$

Démonstration. D'une part, pour x, $y \in \overline{\mathfrak{g}}$ on a :

$$\begin{aligned}\oint [[d,x],y] &= [[d,x],y]+[[x,y],d]+[[y,d],x] \\ &= [\varphi(x)+\lambda(x)e,y]+[\overline{[x,y]}+\theta(x,y)e,d]-[\varphi(y)+\lambda(y)e,x] \\ &= \overline{[\varphi(x),y]}+\theta(\varphi(x),y)e-\varphi(\overline{[x,y]})-\lambda(\overline{[x,y]})e-\theta(x,y)v \\ &\quad -t\theta(x,y)e-\overline{[\varphi(y),x]}-\theta(\varphi(y),x)e \\ &= \big(\partial\varphi(x,y)-\theta(x,y)v\big)+\big(\theta_\varphi(x,y)-t\theta(x,y)-\lambda(\overline{[x,y]})\big)e\end{aligned}$$

d'où 1. et 2.. D'autre part, on a pour $x \in \overline{\mathfrak{g}}$:

$$\begin{aligned}\oint [[x,e],d] &= [[x,e],d]+[[e,d],x]+[[d,x],e] \\ &= 0+[v+te,x]+0 \\ &= \overline{[v,x]}+\theta(v,x)e,\end{aligned}$$

d'où $v \in Z(\overline{\mathfrak{g}}) \cap \ker(\theta)$. Les autres identités de Jacobi possibles sont immédiatement vérifiées. □

Proposition 55.

Soient $\overline{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie nilpotente, supposons que φ est une dérivation nilpotente et que $t = 0$. Alors la double extension $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{g}}(D,\theta)$ est une algèbre de Lie nilpotente.

Démonstration. En appliquant le théorème d'Engel, il suffit de montrer que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est nilpotente. En effet, notons par ad la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ et par $\overline{ad}$ la représentation adjointe de $\overline{\mathfrak{g}}$, on a pour $n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 2)$: $ad_x^n = \overline{ad}_x^n$ pour $x \in \overline{\mathfrak{g}}$ et $ad_d^n = \varphi^n$.

□

Exemple 8. *Les algèbres de Lie de dimension* 4*, doubles extensions des algèbres de Lie de dimension* 2*, sont :*

Type I	*Type II*	*Type III*
$[e_1,e_2] = e_2 + xe_4$	$[e_3,e_1] = xe_1 + ye_2 + \lambda_1 e_4$	$[e_1,e_2] = fe_4$
$[e_3,e_1] = ye_2 + \lambda_1 e_4$	$[e_3,e_2] = ze_1 + fe_2 + \lambda_2 e_4$	$[e_3,e_1] = xe_1 + ye_2 + \lambda_1 e_4$
$[e_3,e_2] = ze_2 + x(z-t)e_4$	$[e_3,e_4] = v_1e_1 + v_2e_2 + te_4$	$[e_3,e_2] = ze_1 + he_2 + \lambda_2 e_4$
$[e_3,e_4] = te_4$		$[e_1,e_2] = (x+y)e_4$

Doubles extensions symplectiques. Soient $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ une algèbre de Lie symplectique et $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{g}}(D, \theta)$ la double extension de $(\overline{g}, \overline{[.,.]})$ par rapport à (D, θ). Nous donnons deux manières différentes de construction d'une forme symplectique sur $\mathfrak{g}$.
La première construction consiste à considérer une 2-forme non-dégénérée ω sur $\mathfrak{g}$ et chercher les conditions pour que ω soit un 2-cocycle, tandis que pour la seconde on considère un 2-cocycle et on cherche les conditions pour que ω soit non dégénérée.

3.3.1 Double extension symplectique

Soient $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ une algèbre de Lie symplectique et $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{g}}(D, \theta)$ la double extension de $(\overline{g}, \overline{[.,.]})$ par rapport à (D, θ). Rappelons que $D = (\varphi, \lambda, v, t) \in End(\overline{\mathfrak{g}}) \times \overline{\mathfrak{g}}^* \times \overline{\mathfrak{g}} \times \mathbb{R}$. Nous présentons une construction que nous appelons Double extension symplectique ou Oxydation symplectique qui généralise l'Oxydation symplectique "centrale" donnée dans [2].
Soit ω la 2-forme non dégénérée sur $\mathfrak{g}$ donnée par :

1. $\omega = \overline{\omega}$ sur $\overline{\mathfrak{g}}$
2. $\omega(e, x) = \omega(d, x) = 0, \qquad x \in \overline{\mathfrak{g}}$
3. $\omega(d, e) = 1$.

Proposition 56.

Soit $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{g}}(D, \theta)$ la double extension de $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{[.,.]})$ par rapport à (D, θ). Alors $(\mathfrak{g}, \omega)$ est une algèbre de Lie symplectique, si et seulement si

$$\overline{\omega}_\varphi = \theta \quad et \quad v = 0.$$

Avec $\overline{\omega}_\varphi(x, y) = \overline{\omega}(\varphi x, y) + \overline{\omega}(x, \varphi y)$.

Rappelons que $v = 0$ si et seulement si φ est une dérivation de l'algèbre de Lie $\overline{g}$.

Démonstration. Soit x, $y \in \overline{\mathfrak{g}}$ on a d'une part :

$$\begin{aligned}
\oint \omega([x,y],d) &= \omega([x,y],d) + \omega([d,x],y) + \omega([y,d],x) \\
&= \omega(\overline{[x,y]} + \theta(x,y)e, d) + \omega(\varphi(x) + \lambda(x)e, y) - \omega(\varphi(y) + \lambda(y)e, x) \\
&= -\theta(x,y) + \overline{\omega}(\varphi(x), y) - \overline{\omega}(\varphi(y), x) \\
&= \overline{\omega}_\varphi(x,y) - \theta(x,y).
\end{aligned}$$

Et d'autre part on a :

$$\begin{aligned}\oint \omega([d,e],x) &= \omega([d,e],x)+\omega([e,x],d)+\omega([x,d],e)\\ &= \omega(v+te,x)-\omega(\varphi(x)+\lambda(x)e,e)\\ &= \overline{\omega}(v,x).\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que les autres identités de Jacobi sont vérifiées. □

Soient $(\overline{\mathfrak{g}},\overline{\omega})$ une algèbre de Lie symplectique et $\varphi \in Der(\overline{\mathfrak{g}})$ une dérivation de l'algèbre de Lie $\overline{\mathfrak{g}}$, vu la Proposition 50, l'extension centrale $\overline{\mathfrak{g}}\oplus\langle e\rangle$ se fait nécessairement relativement à $\theta = \overline{\omega}_{\varphi}$, notons par $\theta_{\varphi} = \overline{\omega}_{\varphi,\varphi}$. Alors $[t\overline{\omega}_{\varphi} - \overline{\omega}_{\varphi,\varphi}] \in H^2(\overline{\mathfrak{g}})$ se présente comme une obstruction à l'existence d'une double extension symplectique.

Corollaire 57.

Soient $(\overline{\mathfrak{g}},\overline{\omega})$ une algèbre de Lie symplectique, $\varphi \in Der(\overline{\mathfrak{g}})$ une dérivation et $t \in \mathbb{R}$. Il existe alors une double extension symplectique si et seulement si la classe de cohomologie $[t\overline{\omega}_{\varphi} - \overline{\omega}_{\varphi,\varphi}] \in H^2(\overline{\mathfrak{g}},\mathbb{R})$ est nulle.

Définition 58.

L'algèbre de Lie symplectique $(\mathfrak{g},\omega)$ est appelée double extension symplectique de $(\overline{\mathfrak{g}},\overline{\omega})$ par rapport à $(\varphi,t) \in Der(\overline{\mathfrak{g}}) \times \mathbb{R}$.

Remarque 10.

1. *Soit $(\mathfrak{g},\omega)$ est l'oxydation symplectique de $(\overline{\mathfrak{g}},\overline{\omega})$ par rapport à (φ,t). Alors l'algèbre de Lie $(\overline{\mathfrak{g}},\overline{\omega})$ est une réduction normale de $(\mathfrak{g},\omega)$ par rapport à l'idéal $J=\langle e\rangle$.*
2. *Si $t=0$ on retrouve la notion de l'oxydation centrale introduite par Baues et Cortés [2] qui coïncide aussi avec la notion de la "double extension classique" introduite par Medina et Revoy [13].*

Exemples 1.

1. *En dimension 4, l'algèbre de Lie symplectique $(\mathfrak{d}_{4,\alpha},\overline{\omega}=-\mathrm{d}e^3)$ avec*

$$[e_4,e_1]=\alpha e_1,\quad [e_4,e_2]=(1-\alpha)e_2,\quad \alpha \geqslant \frac{1}{2}\ et, \alpha\neq 1,2$$

$$[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_4,e_3]=e_3$$

est une double extension de l'algèbre de Lie abélienne $\overline{\mathfrak{g}}=\langle e_1,e_2\rangle$ par rapport à $(\varphi,1)$ avec $\varphi(e_1)=\alpha e_1$ et $\varphi(e_2)=(1-\alpha)e_2$.

2. *On considère l'algèbre de Lie symplectique* $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{r}_2\tau_2$ *avec*

$$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_4,\ \text{et}\ \overline{\omega} = e^{12} + e^{34} + \mu e^{13}$$

les dérivations de $\mathfrak{r}_2\tau_2$ *sont de la forme*

$$\varphi(e_1) = ce_2,\ \varphi(e_2) = ae_2,\ \varphi(e_3) = fe_4,\ \varphi(e_4) = be_4$$

un calcul donne

$$\begin{array}{rcl} \overline{\omega}_\varphi & = & ae^{12} + be^{34} \\ \overline{\omega}_{\varphi,\varphi} & = & a^2e^{12} + b^2e^{34} \end{array}$$

et $\quad t\overline{\omega}_\varphi - \overline{\omega}_{\varphi,\varphi} = \mathrm{d}\lambda$, *avec* $\lambda = (a^2 - ta)e^2 + ((b^2 - tb)e^4$.
La double extension symplectique de $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ *par rapport à* (φ, t) *est :*

$$\mathfrak{g} = \langle e_5\rangle \oplus \overline{\mathfrak{g}} \oplus \langle e_6\rangle$$

avec

$$\begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & e_2 + ae_6 \\ [e_3, e_4] & = & e_4 + be_6 \\ [e_5, e_1] & = & ce_2 \\ [e_5, e_2] & = & ae_2 + (a^2 - ta)e_6 \\ [e_5, e_3] & = & fe_4 \\ [e_5, e_4] & = & be_4 + (b^2 - tb)e_6 \\ [e_5, e_6] & = & te_6. \end{array}$$

et $\omega = e^{12} + e^{34} + e^{56}$. *Remarquons que* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie résoluble non nilpotente.*

3.3.2 Double extension symplectique au sens de Vallarte et Salgado

Dans [14] Vallarte et Salgado ont présenté une nouvelle notion de la double extension. Soient $\overline{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie et $\overline{\mathfrak{g}}(\theta, e) = \overline{\mathfrak{g}} \oplus \langle e\rangle$ l'extension centrale de $\overline{\mathfrak{g}}$ par le 2-cocycle $\theta \in Z^2(\overline{\mathfrak{g}})$.
Soient $D = (\varphi, \lambda, v, t) \in End(\overline{\mathfrak{g}}) \times \overline{\mathfrak{g}}^* \times \overline{\mathfrak{g}} \times \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{g} = \langle d\rangle \oplus \overline{\mathfrak{g}} \oplus \langle e\rangle, [.,.])$ avec

$$\begin{array}{rcll} [x, y] & = & \overline{[x, y]} + \theta(x, y)e & \quad x, y \in \overline{\mathfrak{g}} \\ [d, x] & = & \varphi(x) + \lambda(x)e & \quad x \in \overline{\mathfrak{g}} \qquad (\dagger) \\ [d, e] & = & v + te, & \end{array}$$

la double extension de l'algèbre de Lie $\overline{\mathfrak{g}}$ par rapport à (D, θ).
Notons par "d" l'opérateur différentiel (de Chevalley-Eilenberg) sur l'algèbre de Lie g et par "$\overline{\mathrm{d}}$" l'opérateur différentiel sur l'algèbre de Lie $\overline{\mathfrak{g}}$.

Théorème 59.

Soit $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathrm{d}}\alpha)$ une algèbre de Frobenius, considérons une extension centrale $\overline{\mathfrak{g}}(\theta, e)$ de $\overline{\mathfrak{g}}$ par θ et soit $\beta = \alpha + ce^* \in (\overline{\mathfrak{g}}(\theta, e))^*$, $c \in \mathbb{R}$. Alors la double extension $\overline{\mathfrak{g}}(D, \theta)$ de $\overline{\mathfrak{g}}$ par le couple (D, θ) est une algèbre de Frobenius avec la forme symplectique exacte $\omega_\theta = \mathrm{d}\beta$ pour certains $c \in \mathbb{R}$ et $(v, t) \in \mathfrak{g} \times \mathbb{R}$ tel que $\beta(v + te) \neq 0$.

Exemple 9. *On considère l'algèbre de Frobenius de dimension* 2 *donnée par*

$$(\overline{\mathfrak{g}} = \langle e_1, e_2 \rangle, [e_1, e_2] = e_2, \overline{\omega} = \mathrm{d}e^2)$$

L'algèbre de Lie

$$\mathfrak{g} = \langle e_3 \rangle \oplus \overline{\mathfrak{g}} \oplus \langle e_4 \rangle$$

double extension de $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ *par rapport à*

$$(\varphi = 0, \lambda(e_1) = 1, \lambda(e_2) = -t, v = 0, t, \theta = e^{12}).$$

est donnée par

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_2 + e_4 \\ [e_3, e_1] &= e_4 \\ [e_3, e_2] &= -te_4 \\ [e_3, e_4] &= te_4 \end{aligned}$$

On déduit les équations de Maurer-Cartan

$$\mathrm{d}e^2 = e^{21} \text{ et } \mathrm{d}e^4 = e^{21} + e^{13} - te^{23} - te^{34}$$

Alors $\beta = e^2 + ce^4$ *on a* $\mathrm{d}\beta$ *est non-dégénérée si et seulement si* $ct \neq 0$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_{2n}, d, e\}$ une base de l'algèbre de Lie $\overline{\mathfrak{g}}(D, \theta)$ et $\mathcal{B}^* = \{e^1, ..., e^{2n}, d^*, e^*\}$ sa base duale. La donnée $D = (\varphi, \lambda, v, t) \in End(\overline{\mathfrak{g}}) \times \overline{\mathfrak{g}}^* \times \overline{\mathfrak{g}} \times \mathbb{R}$ s'exprime dans la base $\mathcal{B}$ par

$$\begin{aligned} \varphi(e_i) &= \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j^i e_j, & \varphi_j^i \in \mathbb{R} \\ \lambda(e_i) &= \lambda_i, & \lambda_i \in \mathbb{R} \\ v &= \sum_{i=1}^{2n} v_i e_i, & v_i \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En utilisant (†), on trouve pour $k \in \{1, ..., 2n\}$ les équations de Maurer-Cartan

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e^k &= \overline{\mathrm{d}}e^k + \sum_{i=1}^{2n} \varphi_k^i e^i \wedge d^* + v_k e^* \wedge d^* \\ \mathrm{d}e^* &= -\theta + \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k e^k \wedge d^* + te^* \wedge d^*. \end{aligned}$$

D'autre part si $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{2n} \alpha_k e^k$ on a

$$\mathrm{d}\alpha = \overline{\mathrm{d}}\alpha + \sum_{k=1}^{2n}\sum_{i=1}^{2n} \alpha_k \varphi_k^i e^i \wedge d^* + \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k v_k e^* \wedge d^*.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\beta &= \mathrm{d}\alpha + c\,\mathrm{d}e^* \\ &= (\overline{\mathrm{d}}\alpha - c\theta) + (\sum_{k=1}^{2n}\sum_{i=1}^{2n} \alpha_k \varphi_k^i e^i \wedge d^* + \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k v_k e^* \wedge d^* + c\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i e^i \wedge d^* + cte^* \wedge d^*) \\ &= (\overline{\mathrm{d}}\alpha - c\theta) + \sum_{i=1}^{2n}(\sum_{k=1}^{2n} \alpha_k \varphi_k^i + c\lambda_i) e^i \wedge d^* + (\sum_{k=1}^{2n} \alpha_k v_k + ct) e^* \wedge d^* \\ &= (\overline{\mathrm{d}}\alpha - c\theta) + \sum_{i=1}^{2n} A_i e^i \wedge d^* + Be^* \wedge d^* \\ &= X + Y \end{aligned}$$

avec

$$X = \overline{\mathrm{d}}\alpha - c\theta, \quad Y = \sum_{i=1}^{2n} A_i e^i \wedge d^* + Be^* \wedge d^*, \quad A_i = c\lambda_i + \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k \varphi_k^i, \quad et\ B = \beta(v + te).$$

Il est facile de voir que $X^k = 0$ pour $k \geq n+1$ et que $Y^k = 0$ pour $k \geq 2$, on obtient alors

$$(X+Y)^{n+1} = (n+1)X^n \wedge Y$$

Après un calcul on trouve

$$\begin{aligned} (X+Y)^{n+1} &= (n+1)X^n \wedge Y \\ &= (n+1)B(\overline{\mathrm{d}}\alpha - c\theta)^n \wedge e^* \wedge d^*. \end{aligned}$$

□

Théorème 60.

Soit $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\omega})$ une algèbre de Lie symplectique et $\overline{\mathfrak{g}}(\theta, e)$ l'extension centrale de $\overline{\mathfrak{g}}$ par $\theta \in Z^2(\overline{\mathfrak{g}})$. Alors la double extension $\overline{\mathfrak{g}}(D, \theta)$ de $\overline{\mathfrak{g}}$ par le couple (D, θ) avec l'hypothèse $t \neq 0$ est une algèbre de Lie symplectique de forme symplectique $\omega = \overline{\omega} + c\mathrm{d}e^*$ pour certains $c \in \mathbb{R}$.

Références

[1] Y. Agaoka, *Uniqueness of left invariant symplectic structures on the affine Lie group,* Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), no. 9, 2753-2762.

[2] O. Baues et V. Cortés, *Symplectic Lie groups* arXiv : 2013, 1307-1629.

[3] M. Bordeman A. Medina and A. Ouadfel, *Le groupe affine comme variété sympectique,* Tohoku. Math. Journal. 45, no. 3, (1993), 423-436.

[4] B-Y. Chu, *Symplectic homogeneous spaces,* Trans. Amer. Math. Soc, 197 (1974), 145-159.

[5] A. Diatta, B. Manga, *On Properties of Principal Elements of Frobenius Lie Algebras,* Journal of Lie theory 24(3), (2014), 849-864.

[6] J.M. Dardié and A. Medina, *Double extension symplectique d'un groupe de Lie symplectique*, Adv. Math. 117 (2) (1996) 208-227.

[7] J.M. Dardié and A. Medina, *Algèbres de Lie kählériennes et double extension*, J. Algebra 185 (1996), 774-795.

[8] J. Dixmie, *Enveloping Algebras* Graduate Studies in Mathematics, 1996, Vol. 11, AMS.

[9] A. G. Elashvili, *Frobenius Lie algebras* Funksional. Anal. i Prilozhen, 1982, 16, 94-95. English translation : Functional Anal. Appl., 1982, 16, 4 (1983), 326-328.

[10] M. Fischer, *Symplectic Lie algebras with degenerate center*, J. Alg. 521, (2019), 257-283.

[11] J-I. Hano, *On Kaehlerian homogeneous spaces of unimodular Lie groups* American Journal of Mathematics 79.4 (1957), p. 885-900.

[12] Y. Khakimdjanov, M. Goze, A. Medina, *Symplectic or contact structures on Lie groups*, Differential Geom. Appl. 21 (2004), no. 1, 41-54.

[13] A. Medina et Ph. Revoy, *Groupes de Lie à structure symplectique invariante.* Groupoïds and Integrable Systems, M.S.R.I. pubications, Berkeley, 1991, 247-266.

[14] M. C. Rodríguez-Vallarte and G. Salgado, *Geometric structures on Lie Algebras and double extension* Proc. Amer. Math. Soc. 146 (2018), 4199-4209.

[15] G. Ovando, *Four Dimensional Symplectic Lie Algebras,* Contributions to Algebra and Geometry, 47 (2006), No. 2, 419-434.

[16] R. Campoamor-Stursberg, *Symplectic forms on six-dimensional real solvable Lie algebras I* Algebra Colloquium. World Scientific. (2009), p. 253-266.

[17] P. Turkowski, *Low-dimensional real Lie algebras,* J. Math. Phys. 29 (10) (1988), 2139-2144.